Noções de Modelagem Biológica

Alexandre Souto Martinez[1]

[1]Departamento de Física (DF)
Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras de Ribeirão Preto (FFCLRP)
Universidade de São Paulo (USP)

9 de setembro de 2020

Aula

1. Modelos Analíticos
   - Modelos contínuos e discretos

Modelos Analíticos

5 aulas de 2 horas

e-disciplinas

Aulas grandes!!!

Problema base da física é determinística Eq. de ondas ⟹ reversível

irreversível Eq. de difusão

Modelos

- contínuos e
- discretos com
- aumento de complexidade (permitem descrever situações mais complicadas).

Analíticos (contexto)

Modelos

Computacionais

(≠ cálculo numérico ⇓ simulação M.C.)

processos aleatórios!...

Qual é a peça? CONTAR uma ~~história~~ !!!

Modelo Matemático — É mentira, não é verdadeiro — ou estória...

~~parte estória~~

cenário:

personagens:

Grandezas:

constantes: parâmetros;

mutantes: variáveis

todos os modelos estão errados, mas alguns são úteis

Relação entre as grandezas: funções, soluções de equações diferenciais ou algébricas.

Equações diferenciais, condições

tempo

estória

$t_0 = 0$

iniciais: parâmetros;

contorno: funções.

variável dependente,

$t > t_0$

4

estória: função

$$f_a(t) = at^2$$

parâmetros

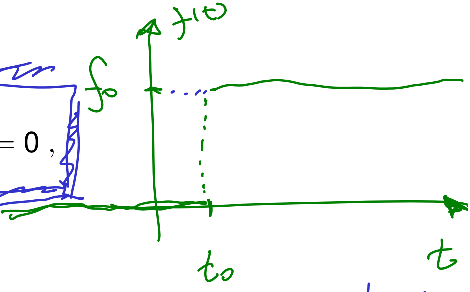
variáveis (independentes)

Constante (Modelagem matemática)

Variável independente t (tempo) — Analítica

Variável dependente $f(t)$ (resposta)

$$\boxed{\frac{df(t)}{dt} = 0\ ,}$$



estória: variações $\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta t} = 0$

$\Downarrow$

razões $\Rightarrow$ derivadas

$$f(t) = \begin{cases} f_0 & t \geq t_0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

$$f(t) = f_0\, \Theta(t - t_0)$$ função de Heaviside

Constante

$$\frac{df(t)}{dt} = 0 \ ,$$

$$f(t) = f_0 \ .$$

Nada acontece

Linear

$$\theta(x) = \begin{cases} 1 & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

$r_0 = 0 \Rightarrow$ Modelo constante

$\neq 0 \Rightarrow$ " linear

Coeficiente:

- constante

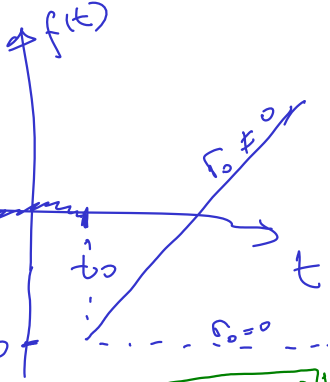
$$\boxed{\frac{df(t)}{dt} = r_0 \,,}$$

$$df = r_0 \, dt$$

$$\int_{f_0}^{f(t)} df = r_0 \int_{t_0}^{t} d\tau$$

$$f(t) - f_0 = r_0 (t - t_0)$$

$$f(t) = r_0 t + \underbrace{f_0 - r_0 t_0}_{cte}$$



$$\boxed{f(t) = [r_0 + f_0 - r_0 t_0]\, \theta(t - t_0)}$$

Linear

Coeficiente:

- constante

$$\frac{df(t)}{dt} = r_0 \; ,$$

$$f(t) = f_0 + r_0(t - t_0) \; ;$$

Linear

Coeficiente:

- constante

$$\frac{df(t)}{dt} = r_0 \; ,$$

$$f(t) = f_0 + r_0(t - t_0) \; ;$$

- variável

função que depende do tempo

$$\frac{df(t)}{dt} = r_0(t) \; ,$$

complicações

NÃO TRÁS NOVIDADES

NOTHING NEW!!

Linear

Modelos
Que tratem 1 formação
novo!!

Coeficiente:

- constante

$$\frac{df(t)}{dt} = r_0 \ ,$$

$$f(t) = f_0 + r_0(t - t_0) \ ;$$

- variável

$$\frac{df(t)}{dt} = r_0(t) \ ,$$

$$f(t) = f_0 + \boxed{\int_{t_0}^{t} dt' r_0(t')}$$

$df = r_0(t')dt'$

$\int_{f_0}^{f(t)} df = \int_{t_0}^{t} dt' r_0(t')$

$f(t) - f_0$

Papel não pesa é o de uma constante

~~Linear~~: Gompertz Modelo

Exponencial

Para $f(t) = \ln[g(t)]$

Constante:

$$\frac{df(t)}{dt} = r_1 f(t)$$

O interesse é em $g(t) \to f(t)$

Linear: Gompertz

Para $f(t) = \ln[g(t)]$

Constante:

$$\frac{df(t)}{dt} = r_1 f(t) \quad \Longrightarrow \quad f(t) = f_0 \; e^{r_1(t-t_0)} \; ,$$

Linear: Gompertz

Para $f(t) = \ln[g(t)]$

Constante:

$$\frac{df(t)}{dt} = r_1 f(t) \quad \Longrightarrow \quad f(t) = f_0 \ e^{r_1(t-t_0)} \ ,$$

$$g(t) = e^{f(t)} = e^{f_0 e^{r_1(t-t_0)}} =$$

Linear: Gompertz

Para $f(t) = \ln[g(t)]$

Constante:

$$\frac{df(t)}{dt} = r_1 f(t) \quad \Longrightarrow \quad f(t) = f_0 \; e^{r_1(t-t_0)} \; ,$$

$$g(t) = e^{f(t)} = e^{f_0 e^{r_1(t-t_0)}} =$$

Variável:

$$\frac{df(t)}{dt} = r_1(t) f(t) \; ,$$

Linear: Gompertz

Para $f(t) = \ln[g(t)]$

Constante:

$$\frac{df(t)}{dt} = r_1 f(t) \quad \Longrightarrow \quad f(t) = f_0\ e^{r_1(t-t_0)} \ ,$$

$$g(t) = e^{f(t)} = e^{f_0 e^{r_1(t-t_0)}} =$$

Variável:

$$\frac{df(t)}{dt} = r_1(t) f(t) \ ,$$

$$f(t) = f_0\ e^{\int_{t_0}^{t} dt' r_1(t')} \ .$$

Para $r_(t) = \beta k t^{\beta-1}$, $f(t) = f_0 e^{t^\beta - t_0^\beta}$, que é a exponencial estendida.

Exponencial

Modelo Constante $\frac{df}{dt} = 0$ r_0

Linear

Constante $\frac{df}{dt} = r_0$

Coeficiente

Constante:

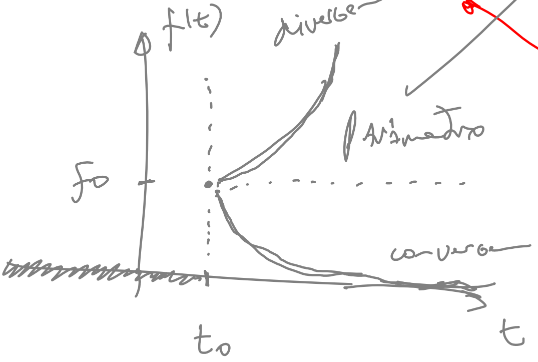
Modelo de Malthus

$$\frac{d\boxed{f(t)}}{dt} = r_1 \boxed{f(t)},$$

$f(t)$ Variável dependente

Parâmetro

Variável independente



$r_1 > 0$ crescimento

$r_1 = 0$ estacionário

$r_1 < 0$ decrescimento

Exponencial

$d \ln f = \frac{1}{f} dt$

Carta na manga da camisa !!!

Coeficiente ~~Constante:~~

$$\frac{df(t)}{dt} = r_1 f(t) ,$$

$$\boxed{f(t) = f_0 \, e^{r_1 (t-t_0)}} .$$

$\theta(t-t_0)$

$$\frac{df}{f} = r_1 dt$$

$$\int_{f_0}^{f(t)} d \ln f = \int_{t_0}^{t} dt' \, r_1(t')$$

$$\ln f(t) - \ln f_0 = r_1 (t - t_0)$$

$$\ln \frac{f(t)}{f_0} = r_1 (t-t_0)$$

$$\frac{f(t)}{f_0} = e^{r_1 (t-t_0)}$$

Exponencial

Coeficiente

Constante:

$$\frac{df(t)}{dt} = r_1 f(t) \, ,$$

$$f(t) = f_0 \, e^{r_1 (t - t_0)} \; ;$$

função da variável independente!!

Complicada de primeiro grau!!!

Variável:

$$\frac{df(t)}{dt} = \boxed{r_1(t)} f(t) \, ,$$

Exponencial $\Longleftrightarrow$ Algébrico

Coeficiente Constante:

Variável parâmetro

$$\frac{df(t)}{dt} = r_1 f(t)\ ,$$

$$f(t) = f_0\, e^{\overbrace{r_1(t-t_0)}^{\text{variável}}}\ ;$$

parâmetro

variável

parâmetro

a^x

x^1

$=$

Variável:

$e = 2{,}71\ldots$

Número de Euler

$$\frac{df(t)}{dt} = r_1(t) f(t)\ ,$$

$$f(t) = f_0\, e^{\overbrace{\int_{t_0}^{t} dt'\, r_1(t')}}\ .$$

crescer, estagnar, diminuir

Stretched exponential

Para $\boxed{r_(t) = \beta k t^{\boxed{\beta-1}}}$, $f(t) = f_0 e^{t^\beta - t_0^\beta}$, que é a exponencial estendida.

computador - simulações

Exponencial: equação de diferenças

Analítica !! realista ...

Coeficiente

Constante:

$$\frac{dx(t)}{dt} = rx(t)$$

Contagem medida não é feita continuamente

mas em intervalos de !!! tempo ...

Exponencial: equação de diferenças

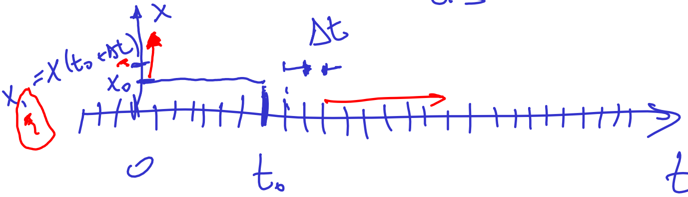
Coeficiente Discretizar significa desprezar o processo de limite

Constante:

$$\cancel{\lim_{\Delta t \to 0}} \frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t}$$

$$\frac{dx(t)}{dt} = rx(t) \quad \Longrightarrow \quad \frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t} = rx(t)$$

Δt = intervalo típico $\Leftarrow$ depende do sistema considerado!!!



(Variável independente)

Variável dependente $\Longrightarrow$ discreta!!!

Exponencial: equação de diferenças

Coeficiente

Constante:

Equação diferencial

Equação de diferenças

$$\boxed{\frac{dx(t)}{dt} = rx(t)} \implies \frac{\overbrace{x(t+\Delta t)}^{x_{n+1}} - \overbrace{x(t)}^{x_n}}{\Delta t} = r\overbrace{x(t)}^{x_n}$$

assim $\underbrace{x(t+\Delta t)}_{x_{n+1}} = \underbrace{(1+r\Delta t)}_{\kappa}\underbrace{x(t)}_{x_n}$. Perde-se a noção do que se passa no intervalo Δt.

Money!!!

Exponencial: equação de diferenças

$x_0 = 100$

$x_1 = 101$

$x_2 = (1,01)^2\, 100 = 102,01$

Coeficiente

$r = 0,01$

$\kappa = (1 + r.\Delta t) = 1,01$

Constante:

$$\frac{dx(t)}{dt} = rx(t) \implies \frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t} = rx(t)$$

assim $x(t+\Delta t) = \underbrace{(1 + r\Delta t)}_{\kappa} x(t)$. Perde-se a noção do que se passa no intervalo Δt. Chamando $x_i = x(i\Delta t)$, onde $i = 0, 1, 2, \ldots$.

parâmetro | variável

$x_n = F(x_{n-1})$

relação de recorrência!!

$$\underbrace{x_n = \kappa x_{n-1}} = \kappa^n x_0$$

composição de juros!!!

$F(x) = \kappa x$

com x_0 sendo o valor inicial.

$x_2 = F(x_1) = \kappa x_1 = \kappa^2 x_0$

Mapa: Linear

$x_1 = F(x_0) = \kappa x_0$

x Geométrico ⇒ exponencial

Exponencial: equação de diferenças

Algébricos lineares

Coeficiente

Constante:

É realista? Rendimento real é variável!!!...

$$\frac{dx(t)}{dt} = rx(t) \quad \Longrightarrow \quad \frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t} = rx(t)$$

assim $x(t+\Delta t) = \underbrace{(1 + r\Delta t)}_{\kappa} x(t)$. Perde-se a noção do que se passa no intervalo Δt. Chamando $x_i = x(i\Delta t)$, onde $i = 0, 1, 2, \ldots$.

Coef. constante

$$\boxed{x_n = \kappa x_{n-1} = \kappa^n x_0}$$

com x_0 sendo o valor inicial.

$\bar{k}^n$

$$\bar{k} = \left(\prod_{i=1}^{n} k_i\right)^{1/n}$$

Média Geométrica

≠ média aritmética!!

Variável:

$x(t+\Delta t) - x(t) = r(t)\Delta t\, x(t)$

$x_{n+1} = (1 + \underbrace{r_n \Delta t}_{k_n}) x_n = k_n \ldots k_2 k_1 x_0$

$$\boxed{x_n = \prod_{i=1}^{n} \kappa_i x_0}$$

Exponencial + Linear

Coeficientes:

Constante:

$$\boxed{\frac{df(t)}{dt} = r_1 f(t) + r_0}$$

Exponencial + Linear

sintonia fina para deixar $\frac{df}{dt} = 0$

Coeficientes:

Constante:

Solução

$$\frac{df(t)}{dt} = r_1 f(t) + r_0 \quad \Longrightarrow \quad f(t) = \left(f_0 + \frac{r_1}{r_0}\right)\boxed{e^{r_1(t-t_0)}} - \frac{r_1}{r_0},$$

exponencial domina

Variável dependente = parâmetro

variável ind.

protagonista

Exponencial + Linear

Coeficientes:

Constante:

$$\frac{df(t)}{dt} = r_1 f(t) + r_0 \quad \Longrightarrow \quad f(t) = \left(f_0 + \frac{r_1}{r_0} \right) e^{r_1(t-t_0)} - \frac{r_1}{r_0} \; ,$$

Um Constante e Um Variável:

$$\frac{df(t)}{dt} = r_1 f(t) + r_0(t)$$

Exponencial + Linear

Coeficientes:

Constante:

$$\frac{df(t)}{dt} = r_1 f(t) + r_0 \quad \Longrightarrow \quad f(t) = \left(f_0 + \frac{r_1}{r_0} \right) e^{r_1(t-t_0)} - \frac{r_1}{r_0} \, ,$$

NADA de NOVO !!! só

Um Constante e Um Variável:

Complicação

$$\frac{df(t)}{dt} = r_1 f(t) + r_0(t) \quad \Longrightarrow \quad f(t) = e^{r_1 t}[f_0 e^{-r_1 t_0} + \int_{t_0}^{t} dt' e^{-r_1 t'} r_0(t')] \, .$$

Exponencial + Linear

Coeficientes:

Constante:

$$\frac{df(t)}{dt} = r_1 f(t) + r_0 \quad \Longrightarrow \quad f(t) = \left(f_0 + \frac{r_1}{r_0}\right) e^{r_1(t-t_0)} - \frac{r_1}{r_0} \ ,$$

Um Constante e Um Variável:

$$\frac{df(t)}{dt} = r_1 f(t) + r_0(t) \quad \Longrightarrow \quad f(t) = e^{r_1 t}[f_0 e^{-r_1 t_0} + \int_{t_0}^{t} dt' e^{-r_1 t'} r_0(t')] \ .$$

Variáveis:

$$\frac{df(t)}{dt} = r_1(t) f(t) + r_0(t)$$

Exponencial + Linear

Coeficientes:

Constante:

$$\frac{df(t)}{dt} = r_1 f(t) + r_0 \quad \Longrightarrow \quad f(t) = \left(f_0 + \frac{r_1}{r_0}\right) e^{r_1(t-t_0)} - \frac{r_1}{r_0} \ ,$$

Um Constante e Um Variável:

$$\frac{df(t)}{dt} = r_1 f(t) + r_0(t) \quad \Longrightarrow \quad f(t) = e^{r_1 t}[f_0 e^{-r_1 t_0} + \int_{t_0}^{t} dt' e^{-r_1 t'} r_0(t')] \ .$$

Variáveis:

$$\frac{df(t)}{dt} = r_1(t) f(t) + r_0(t) \quad \Longrightarrow \quad f(t) = g[r_1(t)][f_0 + \int_{t_0}^{t} dt' g[-r_1(t')] r_0(t')] \ .$$

Exponencial + Linear

Coeficientes:

Constante:

$$\frac{df(t)}{dt} = r_1 f(t) + r_0 \quad \Longrightarrow \quad f(t) = \left(f_0 + \frac{r_1}{r_0}\right) e^{r_1(t-t_0)} - \frac{r_1}{r_0}\ ,$$

Um Constante e Um Variável:

$$\frac{df(t)}{dt} = r_1 f(t) + r_0(t) \quad \Longrightarrow \quad f(t) = e^{r_1 t}[f_0 e^{-r_1 t_0} + \int_{t_0}^{t} dt' e^{-r_1 t'} r_0(t')]\ .$$

Variáveis:

$$\frac{df(t)}{dt} = r_1(t) f(t) + r_0(t) \quad \Longrightarrow \quad f(t) = g[r_1(t)][f_0 + \int_{t_0}^{t} dt' g[-r_1(t')] r_0(t')]\ .$$

$$g[r(t)] = e^{\int_{t_0}^{t} dt'' r(t'')}$$

VARIÁVEL

parâmetro

(EXP!!)