TEORIA DOS CONJUNTOS - LISTA 1

1. Pertence, contido e conjuntos das partes

1. Escreva explicitamente os seguintes conjuntos:
(a) $\{2n+1 : n \in \mathbb{N},\ 1 \leq n < 9\}$; (b) $\{2r : r \in \mathbb{R}\}$;
(c) $\{rq : r \in \mathbb{R} \text{ e } q \in \mathbb{Q}\}$; (d) $\{\frac{n}{m} : n, m \in \mathbb{N}, m \neq 0\}$; (e) $\{i : i \in \{j\}\}$.

2. Certo ou errado? Mostre ou dê um contra-exemplo:
(a) $A \neq B$ e $B \neq C \to A \neq C$; (b) $A \subset B$ e $B \not\subset C \to A \not\subset C$;
(c) $x \in B$ e $B \in C \to x \in C$; (d) $A \in B$ e $B \not\subset C \to A \notin C$.

3. Diga se é V ou F:
(a) Se $A = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$, então: (i) $\{\emptyset\} \subset A$; (ii) $\emptyset \in A$; (iii) $\{\{\emptyset\}\} \subset A$; (iv) $\emptyset \subset A$;
(a') as mesmas perguntas de (a) mas para $A = \{\emptyset\}$;
(b) $a \in \{\{a\}\}$; (c) $\{a, b\} \subset \{\{a\}, \{b\}\}$;
(d) $\{x\} \in \{\{x\}, x\}$; (e) $\{x\} \subset \{\{x\}, x\}$.

4. Os conjuntos A, B e C são tais que $A \subset B$ e $B \subset C$; além disso, $a \in A$, $b \in B$, $c \in C$, $d \notin A$, $e \notin B$ e $f \notin C$. Dizer quais das seguintes sentenças são sempre verdadeiras:
(a) $a \in C$; (b) $b \in A$; (c) $c \notin A$; (d) $d \in B$; (e) $e \notin A$; (f) $f \notin A$.

5. Sejam A, B e C conjuntos quaisquer. Mostre que se $A \subset B$, $B \subset C$ e $C \subset A$ então $A = B$, $B = C$ e $C = A$.

6. Escreva explicitamente o conjunto $\mathcal{P}(X)$, onde X é:
(a) $X = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$; (b) $X = \{3, \{1, 4\}\}$;
(c) $X = \{a, \{a\}, \{a, \{a\}\}\}$; (d) $X = \mathcal{P}(\{a\})$;
(e) $X = \mathcal{P}(\{a, b\})$.

7. Diga se é V ou F, justificando (mostre quando for pertinente):
(a) $\{x\} \in \mathcal{P}(X) \leftrightarrow \{x\} \subset X$; (b) $\{x\} \in \mathcal{P}(X) \leftrightarrow x \subset X$;
(c) $\{\{a\}, \{a, b\}\} \in \mathcal{P}(\{a, b\})$; (d) $\{\{a\}, \{a, b\}\} \subset \mathcal{P}(\{a, b\})$;
(e) $\{a, b\} \subset \mathcal{P}(\{a, b\})$; (f) $\{a, b\} \in \mathcal{P}(\{a, b\})$;
(g) $\{\{a, b\}\} \subset \mathcal{P}(\{a, b\})$; (h) $\{\{a, b\}\} \in \mathcal{P}(\{a, b\})$;
(i) $\{2, 3, 4, 5\} \in \mathcal{P}(\{n \in \mathbb{N} : n \text{ é par }\})$.

8. Escreva explicitamente os conjuntos:
(a) $\{X \in \mathcal{P}(\mathbb{N}) : X \in \mathcal{P}(\{1, 2, 3\}) \text{ e } X \in \mathcal{P}(\{2, 5\})\}$;
(b) $\{X \in \mathcal{P}(\mathbb{N}) : X \in \mathcal{P}(\{1, 3, 8\}) \text{ e } 8 \in X\}$.

2. Operações entre conjuntos

9. Sejam A e B dois conjuntos. Mostre que:
(a) $A \cap B = A$ e $A \cup B = A$ se e só se $A = B$; (b) $A \setminus B = (A \cup B) \setminus B = A \setminus (A \cap B)$;
(c) $A \cap B = A \setminus (A \setminus B)$; (d) $A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \cup (A \cap C)$

10. Se $A \subset B$ e $C \subset D$ são conjuntos, mostre que:
(a) $A \cap C \subset B \cap D$; (b) $A \cup C \subset B \cup D$

11. Mostre ou dê um contra-exemplo:
(a) $(A \cup B) \setminus C = A \cup (B \setminus C)$ (b) $A \cap B \cap C = A \cap B \cap (C \cup B)$
(c) $A \cup B = A \cup C$ implica que $B = C$ (d) $B \cap C \subset A$ implica que $B \subset A$ ou $C \subset A$
(e) $B \cup C \subset A$ se e só se $B \subset A$ e $C \subset A$

12. Sejam A, e B dois conjuntos. Mostre ou dê um contra-exemplo:
(a) $\mathcal{P}(A \cap B) = \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$ (b) $\mathcal{P}(A \cup B) = \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$

13. Preencha as lacunas na demonstração do seguinte resultado:
Teorema. Sejam A e B subconjuntos de um conjunto X. Então:

$$A \cap (X \setminus B) = A \setminus B.$$

Demonstração. Segundo a definição de igualdade de conjuntos, devemos mostrar que

$$\forall x (x \in A \cap (X \setminus B) \leftrightarrow x \in A \setminus B).$$

Mostremos primeiramente que $x \in A \cap (X \setminus B)$ implica que $x \in A \setminus B$. Se $x \in A \cap (X \setminus B)$, então $x \in A$ e $x \in$ ______, pela definição de intersecção. Mas $x \in X \setminus B$ significa que $x \in X$ e ________. Como $x \in A$ e $x \notin B$, temos que $x \in$ ______, como queríamos. Logo, $A \cap (X \setminus B) \subset A \setminus B$.

Reciprocamente, precisamos mostrar que ______ $\subset$ ______. Se ________, então $x \in A$ e $x \notin B$. Como $A \subset X$, temos que $x \in$ ______. Logo, $x \in X$ e $x \notin B$ e, assim, ________. Mas então, ________ e $x \in X \setminus B$ e daí, $x \in A \cap (X \setminus B)$. Portanto, $A \setminus B \subset A \cap (X \setminus B)$. □

14. Se A e B são dois conjuntos, a *diferença simétrica* entre A e B é o conjunto $A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$. Mostre que:
(a) $A \triangle B = B \triangle A$ (b) $(A \triangle B) \triangle C = A \triangle (B \triangle C)$
(c) $A \triangle B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$ (d) $A = B$ se e só se $A \triangle B = \emptyset$

15. Dados os conjuntos $A_1 = \{1, 10\}$, $A_2 = \{2, 4, 6, 10\}$, $A_3 = \{3, 6, 9\}$, $A_4 = \{4, 8\}$, $A_5 = \{5, 6, 10\}$. Calcule:
(a) $\bigcap_{i \in I} A_i$ e $\bigcup_{i \in I} A_i$, sendo $I = \{1, 2, 3, 4, 5\}$
(b) $\bigcap_{i \in I} A_i$ e $\bigcup_{i \in I} A_i$, sendo $I = \{2, 3, 5\}$

16. Em cada item abaixo, diga quem é $\bigcup \mathcal{C}$ e $\bigcap \mathcal{C}$ (os intervalos são tomados em $\mathbb{R}$):
(a) $\mathcal{C} = \{[-n, n] : n \in \mathbb{N}, n \neq 0\}$
(b) $\mathcal{C} = \{]-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}[: n \in \mathbb{N}, n \neq 0\}$
(c) $\mathcal{C} = \{]-1 + \frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n}[: n \in \mathbb{N}, n \neq 0\}$
(d) $\mathcal{C} = \{]a, b[: a, b \in \mathbb{Q}, a < b\}$
(e) $\mathcal{C} = \{[r, +\infty[: r \in \mathbb{R}\}$
(f) $\mathcal{C} = \{A_n : n \in P\}$, onde $A_n = \{x : x$ é um múltiplo de $n\}$ e P é o conjunto dos números primos

17. Dados $A = \{x \in \mathcal{P}(\mathbb{N}) : 2 \in x\} \cup \{x \in \mathcal{P}(\mathbb{N}) : 3 \in x\}$ e $B = \{x \in \mathcal{P}(\mathbb{N}) :$ pelo menos um divisor de 6 pertence a $x\}$.
(a) Mostre que se $\{x_i : i \in I\}$ é uma família qualquer de elementos de A, então $\bigcup \{x_i : i \in I\}$ é um elemento de A. O mesmo vale para a intersecção?
(b) Determine $A \cup B$ e $A \cap B$.

18. Sejam X um conjunto qualquer e $a, b \in X$, $a \neq b$. Defina $\mathcal{C} = \{A \subset X : a \in A\} \cup \{B \subset X : b \notin B\}$. Mostre que se $\mathcal{D}$ é uma coleção qualquer de elementos de $\mathcal{C}$ então $\bigcup \mathcal{D} \in \mathcal{C}$. O mesmo vale para a intersecção?