



SME0822 Análise Multivariada e Aprendizado Não-Supervisionado

Aula 4a: **Distribuição normal multivariada**

Prof. Cibeles Russo

cibele@icmc.usp.br

<http://www.icmc.usp.br/~cibele>

Baseado em Johnson, R. A., & Wichern, D. W. (2007). Applied Multivariate Statistical Analysis. Prentice Hall.

Veja também https://en.wikipedia.org/wiki/Multivariate_normal_distribution

Distribuição normal multivariada

Definição

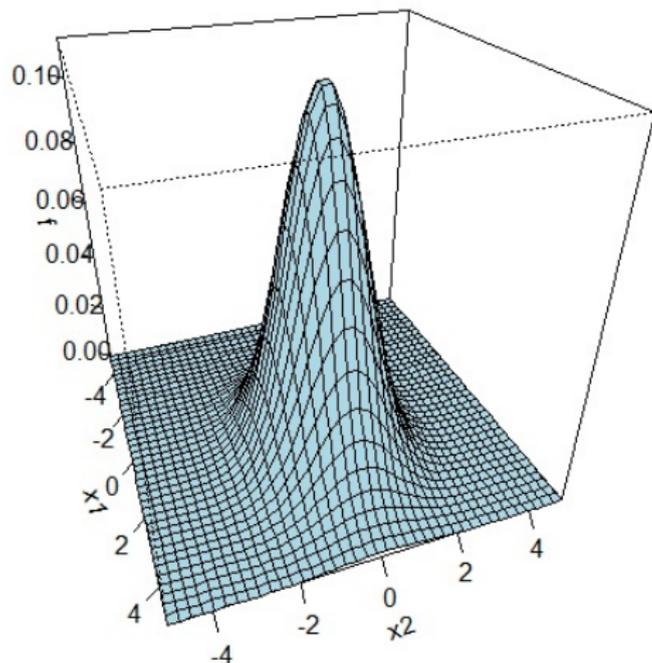
O vetor $\underline{X}_{p \times 1} = (X_1, \dots, X_p)^\top$ tem **distribuição normal multivariada** (p -variada) se sua função densidade de probabilidade é dada por

$$f(\underline{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{p/2} |\Sigma|^{1/2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} (\underline{x} - \underline{\mu})^\top \Sigma^{-1} (\underline{x} - \underline{\mu}) \right\},$$

com $-\infty < x_i < \infty$, $i = 1, 2, \dots, p$ e Σ uma matriz positiva definida.

Notação: $\underline{X} \sim N_p(\underline{\mu}, \Sigma)$.

Exemplo: normal bivariada



Distribuição normal multivariada

Definição alternativa

\underline{X} tem distribuição normal p -variada se e somente se $\underline{a}^\top \underline{X}$ tem distribuição normal univariada, para qualquer vetor fixo $\underline{a}_{p \times 1}$.

Obs: Se \underline{X} é considerado um ponto aleatório no espaço p -dimensional, então $\underline{a}^\top \underline{X}$ pode ser considerado uma projeção de \underline{X} em um subespaço unidimensional.

Distribuição normal multivariada

Teorema 1

Se \underline{X} tem distribuição normal p -variada, e se $\underline{Y} = A\underline{X} + \underline{b}$, com $A_{q \times p}$ e $\underline{b}_{q \times 1}$ fixos (não aleatórios), então \underline{Y} tem distribuição normal q -variada.

Prova:

Seja $\underline{c}_{q \times 1}$ um vetor fixado.

Então $\underline{c}^T \underline{Y} = \underline{c}^T (A\underline{X} + \underline{b}) = \underline{a}^T \underline{X} + \underline{c}^T \underline{b}$ com $\underline{a} = \underline{c}^T A$.

Como $\underline{a}^T \underline{X}$ tem distribuição normal pois \underline{X} tem distribuição normal, então para qualquer \underline{c} fixado, $\underline{c}^T \underline{Y}$ tem distribuição normal.

Distribuição normal multivariada

Teorema 1

Se \underline{X} tem distribuição normal p -variada, e se $\underline{Y} = A\underline{X} + \underline{b}$, com $A_{q \times p}$ e $\underline{b}_{q \times 1}$ fixos (não aleatórios), então \underline{Y} tem distribuição normal q -variada.

Prova:

Seja $\underline{c}_{q \times 1}$ um vetor fixado.

Então $\underline{c}^\top \underline{Y} = \underline{c}^\top (A\underline{X} + \underline{b}) = \underline{a}^\top \underline{X} + \underline{c}^\top \underline{b}$ com $\underline{a} = \underline{c}^\top A$.

Como $\underline{a}^\top \underline{X}$ tem distribuição normal pois \underline{X} tem distribuição normal, então para qualquer \underline{c} fixado, $\underline{c}^\top \underline{Y}$ tem distribuição normal.

Distribuição normal multivariada

Teorema 1

Se \underline{X} tem distribuição normal p -variada, e se $\underline{Y} = A\underline{X} + \underline{b}$, com $A_{q \times p}$ e $\underline{b}_{q \times 1}$ fixos (não aleatórios), então \underline{Y} tem distribuição normal q -variada.

Prova:

Seja $\underline{c}_{q \times 1}$ um vetor fixado.

Então $\underline{c}^T \underline{Y} = \underline{c}^T (A\underline{X} + \underline{b}) = \underline{a}^T \underline{X} + \underline{c}^T \underline{b}$ com $\underline{a} = \underline{c}^T A$.

Como $\underline{a}^T \underline{X}$ tem distribuição normal pois \underline{X} tem distribuição normal, então para qualquer \underline{c} fixado, $\underline{c}^T \underline{Y}$ tem distribuição normal.

Distribuição normal multivariada

Teorema 1

Se \underline{X} tem distribuição normal p -variada, e se $\underline{Y} = A\underline{X} + \underline{b}$, com $A_{q \times p}$ e $\underline{b}_{q \times 1}$ fixos (não aleatórios), então \underline{Y} tem distribuição normal q -variada.

Prova:

Seja $\underline{c}_{q \times 1}$ um vetor fixado.

Então $\underline{c}^\top \underline{Y} = \underline{c}^\top (A\underline{X} + \underline{b}) = \underline{a}^\top \underline{X} + \underline{c}^\top \underline{b}$ com $\underline{a} = \underline{c}^\top A$.

Como $\underline{a}^\top \underline{X}$ tem distribuição normal pois \underline{X} tem distribuição normal, então para qualquer \underline{c} fixado, $\underline{c}^\top \underline{Y}$ tem distribuição normal.

Distribuição normal multivariada

Corolário

Qualquer subconjunto de elementos de um vetor \underline{X} com distribuição normal multivariada tem distribuição normal multivariada. Em particular, cada elemento unidimensional tem distribuição normal univariada.

Obs: Para o Teorema 1 e Corolário, a matriz de variâncias e covariâncias de \underline{X} , Σ , é suposta de posto completo.

Distribuição normal multivariada

Teorema 2

Se $\underline{X} \sim N_p(\underline{\mu}, \Sigma)$, com $\Sigma > 0$ e se $\underline{Y} = A\underline{X} + \underline{b}$, com $A_{q \times p}$ e $\underline{b}_q \times 1$ fixos (não aleatórios), então $\underline{Y} \sim N_q(A\underline{\mu} + \underline{b}, A\Sigma A^T)$.

Distribuição normal multivariada

Corolário 1

Se $\underline{X} \sim N_p(\underline{\mu}, \Sigma)$, com $\Sigma > 0$ e se $Y = \underline{a}^\top \underline{X}$, com $\underline{a}_{p \times 1}$ fixo, então $Y \sim N(\underline{a}^\top \underline{\mu}, \underline{a}^\top \Sigma \underline{a})$ (normal univariada).

Corolário 2

Se $\underline{X} \sim N_p(\underline{\mu}, \Sigma)$, com $\Sigma > 0$ e se $\underline{Z} = \Sigma^{-1/2}(\underline{X} - \underline{\mu})$, então

$\underline{Z} \sim N_p(\underline{0}, I_p)$. Além disso, $(\underline{X} - \underline{\mu})^\top \Sigma^{-1}(\underline{X} - \underline{\mu}) = \sum_{i=1}^p Z_i^2 \sim \chi_p^2$.

Distribuição normal multivariada

Corolário 1

Se $\underline{X} \sim N_p(\underline{\mu}, \Sigma)$, com $\Sigma > 0$ e se $Y = \underline{a}^\top \underline{X}$, com $\underline{a}_{p \times 1}$ fixo, então $Y \sim N(\underline{a}^\top \underline{\mu}, \underline{a}^\top \Sigma \underline{a})$ (normal univariada).

Corolário 2

Se $\underline{X} \sim N_p(\underline{\mu}, \Sigma)$, com $\Sigma > 0$ e se $\underline{Z} = \Sigma^{-1/2}(\underline{X} - \underline{\mu})$, então $\underline{Z} \sim N_p(\underline{0}, I_p)$. Além disso, $(\underline{X} - \underline{\mu})^\top \Sigma^{-1}(\underline{X} - \underline{\mu}) = \sum_{i=1}^p Z_i^2 \sim \chi_p^2$.

Distribuição normal multivariada

Teorema 3

Se $\underline{X} \sim N_p(\underline{\mu}, \Sigma)$, $\Sigma > 0$, então sua função característica é dada por

$$\varphi_{\underline{X}}(\underline{t}) = \exp\{i\underline{t}^T \underline{\mu} - \frac{1}{2}\underline{t}^T \Sigma \underline{t}\}$$

Prova em Mardia et al. (1979) pág 61.

Exercício: Seja $\underline{X} \sim N_p(\underline{\mu}, \Sigma)$. Mostre que $Y = \underline{c}^T \underline{X} \sim N(\underline{c}^T \underline{\mu}, \underline{c}^T \Sigma \underline{c})$, ou seja, normal univariada.

Distribuição normal multivariada

Teorema 4

- a. Dois vetores aleatórios com distribuição normal multivariada são independentes se e somente se eles são não-correlacionados.
- b. Para dois vetores conjuntamente normais, a independência de todos os pares de seus componentes implica na independência dos dois vetores originais.

Distribuição normal multivariada

Teorema 4

- a. Dois vetores aleatórios com distribuição normal multivariada são independentes se e somente se eles são não-correlacionados.
- b. Para dois vetores conjuntamente normais, a independência de todos os pares de seus componentes implica na independência dos dois vetores originais.

Distribuição normal multivariada

Teorema 5

Se $\underline{X} \sim N(\underline{\mu}, \Sigma)$ e duas matrizes A e B fixas, então $A\underline{X}$ e $B\underline{X}$ são independentes se e somente se $A\Sigma B^T = 0$.

Distribuição normal multivariada

Resultado

Considere $\underline{X} \sim N(\underline{\mu}, \Sigma)$ e a partição

$$\underline{X} = \begin{pmatrix} \underline{X}_1(q \times 1) \\ \underline{X}_2((p-q) \times 1) \end{pmatrix} \sim N_p \left[\begin{pmatrix} \underline{\mu}_1(q \times 1) \\ \underline{\mu}_2((p-q) \times 1) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \Sigma_{11} & \Sigma_{12} \\ \Sigma_{21} & \Sigma_{22} \end{pmatrix} \right].$$

Então

- $\underline{X}_1 \sim N_q(\underline{\mu}_1, \Sigma_{11})$
- \underline{X}_1 e \underline{X}_2 são independentes se e somente se $\Sigma_{12} = 0$.

Distribuição normal multivariada

Resultado: Distribuição condicional

Considere

$$\underline{\underline{X}} = \begin{pmatrix} \underline{\underline{X}}_1(q \times 1) \\ \underline{\underline{X}}_2((p-q) \times 1) \end{pmatrix} \sim N_p \left[\begin{pmatrix} \underline{\underline{\mu}}_1(q \times 1) \\ \underline{\underline{\mu}}_2((p-q) \times 1) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \Sigma_{11} & \Sigma_{12} \\ \Sigma_{21} & \Sigma_{22} \end{pmatrix} \right],$$

com $\Sigma_{12} > 0$.

Então

$$\underline{\underline{X}}_1 | \underline{\underline{X}}_2 = \underline{\underline{x}}_2 \sim N_q(\underline{\underline{\mu}}_1 + \Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1}(\underline{\underline{x}}_2 - \underline{\underline{\mu}}_2), \Sigma_{11} - \Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1}\Sigma_{21})$$

Distribuição normal multivariada

Resultado

Considere $\underline{X} \sim N_p(\underline{\mu}, \Sigma)$ com $|\Sigma| > 0$. Então

- $(\underline{X} - \underline{\mu})^\top \Sigma^{-1} (\underline{X} - \underline{\mu}) \sim \chi_p^2$;
- $P(\underline{X}; (\underline{X} - \underline{\mu})^\top \Sigma^{-1} (\underline{X} - \underline{\mu}) \leq \chi_{p,\alpha}^2) = 1 - \alpha$

Definição

A quantidade $(\underline{X} - \underline{\mu})^\top \Sigma^{-1} (\underline{X} - \underline{\mu})$ é chamada de **Distância de Mahalanobis** entre \underline{X} e $\underline{\mu}$.

Distribuição normal multivariada

Resultado

Considere $\underline{X} \sim N_p(\underline{\mu}, \Sigma)$ com $|\Sigma| > 0$. Então

- $(\underline{X} - \underline{\mu})^\top \Sigma^{-1} (\underline{X} - \underline{\mu}) \sim \chi_p^2$;
- $P(\underline{X}; (\underline{X} - \underline{\mu})^\top \Sigma^{-1} (\underline{X} - \underline{\mu}) \leq \chi_{p,\alpha}^2) = 1 - \alpha$

Definição

A quantidade $(\underline{X} - \underline{\mu})^\top \Sigma^{-1} (\underline{X} - \underline{\mu})$ é chamada de **Distância de Mahalanobis** entre \underline{X} e $\underline{\mu}$.

Distribuição normal multivariada

Resultado

A densidade da normal multivariada é constante em superfícies em que

$$(\underline{x} - \underline{\mu})^T \Sigma^{-1} (\underline{x} - \underline{\mu}) = c^2$$

e o conjunto dos \underline{x} que satisfazem a equação acima são os que compoem o **contorno de densidade de probabilidade constante**.

Distribuição normal multivariada

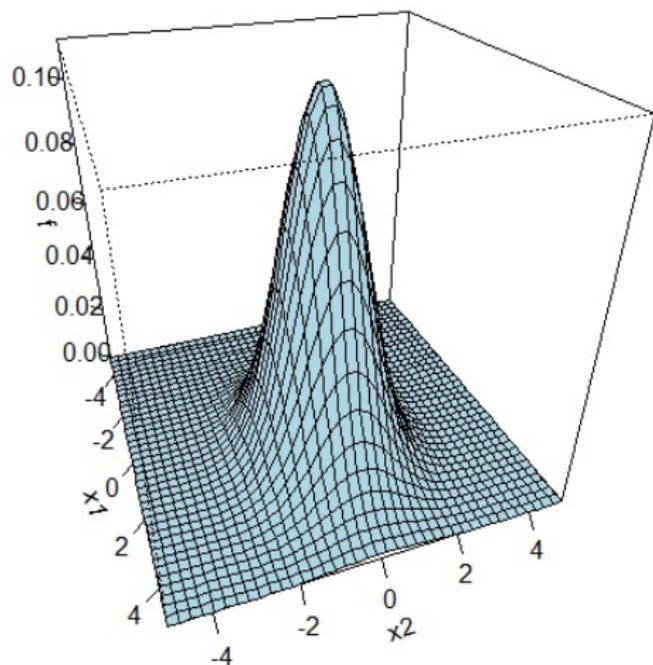
Propriedade:

Os **contornos de densidade constante** no caso normal multivariado são elipsóides definidos por \underline{x} tais que

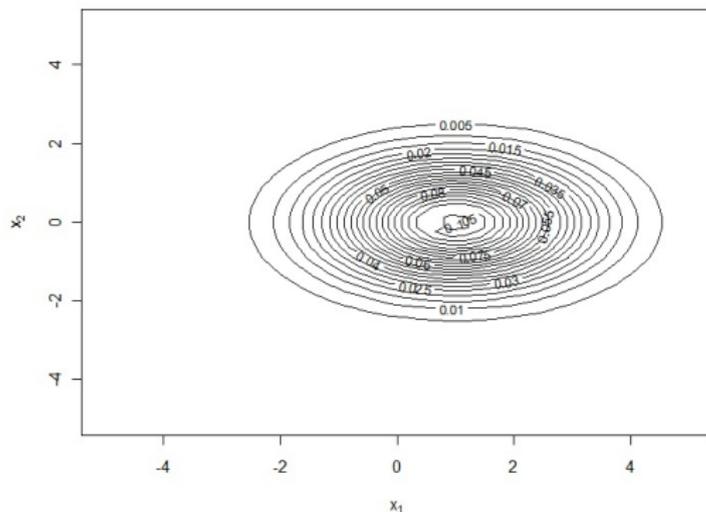
$$(\underline{x} - \underline{\mu})^T \Sigma^{-1} (\underline{x} - \underline{\mu}) = c^2.$$

Esses elipsóides têm centro em $\underline{\mu}$ e eixos em $\pm c\sqrt{\lambda_i}\underline{e}_i$ em que $(\lambda_i, \underline{e}_i)$ é um par de autovalor-autovetor de Σ .

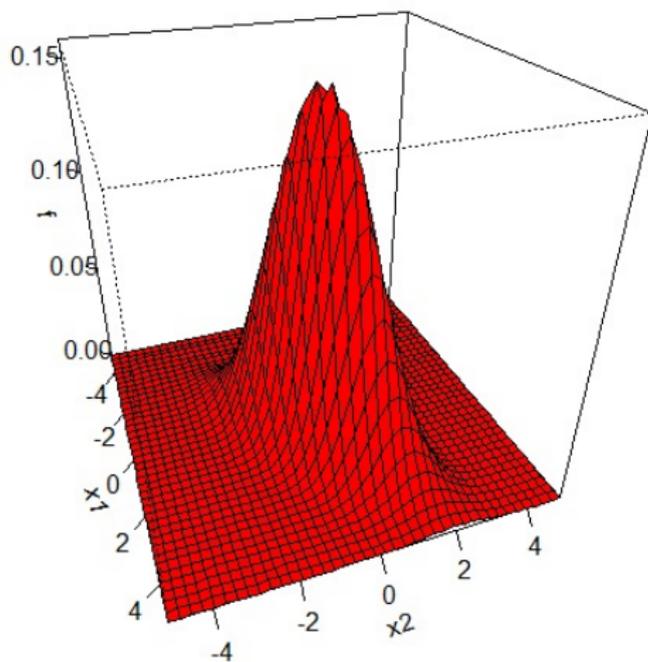
Densidade da normal bivariada (elementos não correlacionados)



Exemplo: Contornos elípticos da normal bivariada



Densidade da normal bivariada (elementos correlacionados)



Contornos elípticos da normal bivariada (elementos correlacionados)

