SME 141
Assunto: Álgebra Linear
Aula AL-4 – Espaços vetoriais e subespaços (30 min)

Prof. Miguel Frasson

Setembro de 2020

Espaços vetoriais

- Vimos o $\mathbb{R}^n$ e suas propriedades com respeito à soma e produto por escalar.
- Hoje veremos que muitos outros conjuntos satisfazem as mesmas propriedades, e portanto paar eles valem inúmeras propriedades que já estamos familiarizados.
- Dizemos que esses espaços são espaços vetoriais.
- Daremos diversos exemplos desses espaços.

Definição dos espaços vetoriais

Um conjunto não vazio V é um espaço vetorial com escalares num corpo como $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ ou outro, quando nele estão definidas duas operações — a soma e o produto por escalar — satisfazendo:
$(\forall x, y, z \in V, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R})$

EV1 $x + (y + z) = (x + y) + z$

EV2 $x + y = y + x$

EV3 existe um *elemento neutro* da soma, denotado 0: $x + 0 = x$

EV4 para $x \in V$ existe um *elemento oposto*, denotado $-x$: $x + (-x) = 0$

EV5 $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$

EV6 $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$

EV7 $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$

EV8 $1x = x$

Exemplos: $\mathbb{R}^n$, $M_{m\times n}(\mathbb{R})$

- $V = \mathbb{R}$ é um espaço vetorial, pelas propriedades dos números reais.
- $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$, $\mathbb{R}^n$ são espaços vetoriais. Se $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$,
  - Soma: $x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n)$
  - Produto por escalar: $\alpha x = (\alpha x_1, \alpha x_2, \ldots, \alpha x_n)$
- O conjunto das matrizes $m \times n$ com entradas reais $M_{m\times n}(\mathbb{R})$ é espaço vetorial.

Exemplos: $C(I, \mathbb{R})$

- Se I é um intervalo, $C(I, \mathbb{R})$, o conjunto das funções contínuas $f : I \to \mathbb{R}$ é espaço vetorial. Dadas $f, g \in C(I, \mathbb{R})$, definimos as funções $f + g$ e αf $(\alpha \in \mathbb{R})$:
  - Soma: $(f + g)(x) = f(x) + g(x), \forall x \in I$
  - Produto por escalar: $(\alpha f)(x) = \alpha f(x)$

Exemplos com $\mathbb{Z}$

- $\mathbb{Z}$ não é espaço vetorial com escalares em $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{Q}$:
  Para $\alpha = \frac{1}{2}$, $\alpha x \notin \mathbb{Z}$ não está definido para $x = 1 \in \mathbb{Z}$.
- $\mathbb{Z}$ com escalares em $\mathbb{Z}_2 = \{0, 1\}$ e operações usuais é espaço vetorial?
  - EV1 até EV4 são propriedades dos inteiros.
  - Produto por escalar: $0x = 0 \in \mathbb{Z}$, $1x = x$
  - Verificando EV5:
    - $\alpha = 0$: $\alpha(\beta x) = 0(\beta x) = 0 = 0x = (0\beta)x$
    - $\alpha = 1$: $\alpha(\beta x) = 1(\beta x) = \beta x = (1\beta)x$
  - Verificando EV6:
    - se $\alpha = 1$, $\beta = 1$:
    - $(\alpha + \beta)x = (\underbrace{1 + 1}_{=0})x = 0x = 0$
    - $1x + 1x = x + x = 2x \neq 0$ se $x \neq 0$.
  - EV6 não está satisfeita!
  - $\mathbb{Z}$ com escalares em $\mathbb{Z}_2$ não é espaço vetorial.

Algumas propriedades derivadas da principais

Diferença

Definimos a diferença $u - v$ por:

$$u - v = u + (-v)$$

De fato, dado $v \in V$, $-v \in V$ existe por EV4.

Equações lineares sempre têm solução

Dados $\gamma \in \mathbb{R}$, $\gamma \neq 0$ $a, b \in V$, a equação linear (com variável $x \in V$)

$$\gamma x + a = b$$

tem solução

$$x = \gamma^{-1}(b - a)$$

De fato:

$$\begin{aligned}
\gamma x + a = b &\implies (\gamma x + a) + (-a) = b + (-a) && \text{(EV4)}\\
&\implies \gamma x + (a + -a) = b - a && \text{(EV1)}\\
&\implies \gamma x + 0 = b - a && \text{(EV4)}\\
&\implies \gamma x = b - a && \text{(EV3)}\\
&\implies \gamma^{-1}(\gamma x) = \gamma^{-1}(b - a) && (\gamma^{-1} \text{ existe})\\
&\implies (\gamma^{-1}\gamma)x = \gamma^{-1}(b - a) && \text{(EV5)}\\
&\implies 1x = \gamma^{-1}(b - a) && \text{(EV5)}\\
&\implies x = \gamma^{-1}(b - a) && \text{(EV8)}
\end{aligned}$$

$0x$, $\alpha 0$

- $0x = 0$
  De fato,

$$
\begin{aligned}
0x &= (0+0)x && (\text{em } \mathbb{R}:\ 0 = 0+0)\\
&= 0x + 0x && (\text{EV6})\\
&\implies 0x + (-0x) = (0x+0x) + (-0x) && (\text{EV4})\\
&\implies 0x + -0x = 0x + (0x + -0x) && (\text{EV1})\\
&\implies 0 = 0x + 0 && (\text{EV4})\\
&\implies 0 = 0x && (\text{EV3})
\end{aligned}
$$

- Tente mostrar que $\alpha 0 = 0$ usando as propriedades.

Se $\alpha x = 0$, então $\alpha = 0$ ou $x = 0$

De fato, se $\alpha x = 0$ e $\alpha \neq 0$, x é solução da equação linear

$$\alpha x + 0 = 0 \implies x = \alpha^{-1}(0 - 0) = \alpha^{-1} 0 = 0.$$

- Note que o produto aqui é produto por escalar
- Isso não vale com qualquer produto, por exemplo produto de matrizes:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{\neq 0} \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{\neq 0} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{= 0}$$

Subespaços vetoriais

- Verificar que um conjunto é espaço vetorial demanda verificar 8 propriedades.
- Isso pode-se reduzir para 2 ou 3 propriedades se o "candidato" é subconjunto de um espaço vetorial.
- Chamamos esses subconjuntos de subespaços vetoriais.

Subespaços vetoriais

Subespaços vetoriais

Um subconjunto U de um espaço vetorial V é também um espaço vetorial se

- $0 \in U$
- $u, v \in U \implies u + v \in U$ (U é fechado para a soma)
- $u \in U, \alpha \in \mathbb{R} \implies \alpha u \in U$ (" para o prod. escalar)

Exemplo: $U = \{(x, y) : ax + by = 0\}$ em $\mathbb{R}^2$

$V = \mathbb{R}^2$, sejam $a, b \in \mathbb{R}$. $U = \{(x, y) : ax + by = 0\}$ é subespaço.

- $(0, 0) \in U$ pois $a0 + b0 = 0$.
- Se $u = (u_1, u_2)$ e $v = (v_1, v_2)$ pertencem a U,

$$au_1 + bu_2 = 0, \quad av_1 + bv_2 = 0$$

  $u + v = (u_1 + v_1, u_2 + v_2) \in U$:

  $a(u_1 + v_1) + b(u_2 + v_2) = (au_1 + bu_2) + (av_1 + bv_2) = 0 + 0 = 0.$

- $\alpha u = (\alpha u_1, \alpha u_2) \in U$:

$$a(\alpha u_1) + b(\alpha u_2) = \alpha(au_1 + bu_2) = \alpha 0 = 0.$$

Exemplo: 1º quadrante em $\mathbb{R}^2$ não é!

$U = \{(x, y) : x \geqslant 0, y \geqslant 0\} \subset \mathbb{R}^2$:

- $(0, 0) \in U$
- U é fechado para a soma
- mas não é fechado para o produto por escalar:

$$-1 \in \mathbb{R}, (1, 1) \in U \text{ mas } -1(1, 1) = (-1, -1) \notin U.$$

Subespaços de $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$

Em $\mathbb{R}^2$ todos os possíveis subespaços são:

- $\{(0,0)\}$
- Retas que passom pela origem
- $\mathbb{R}^2$

Em $\mathbb{R}^3$ todos os possíveis subespaços são:

- $\{(0,0,0)\}$
- Retas que passom pela origem:
  dado $u \neq 0$ em $\mathbb{R}^3$, $\{\alpha u : \alpha \in \mathbb{R}\}$
- Planos que passam pela origem:
  dado $u \neq 0$ em $\mathbb{R}^3$, $\{v : v \cdot u = 0\}$
- $\mathbb{R}^3$

Exemplo: funções pares ou ímpares

Seja $V = C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $P = \{f \in V : f(x) = f(-x)\}$, $I = \{f \in V : f(-x) = -f(x)\}$ são subespaços vetoriais:

- a função 0 é função par e ímpar
- soma de funções pares é par

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) = f(-x) + g(-x) = (f+g)(-x).$$

- múltiplo de função par é par

$$(\alpha f)(x) = \alpha f(x) = \alpha f(-x) = (\alpha f)(-x)$$

- analogamente para funções ímpares (exercício)