# Mecânica I – PME3100

## Aula 11
## Capítulo 6 – Cinemática do Ponto

| | |
|---|---|
| **Capítulo 6**<br>**6.1 Introdução à cinemática do ponto** | **6.2 Velocidade e aceleração**<br>**6.2.1 *v* e *a* em coord. cartesianas**<br>**6.2.2 *v* e *a* em coord. cilíndricas e polares**<br>**6.2.3 Expr. intrínsecas de *v* e *a*** |


## 6.1 - Introdução à cinemática do ponto

Cinemática é o estudo das propriedades geométricas do movimento

Fonte: França, L. N. F. e Matsumura, A. Z. 2011, ***Mecânica Geral***, 3ª edição, Editora Edgard Blücher Ltda.

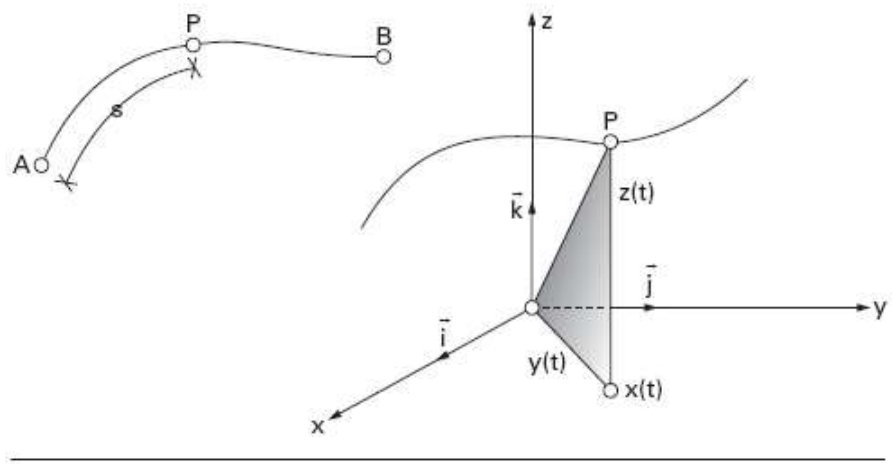


*Figura 6.1 – Movimento sobre uma curva*

| | |
|---|---|
| Capítulo 6<br>6.1 Introdução à cinemática do ponto | 6.2 Velocidade e aceleração<br>6.2.1 *v* e *a* em coord. cartesianas<br>6.2.2 *v* e *a* em coord. cilíndricas e polares<br>6.2.3 Expr. intrínsecas de *v* e *a* |


## 6.2 - Velocidade e aceleração

Seja ***O*** a origem de um referencial fixo

$$\bar{r} = P - O \quad \Rightarrow \text{ Vetor posição do ponto móvel } \boldsymbol{P}$$

$$\bar{v} = \frac{dP}{dt}\left(\bar{v} = \frac{d\bar{r}}{dt}\right) \quad \Rightarrow \text{ Vetor velocidade do ponto móvel } \boldsymbol{P}$$

$$\bar{a} = \frac{d\bar{v}}{dt} = \frac{d^2P}{dt^2}\left(\bar{a} = \frac{d^2\bar{r}}{dt^2}\right) \Rightarrow \text{ Vetor aceleração do ponto móvel } \boldsymbol{P}$$

| Capítulo 6<br>6.1 Introdução à cinemática do ponto | 6.2 Velocidade e aceleração<br>6.2.1 *v* e *a* em coord. cartesianas<br>6.2.2 *v* e *a* em coord. cilíndricas e polares<br>6.2.3 Expr. intrínsecas de *v* e *a* |
|---|---|


## 6.2.1 - *v* e *a* em coordenadas cartesianas

$(O\bar{\imath}\bar{\jmath}\bar{k})$ $\Rightarrow$ Sistema cartesiano, fixo, de referência

$$P(t) - O = x(t)\bar{\imath} + y(t)\bar{\jmath} + z(t)\bar{k}$$

$$\bar{v} = \dot{x}\bar{\imath} + \dot{y}\bar{\jmath} + \dot{z}\bar{k}$$

$$\bar{a} = \ddot{x}\bar{\imath} + \ddot{y}\bar{\jmath} + \ddot{z}\bar{k}$$

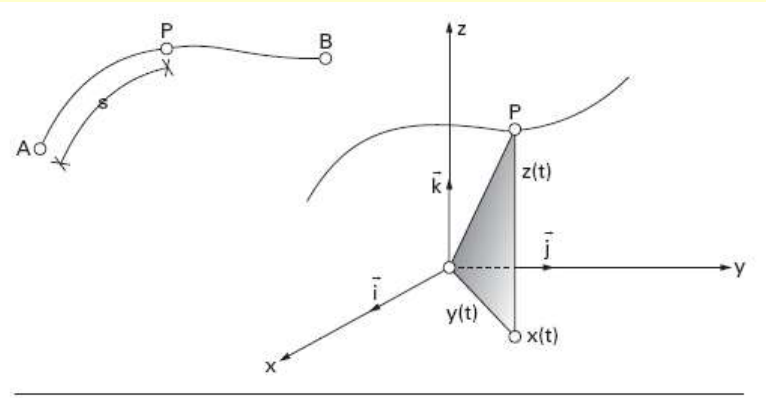


*Figura 6.1 – Movimento sobre uma curva*

| | |
|---|---|
| Capítulo 6<br>6.1 Introdução à cinemática do ponto | 6.2 Velocidade e aceleração<br>6.2.1 *v* e *a* em coord. cartesianas<br>6.2.2 *v* e *a* em coord. cilíndricas e polares<br>6.2.3 Expr. intrínsecas de *v* e *a* |


## Derivada de um vetor de módulo constante

$$|\bar{v}|^2 = \bar{v}.\bar{v} = cte \quad \text{Derivando em relação a } t \Rightarrow \quad 2\bar{v}.\left(\frac{d\bar{v}}{dt}\right) = 0$$

<u>Portanto, a derivada de um vetor de módulo constante é sempre ortogonal ao vetor</u>

(já vimos isto na aula 10 – *slides* 6 e 7)

| Capítulo 6<br>6.1 Introdução à cinemática do ponto | 6.2 Velocidade e aceleração<br>6.2.1 *v* e *a* em coord. cartesianas<br>6.2.2 *v* e *a* em coord. cilíndricas e polares<br>6.2.3 Expr. intrínsecas de *v* e *a* |
|---|---|


# Um caso particular

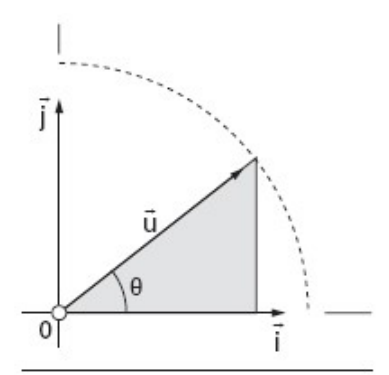


*Figura 6.2 – Versor que gira em um plano*

$$\bar{u} = \cos\theta\,\bar{\imath} + sen\theta\bar{\jmath}$$

$$\frac{d\bar{u}}{d\theta} = -sen\theta\bar{\imath} + \cos\theta\,\bar{\jmath} = \bar{\tau}$$

$\bar{\tau}$ $\Rightarrow$ versor no plano dando a ***u*** uma rotação de 90° no sentido anti-horário

$$\frac{d\bar{\tau}}{d\theta} = -\cos\theta\,\bar{\imath} - sen\theta\bar{\jmath} = -\bar{u}$$

| | |
|---|---|
| Capítulo 6<br>6.1 Introdução à cinemática do ponto | 6.2 Velocidade e aceleração<br>6.2.1 *v* e *a* em coord. cartesianas<br>6.2.2 *v* e *a* em coord. cilíndricas e polares<br>6.2.3 Expr. intrínsecas de *v* e *a* |


## 6.2.2 – Expressões de *v* e *a* em coordenadas cilíndricas e polares

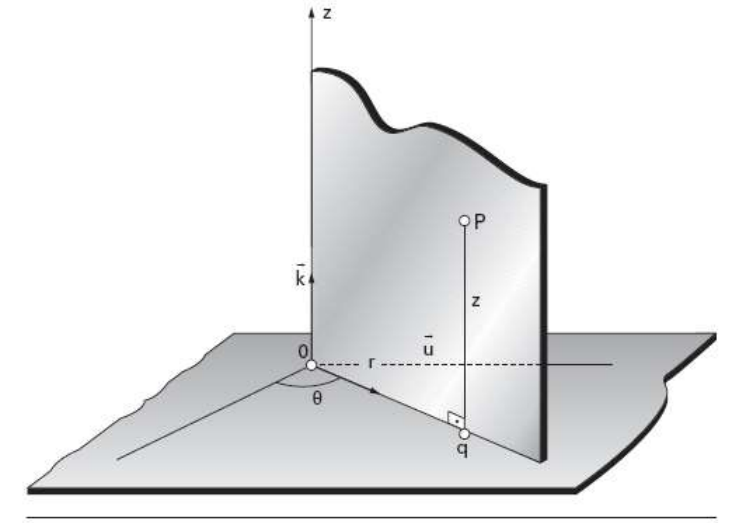


*Figura 6.3 – Componentes em coordenadas cilíndricas*

$$P - O = (P - Q) + (Q - O) = r\bar{u} + z\bar{k}$$

Lembrando que: $$\frac{d\bar{u}}{dt} = \left(\frac{d\bar{u}}{d\theta}\right)\left(\frac{d\theta}{dt}\right)$$

$$\bar{v} = \dot{r}\bar{u} + r\dot{\theta}\bar{\tau} + \dot{z}\bar{k}$$

Base móvel $(\bar{u}, \bar{\tau}, \bar{k})$

Comentário: se o ponto móvel ***P(t)*** se mover no plano, as coordenadas cilíndricas de ***P*** serão ***(r, θ, 0)*** ⇒ coordenadas polares

$$\bar{v} = \dot{r}\bar{u} + r\dot{\theta}\bar{\tau}$$

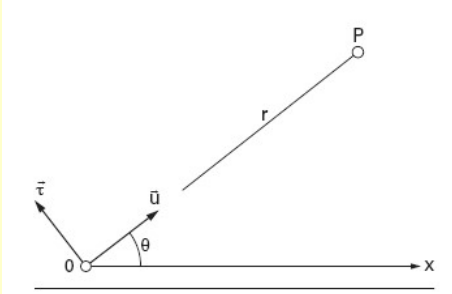


*Figura 6.4 – Velocidade em coordenadas polares*

Caso particular de um movimento circular de raio R

$$\bar{v} = R\dot{\theta}\bar{\tau} = R\omega\bar{\tau}$$

$\omega$ = velocidade angular do movimento circular

| | |
|---|---|
| Capítulo 6<br>6.1 Introdução à cinemática do ponto | 6.2 Velocidade e aceleração<br>6.2.1 *v* e *a* em coord. cartesianas<br>6.2.2 *v* e *a* em coord. cilíndricas e polares<br>6.2.3 Expr. intrínsecas de *v* e *a* |


$$\bar{a} = R\dot{\omega}\bar{\tau} + R\omega\dot{\bar{\tau}} = R\dot{\omega}\bar{\tau} + R\omega(-\omega\bar{u})$$

$$\boxed{\bar{a} = R\dot{\omega}\bar{\tau} - R\omega^2\bar{u}}$$

$\dot{\omega}$ = aceleração angular do movimento circular

| | |
|---|---|
| Capítulo 6<br>6.1 Introdução à cinemática do ponto | 6.2 Velocidade e aceleração<br>6.2.1 *v* e *a* em coord. cartesianas<br>6.2.2 *v* e *a* em coord. cilíndricas e polares<br>6.2.3 Expr. intrínsecas de *v* e *a* |


Em resumo:

$$\bar{v} = R\dot{\theta}\bar{\tau} = R\omega\bar{\tau}$$

$$\bar{a} = R\dot{\omega}\bar{\tau} - R\omega^2\bar{u}$$

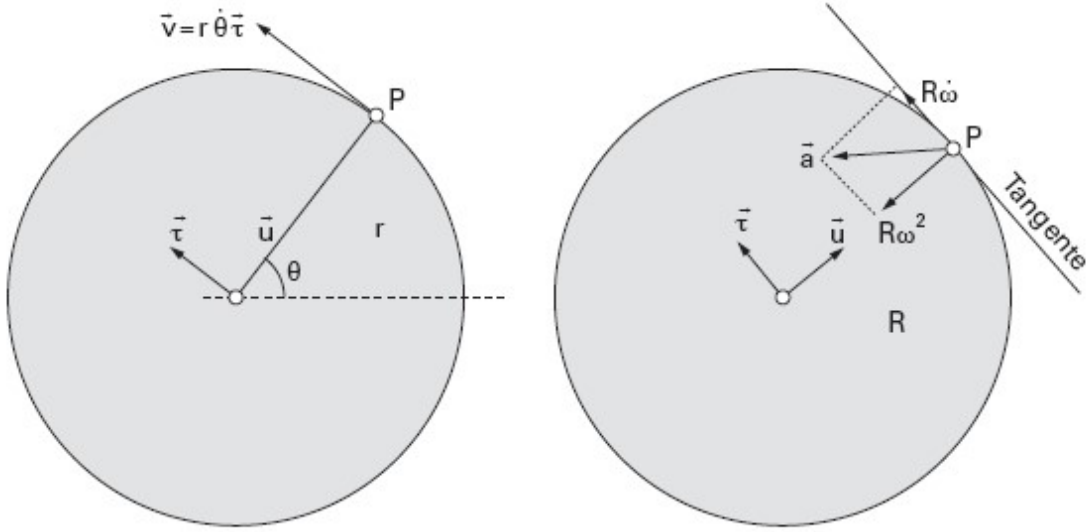


*Figura 6.5 – Velocidade e aceleração no movimento circular*

| | |
|---|---|
| Capítulo 6<br>6.1 Introdução à cinemática do ponto | 6.2 Velocidade e aceleração<br>6.2.1 *v* e *a* em coord. cartesianas<br>6.2.2 *v* e *a* em coord. cilíndricas e polares<br>6.2.3 Expr. intrínsecas de *v* e *a* |


Lembra? Triedro de Frenet!

## 6.2.3 – Expressões intrínseca de *v* e *a*

Base ortonormal positiva $(\bar{t}, \bar{n}, \bar{b})$

$$\bar{v} = v\bar{t}$$

$$\bar{a} = \dot{v}\bar{t} + \frac{v^2}{\rho}\bar{n} = a_t\bar{t} + a_n\bar{n}$$

$v$ = módulo da velocidade (em geral, uma função)
$\rho$ = raio de curvatura da trajetória

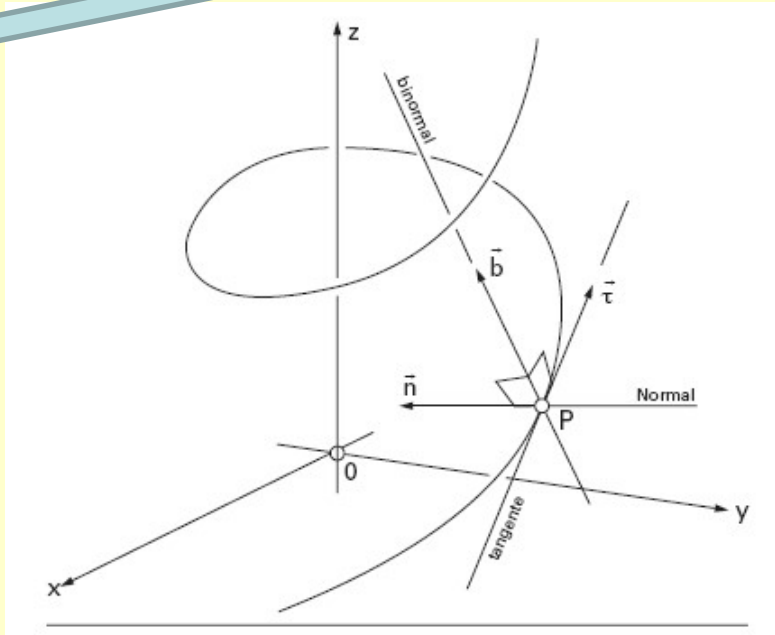

Figura 6.6

| | |
|---|---|
| Capítulo 6<br>6.1 Introdução à cinemática do ponto | 6.2 Velocidade e aceleração<br>6.2.1 *v* e *a* em coord. cartesianas<br>6.2.2 *v* e *a* em coord. cilíndricas e polares<br>6.2.3 Expr. intrínsecas de *v* e *a* |


No caso de trajetória circular:

$$\bar{t} = \bar{\tau} \quad , \quad \bar{n} = -\bar{u}$$

$$v = R\omega \quad , \quad \rho = R$$

$$\boxed{\bar{v} = v\bar{t}}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\bar{v} = R\omega\bar{\tau}}$$

$$\boxed{\bar{a} = \dot{v}\bar{t} + \frac{v^2}{\rho}\bar{n} = a_t\bar{t} + a_n\bar{n}}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\bar{a} = R\dot{\omega}\bar{\tau} - R\omega^2\bar{u}}$$

que já conhecíamos!

| | |
|---|---|
| **Capítulo 6**<br>**6.1 Introdução à cinemática do ponto** | **6.2 Velocidade e aceleração**<br>**6.2.1 *v* e *a* em coord. cartesianas**<br>**6.2.2 *v* e *a* em coord. cilíndricas e polares**<br>**6.2.3 Expr. intrínsecas de *v* e *a*** |


# Comentário: Exercício CP7 da lista 2

$$\boxed{\rho = \frac{|\bar{v}|^3}{|\bar{v} \wedge \bar{a}|}}$$

E 3.15 (livro Giacaglia)

O movimento de um ponto *P* é dado pelas equações:

$$x(t) = 2t \qquad y(t) = 2t^2 - \frac{1}{2} \qquad z(t) = 2t^2 + \frac{1}{2}$$

Pedem-se, em função de *t*

a) O módulo da velocidade
b) As componentes intrínsecas da aceleração

| Capítulo 6<br>6.1 Introdução à cinemática do ponto | 6.2 Velocidade e aceleração<br>6.2.1 *v* e *a* em coord. cartesianas<br>6.2.2 *v* e *a* em coord. cilíndricas e polares<br>6.2.3 Expr. intrínsecas de *v* e *a* |
|---|---|

# P2 – 2015

**Questão 3 (3,0 pontos)**

A trajetória de um ponto $P$ é dada por $(P-O)=\vec{r}(\alpha)=L\left(\cos\alpha\,\vec{i}+\operatorname{sen}\alpha\,\vec{j}-\operatorname{sen}2\alpha\,\vec{k}\right)$, onde $L$ é constante, de acordo com a lei horária $\alpha=2t+\dfrac{\pi}{8}$. Pede-se determinar, para o instante $t=\dfrac{\pi}{16}\,\text{s}$:

a) o versor tangente $\vec{t}$ do triedro de Frenet, em função dos versores da base $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$;

b) a velocidade de $P$ usando a base do triedro de Frenet (expressão intrínseca da velocidade);

c) a aceleração de $P$ usando a base do triedro de Frenet (expressão intrínseca da aceleração).

# PERGUNTAS?