PQI5776- Fenômenos de Transporte I

AULA 1- Parte 1 - Equações de Conservação e Fenômenos de Transporte

As equações utilizadas em engenharia obedecem a uma LINGUAGEM unificada baseada em **equações de conservação.** Referem-se sempre a alguma propriedade **extensiva**, genericamente designada por Φ e/ou à correspondente propriedade especifica φ = $\underline{\Phi}$ = $\partial\Phi/\partial m$. Como exemplos:

propriedade	Φ	unidades	φ	unidades
carga elétrica	Σ	C	ε	C/kg
entropia	S	J/K	s	J/(K.kg)
massa de um constituinte i	m_i	kg de i	ω_i	kgi/kg
massa total	$m = \sum m_i$	kg	1	-
quantidade de movimento	$m\vec{v}$	kg.m/s	$\vec{v}$	m/s
momentum angular	$m\vec{r}\times\vec{v}$	kg.m^2/s	$\vec{r}\times\vec{v}$	m^2/s
energia cinética	E_c	J	e_c	J/kg
energia potencial	E_P	J	e_P	J/kg
energia interna	U	J	u	J/kg
energia mecânica	$E_M = E_C + E_P$	J	e_M	J/kg
energia total	$E = E_M + U$	J	e	J/kg

As equações de conservação correspondem a uma contabilidade {balanço} da propriedade em um **Volume de controle** cujas fronteiras podem ser fechadas, abertas ou permeáveis à propriedade Φ considerada. Cada equação de conservação relaciona a **variação** da propriedade Φ no volume de controle com a soma das taxas de **transporte** e de **produção.**

Variação = Transportes + Produções

$$\frac{d\Phi}{dt} = \sum \dot{\Phi}_T + \sum \dot{\Phi}_P \qquad [1]$$

Os termos de variação são típicos da contabilização da propriedade Φ no volume de controle $\forall$ e normalmente podem ser quantificados conhecendo-se as condições iniciais do problema.

Os termos de produção tem equações específicas, normalmente derivadas de ***leis físicas***, para cada caso e propriedades estudados.

Os termos de transporte podem ser decompostos em fluxos de entrada e saída [CONVECÇÃO] e fluxos de transferência [DIFUSÃO] representados em função de vetores difusivos:

$$\sum \dot{\Phi}_T = \int_{\$} \rho\, \varphi\, \vec{v}_\Phi \,.\, d\vec{\$} = \int_{\$_{Conv}} \rho\, \vec{v}\, \varphi \,.\, d\vec{\$} + \int_{\$_{Dif}} \vec{j}_\Phi \,.\, d\vec{\$} \qquad [2]$$

transportes = (entradas - saídas)convectivas + transferências difusivas

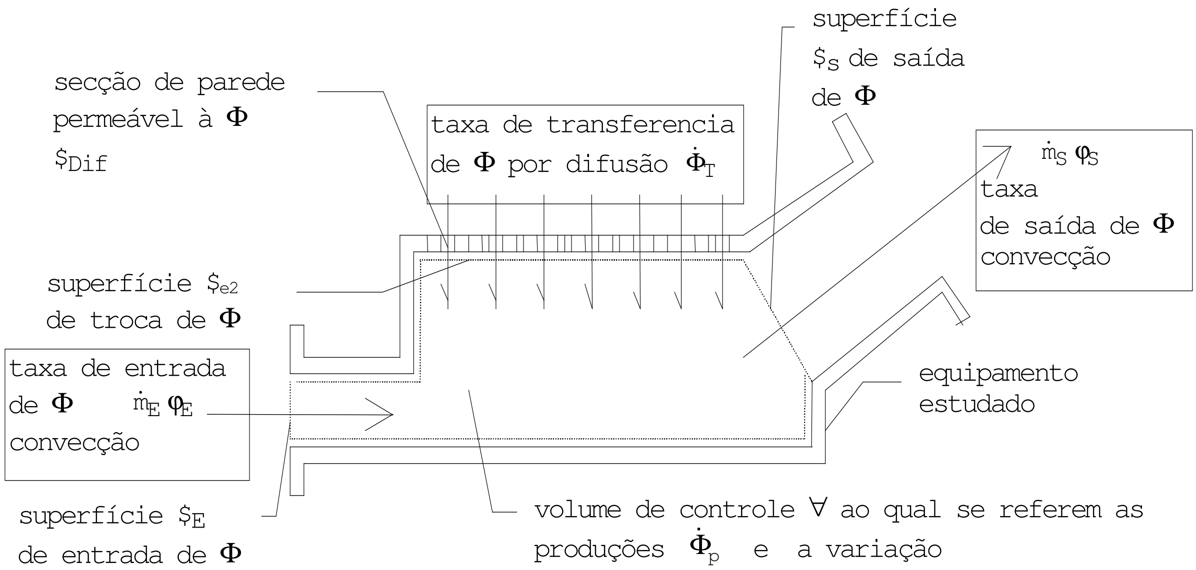
$$\sum \dot{\Phi}_T = \sum \dot{m}_E\, \overline{\varphi_E} - \sum \dot{m}_S\, \overline{\varphi_S} + \sum \dot{\Phi}_D \qquad [3]$$

Os termos de entrada e saída normalmente podem ser quantificados conhecendo-se as condições de contorno do problema. Resumindo:

Variação = Entradas - Saídas + Difusões + Produções

$$\boxed{\frac{d\Phi}{dt} = \sum \dot{m}_E\, \overline{\varphi_E} - \sum \dot{m}_S\, \overline{\varphi_S} + \sum \dot{\Phi}_D + \sum \dot{\Phi}_P} \qquad [4]$$

Na figura abaixo ilustra-se um equipamento com escoamento monofásico:



fluxos ***convectivos***: o transporte da propriedade decorre de um fluxo material global que a carrega. Neste caso as superficies $\$_E$ e $\$_S$ são fronteiras com uma região do equipamento na qual não existem paredes.

fluxos ***difusivos***: o transporte da propriedade decorre de um fluxo exclusivo da propriedade considerada. Neste caso as superficies $\$_D$ são fronteiras com uma região do equipamento na qual existem paredes sólidas mas que tenham qualidades de permeabilidade à propriedade considerada.

taxas de ***produção***: correspondem à criação (>0) ou destruição (<0) da propriedade em todo o volume de controle considerado.

Sempre que uma propriedade considerada variar dentro de um volume de controle torna-se necessário aplicar o balanço **microscópico** (diferencial no espaço também):

Variação temporal = [Entrada - Saída] + Transferência + Produção

$$\underbrace{\rho \frac{D\varphi}{Dt}}_{\text{Lagrange}} = \underbrace{\frac{\partial \rho\varphi}{\partial t}}_{\text{Euler}} + \underbrace{\operatorname{div} \rho\vec{v}\varphi}_{\text{convecção}} = \underbrace{-\operatorname{div} \vec{j}_{\Phi}}_{\text{difusão}} + \underbrace{\dot{\sigma}_{\forall\Phi}}_{\text{produção}} \qquad [6]$$

A equação que relaciona as obsevações Euleriana e Lagrangeana é:

$$\frac{D\varphi}{Dt} = \frac{\partial\varphi}{\partial t} + \vec{v}.\mathrm{gr}\vec{a}\mathrm{d}\ \varphi \qquad [7]$$

<u>Derivadas no tempo:</u>

- Parcial: $\left(\frac{\partial \varphi}{\partial t}\right)_{\vec{r}}$ - Observação de Euler - Variação local (posição fixa no espaço) da propriedade φ com o tempo.
- Total: $\left(\frac{d\varphi}{dt}\right) = \frac{\partial\varphi}{\partial t} + \vec{w}.\mathrm{gr}\vec{a}\mathrm{d}\varphi$ - Variação total da propriedade φ com o tempo, onde **w** é a velocidade da observação.
- Substantiva: $\left(\frac{D\varphi}{Dt}\right) = \frac{\partial\varphi}{\partial t} + \vec{v}.\mathrm{gr}\vec{a}\mathrm{d}\varphi$ - Observação de Lagrange - Caso particular da derivada total, na qual **w = v.** A observação acompanha o escoamento de velocidade v.

<u>TERMODINÂMICA DOS PROCESSOS IRREVERSÍVEIS LINEARES</u>

O estudo dos **fenômenos de transferência** necessita de equações constitutivas para os termos de transferência. Baseado nas equações da Termodinâmica uma infinidade de modelos consistentes podem ser propostos, por exemplo:

$$\vec{j}_{\Phi} = \sum_{\Psi} \left\{ \vec{\vec{L}}_{\Phi\Psi} \,.\, \left(\mathrm{gr}\vec{a}\mathrm{d}\ \mu_{\Psi}\right)^{n} + \vec{\vec{K}}_{\Phi\Psi} \,.\, \left(\mathrm{gr}\dot{\vec{a}}\mathrm{d}\ \mu_{\Psi}\right)^{m} + \ldots \right\} \qquad [8]$$

A **<u>TERMODINÂMICA DOS PROCESSOS IRREVERSÍVEIS LINEARES</u>** considera genericamente um modelo **linear, estático, homogêneo e isotrópico (escalar)**:

$$\vec{j}_{\Phi} = \sum_{\Psi} L_{\Phi\Psi}\ \mathrm{gr}\vec{a}\mathrm{d}\ \mu_{\Psi} \qquad [9]$$

A **<u>TEORIA DOS FENÔMENOS DE TRANSPORTE</u>** é ainda mais restrita e admite genericamente um modelo linear, estático, homogêneo e isotrópico (escalar) e **desacoplado:**

$$\vec{j}_{\Phi} = -\rho\,\lambda_{\Phi}\,\mathrm{gr\vec{a}d}\;\mu_{\Phi} \qquad [10]$$

onde μ_{Φ} é o potencial da grandeza Φ.

φ	$\vec{j}_{\Phi} = -\rho\,\lambda_{\Phi}\,\mathrm{gr\vec{a}d}\;\mu_{\Phi}$	Modelo ["Lei"]	difusividade λ_{Φ} [m^2/s]
ω_i	$\vec{j}_i = -\rho D_i\,\mathrm{gr\vec{a}d}\,\omega_i$	Fick (simplificado)	D_i
1	$\sum_i \vec{j}_i = 0$	Definição de Difusão mássica	-
ε	$\vec{j}_{\Sigma} = -\dfrac{1}{\rho_{\Sigma}}\,\mathrm{gr\vec{a}d}\,\mu_{\Sigma}$	Ohm	$(\rho_{\Sigma}.\rho)^{-1}$
s	$\vec{j}_S = -\rho\alpha\dfrac{\mathrm{gr\vec{a}d}\,c_p T}{T} = \dfrac{\vec{q}}{T}$	Fourier	$\alpha = k/(\rho.c_p)$
$\vec{v}$	$\vec{\vec{\tau}} = -\rho\nu\,\mathrm{gr\vec{a}d}\,\vec{v}$	Newton	$\nu = \mu/\rho$

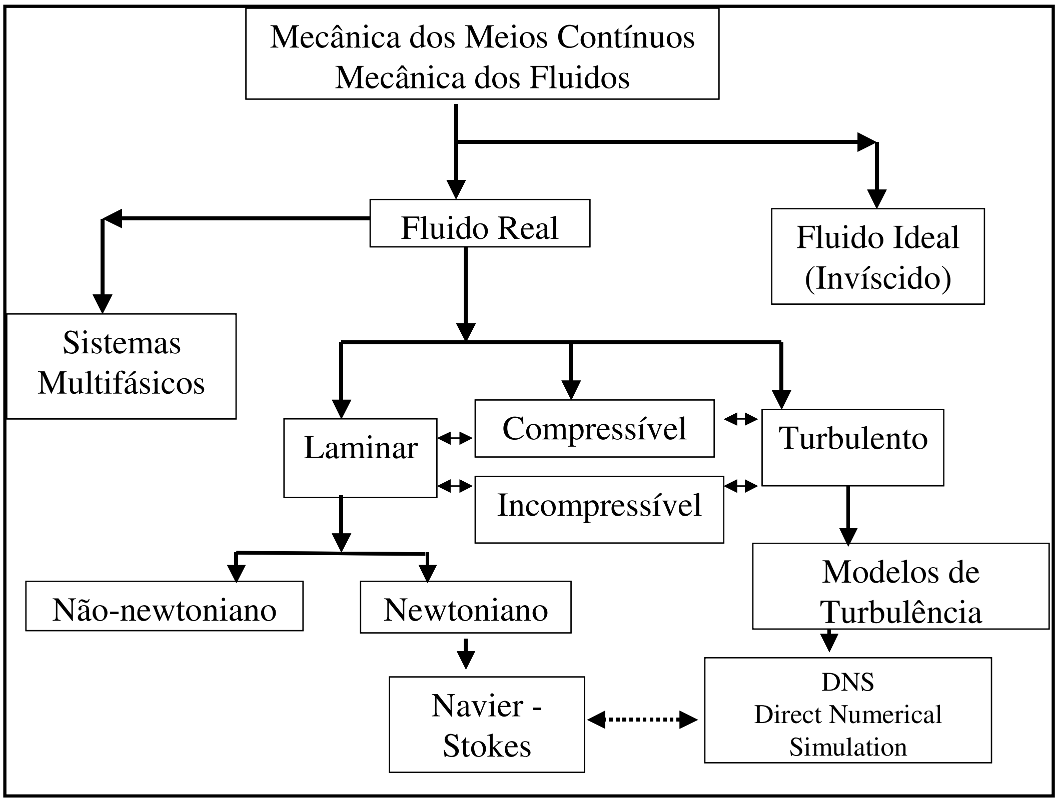
Apesar de serem denominados de Leis, esses modelos são muito simplificados e não consideram fenômenos de acoplamento bastante importantes e conhecidos tais como os efeitos Peltier, Seebeck, Dufour, Soret, entre muitos outros. Apesar disto o domínio de aplicação destes modelos é ainda muito grande e dessa forma, neste curso, eles serão adotados de forma absoluta.

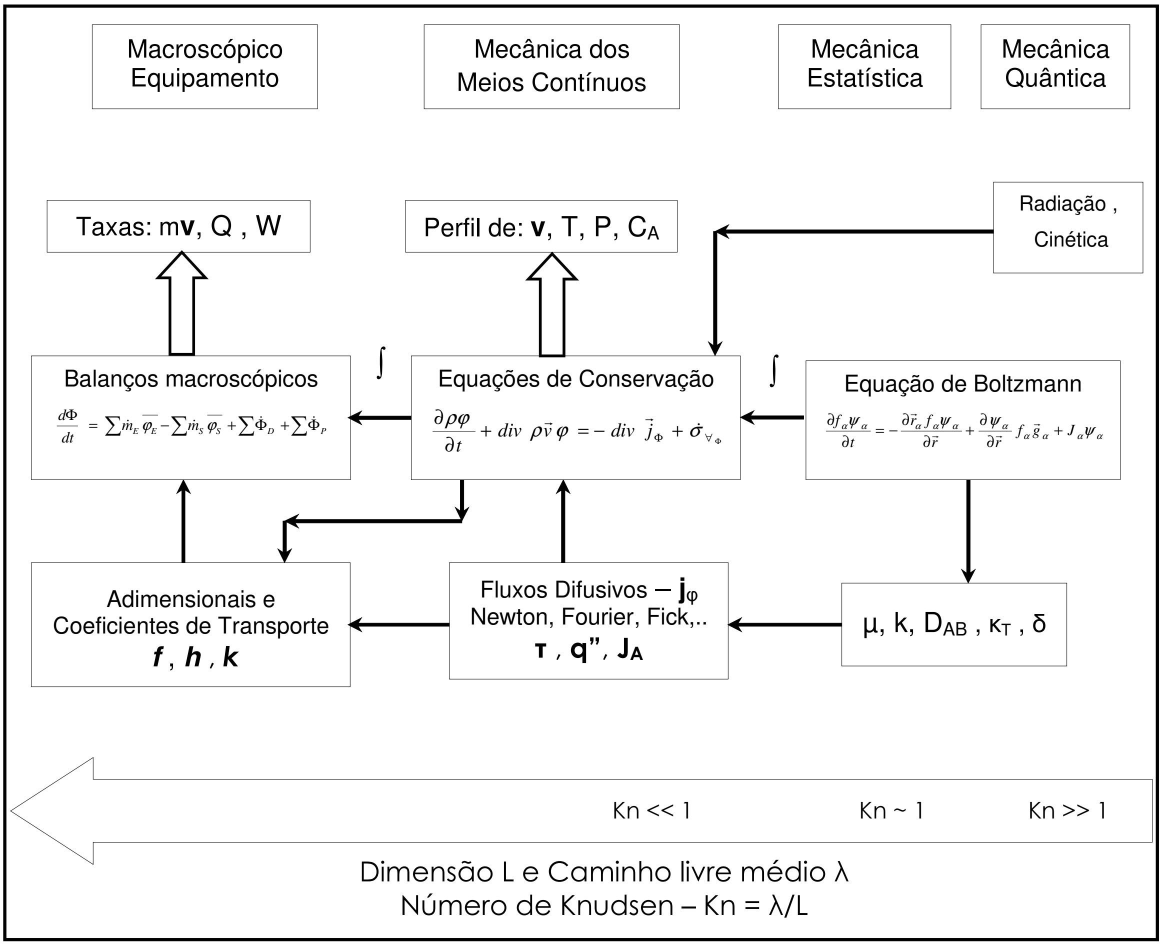
Aplicando [10] em [6] e admitindo-se $\mu_{\Phi} = \varphi$, tem-se:

$$\rho\frac{D\varphi}{Dt} = \frac{\partial\rho\varphi}{\partial t} + \mathrm{div}\,\rho\vec{v}\varphi = -\mathrm{div}\left[-\rho\lambda_{\Phi}\;\mathrm{gr\vec{a}d}\,\varphi\right] + \dot{\sigma}_{\forall_{\Phi}} \qquad [11]$$

admitindo-se $\mathrm{gr\vec{a}d}\,\varphi.\mathrm{gr\vec{a}d}\left(\rho\,\lambda_{\Phi}\right) = 0$, obtém-se a forma mais simplificada de Equacionamento dos Fenômenos de Transporte:

$$\underbrace{\frac{D\varphi}{Dt}}_{\substack{\text{variação}\\ \text{Lagrangeana}}} = \underbrace{\frac{\partial\varphi}{\partial t}}_{\substack{\text{variação}\\ \text{Euleriana}}} + \underbrace{\vec{v}.\mathrm{gr\vec{a}d}\,\varphi}_{\text{convecção}} = \underbrace{\lambda_{\Phi}\,\nabla^2\varphi}_{\text{difusão}} + \underbrace{\dot{\sigma}_{m_{\Phi}}}_{\text{produção}} \qquad [12]$$





BIBLIOGRAFIA:

Bird, R.B., Stewart, W.E., Lighfoot, E.N., Transport Phenomena, 2 ed, Wiley, 2002.

PQI5776 – Fenômenos de Transporte I – AULA 1– Parte 2

Operações Vetoriais e fatores de escala

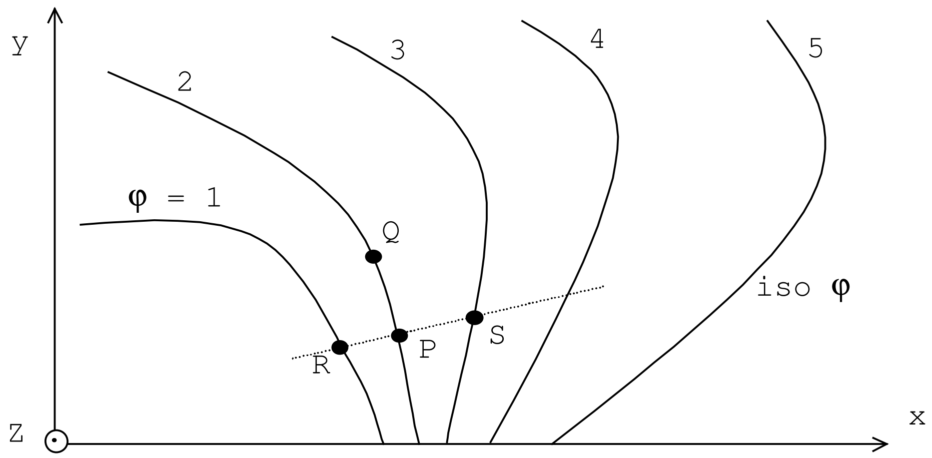
Nesta aula apresentaremos compactamente tópicos delicados dos cálculos vetorial e tensorial de uma forma física e estreitamente relacionada com o que será apresentado neste curso.

(1) O **gradiente** [grad $\equiv \nabla$]

é um operador que descreve como um campo varia no espaço em um determinado instante. É definido por:

$$\vec{\text{grad}}\,\varphi = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \vec{r}}\right)_t \quad \Longleftrightarrow \quad \left(\vec{\text{grad}}\,\varphi \,.\, d\vec{r} = d\varphi \right)_t \qquad [1]$$

Sendo o campo de φ no espaço descrito por superfícies de φ constante:



a) para definir a direção do gradiente, num ponto P qualquer, escolhe-se primeiramente um deslocamento elementar d**r**$_1$ partindo de P até um ponto Q sobre a mesma iso-superficie.

$$\left(\vec{\text{grad}}\,\varphi\right)_P \,.\, d\vec{r}_1 = d\varphi = 0 \qquad [2]$$

assim conclui-se que o gradiente em P é perpendicular à iso-superficie que passa em P.

b) para definir o módulo do gradiente no ponto P, escolhe-se outro deslocamento elementar d**r**$_2$ partindo de P e indo na direção perpendicular à iso-superficie até um ponto R sobre a outra iso-superficie.

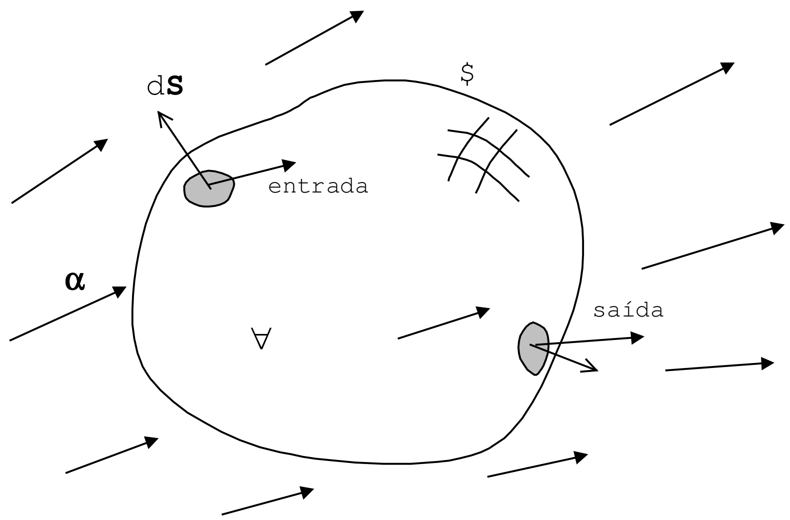
$$\left(\vec{\text{grad}}\,\varphi\right)_P \,.\, d\vec{r}_2 = \left| \left(\vec{\text{grad}}\,\varphi\right)_P \right| \left| d\vec{r}_2 \right| = d\varphi = \varphi_R - \varphi_P \qquad [3]$$

$$\left| \left(\vec{\text{grad}}\,\varphi\right)_P \right| = \frac{\varphi_R - \varphi_P}{\left| d\vec{r}_2 \right|} \qquad [4]$$

c) o sentido é arbitrado no sentido de φ crescente.

(2) O **divergente** [div ≡ **∇**.]

Dado um campo vetorial **α** e um elemento de volume ∀ fixo no espaço e com uma superfície envoltória $:



Nos elementos de superfície em que **α** entra em ∀ a quantidade de **α** que entra é:

$$-\vec{\alpha}.d\vec{S} \quad [5]$$

já nos elementos de superfície em que **α** sai de ∀ o quanto sai de **α** é:

$$+\vec{\alpha}.d\vec{S} \quad [6]$$

contabilizando tudo o que sai menos o que entra em todo o volume ∀:

$$\int_{\$} \vec{\alpha}\,.\,d\vec{S} \quad [7]$$

o divergente de **α** é a derivada dessa quantidade pelo volume:

$$\mathrm{div}\,\vec{\alpha} = \frac{d}{dV}\int_{\$} \vec{\alpha}\,.\,d\vec{S} \quad [8]$$

ou na forma integral do Teorema de Gauss:

$$\int_{\forall} \mathrm{div}\,\vec{\alpha}\,dV = \int_{\$} \vec{\alpha}\,.\,d\vec{S} \quad [9]$$

(3) O **Laplaciano** [∇^2]

$$\nabla^2\varphi = \mathrm{div}\left(\vec{\mathrm{grad}}\,\varphi\right) = \nabla.\nabla\varphi \qquad [10]$$

(4) O **fator de escala** h_i.

Considerando um vetor de posição de um ponto observado:

$$\vec{r} = \vec{r}\left(q_1, q_2, q_3, t\right) \qquad [11]$$

onde t é o tempo e as grandezas q_i (i = 1 , 2 , 3) são as coordenadas de posição em relação a um sistema de eixos independentes qualquer. Mantendo-se todas as coordenadas $q_{j\neq i}$ fixas e variando-se apenas uma coordenada qi considerada, o ponto observado descreve uma trajetória ds:

$$d\vec{s} = ds\,\vec{e}_i$$

paralela a um versor e_i cuja direção é definida por:

$$\vec{e}_i \ // \ \left(\frac{\partial\vec{r}}{\partial q_i}\right)_{q_{j\neq i}}$$

o modulo de d**s** corresponde ao comprimento físico do deslocamento elementar sobre a trajetória e é dado pelo produto escalar do vetor deslocamento dr por e_i:

$$ds = \left|d\vec{s}\right| = d\vec{s}\,.\,\vec{e}_i$$

Assim o sistema de coordenadas pode ser definido pelos seus eixos caracterizado pelos versores:

$$\vec{e}_1,\ \vec{e}_2,\ \vec{e}_3$$

Um sistemas de coordenadas é **ortogonal** quando versores são perpendiculares entre si:

$$\vec{e}_i\,.\,\vec{e}_j = \delta_{ij} \qquad [12]$$

onde: Bird(A-2-1;2); Deen(A-3-7)

$$\delta_{ij} = \begin{Bmatrix} 0 & p/\,i\neq j \\ 1 & p/\,i=j \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad [13]$$

Para um sistema de coordenadas ortogonais pode-se definir um fator de escala h_i para cada coordenada q_i por:

$$ds = d\vec{s}\,.\,\vec{e}_i = h_i dq_i \qquad [14]$$

o fator de escala h_i é portanto o parâmetro que se torna necessário multiplicar a diferencial da coordenada dqi para se obter o comprimento físico do deslocamento que o ponto descreve quando apenas a coordenada q_i varia.

4-a) Aplicando a definição para o sistema de coordenadas cartesiano:

$$d\vec{r}\,.\,\vec{I} = dx \quad \therefore \quad h_x = 1$$
$$d\vec{r}\,.\,\vec{J} = dy \quad \therefore \quad h_y = 1$$
$$d\vec{r}\,.\,\vec{K} = dz \quad \therefore \quad h_z = 1$$

e então:

$$d\vec{r} = dx\,\vec{I} + dy\,\vec{J} + dz\,\vec{K}$$

4-b) Aplicando para o sistema de coordenadas cilíndrico:

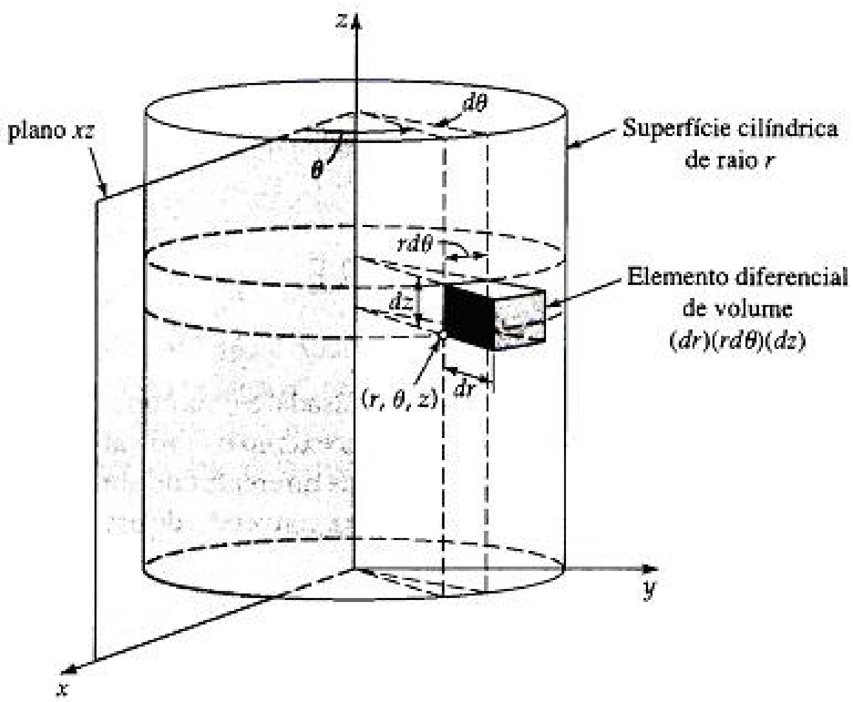


Fig. A.8-1 Elemento diferencial de volume, $r\,dr\,d\theta\,dz$, em coordenadas cilíndricas e elementos diferenciais de linha, dr, $r\,d\theta$ e dz. Os elementos diferenciais de superfície são: $(r\,d\theta)(dz)$ perpendiculares à direção r (sombreamento intermediário); $(dz)(dr)$ perpendiculares à direção θ (sombreamento mais escuro) e $(dr)(r\,d\theta)$ perpendiculares à direção z (sombreamento mais leve).

e adotando-se para as coordenadas r e θ da figura A.8.1 as notações ρ e φ, respectivamente.

$$d\vec{r}\cdot\vec{e}_\rho = d\rho \quad \therefore \quad h_\rho = 1$$

$$d\vec{r}\cdot\vec{e}_\varphi = \rho\, d\varphi \quad \therefore \quad h_\varphi = \rho$$

$$d\vec{r}\cdot\vec{K} = dz \quad \therefore \quad h_z = 1$$

e então:

$$d\vec{r} = d\rho\,\vec{e}_\rho + \rho\, d\varphi\,\vec{e}_\varphi + dz\,\vec{K}$$

4-c) Aplicando para o sistema de coordenadas esférico:

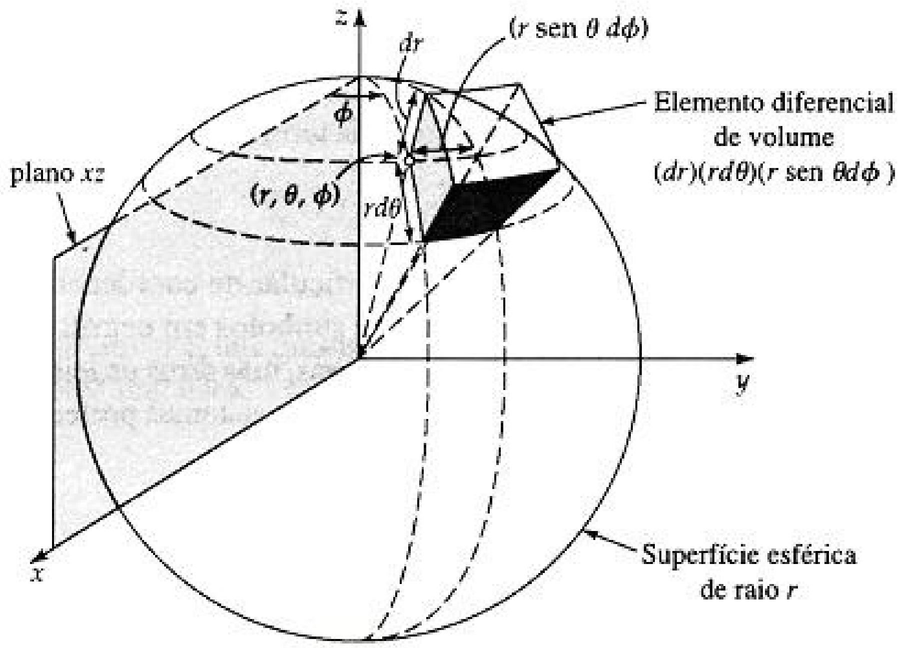


Fig. A.8-2. Elemento diferencial de volume, r^2 sen $\theta\, dr\, d\theta\, d\phi$, em coordenadas esféricas e elementos diferenciais de linha, dr, $r\,d\theta$ e r sen $\theta\, d\phi$. Os elementos diferenciais de superfície são: $(r\,d\theta)(r$ sen $\theta\, d\phi)$ perpendiculares à direção r (sombreamento mais leve); $(r$ sen $\theta\, d\phi)(dr)$ perpendiculares à direção θ (sombreamento mais escuro) e $(dr)(r d\theta)$ perpendiculares à direção ϕ (sombreamento intermediário).

$$d\vec{r}\cdot\vec{e}_r = dr \qquad \therefore \qquad h_r = 1$$

$$d\vec{r}\cdot\vec{e}_\theta = r\,d\theta \qquad \therefore \qquad h_\theta = r$$

$$d\vec{r}\cdot\vec{e}_\varphi = r\,\text{sen}\,\theta\,d\varphi \qquad \therefore \qquad h_\varphi = r\,\text{sen}\,\theta$$

e então:

$$d\vec{r} = dr\,\vec{e}_r + r\,d\theta\,\vec{e}_\theta + r\,\text{sen}\,\theta\,d\varphi\,\vec{e}_\varphi$$

generalizando:

$$\boxed{d\vec{r} = \sum_{i=1}^{3} h_i\,dq_i\,\vec{e}_i} \qquad [15]$$

onde:

sistema	q_1	h_1	q_2	h_2	q_3	h_3	J
cartesiano	x	1	y	1	z	1	1
cilíndrico	ρ	1	φ	ρ	z	1	ρ
esférico	r	1	θ	r	φ	r sen θ	r^2 sen θ

Tanto o Bird quanto o Deen usam r em vez de ρ como coordenada polar cilíndrica para não confundir com a densidade.

4-d) O gradiente com h_i. Bird(A-7-15); Deen(A-7-11)

$$\boxed{\text{gr}\vec{\text{a}}\text{d}\ \varphi = \sum_{i=1}^{3} \frac{1}{h_i}\frac{\partial\varphi}{\partial q_i}\vec{e}_i} \qquad [16]$$

4-e) O divergente com h_i. Bird(A-7-16); Deen(A-7-18)

$$\boxed{\text{div}\ \vec{\alpha} = \frac{1}{J}\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial}{\partial q_i}\frac{J\alpha_i}{h_i}} \qquad [17]$$

onde o **Jacobiano** é: $J = \prod_{i=1}^{3} h_i$

4-f) O **rotacional** com h_i: Bird(A-4-10)

$$\boxed{\text{r}\vec{\text{o}}\text{t}\ \vec{\alpha} = \frac{1}{J}\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\sum_{k=1}^{3}\varepsilon_{ijk}\frac{\partial}{\partial q_j}\frac{J\,\alpha_k}{h_j}\vec{e}_i} \qquad [18]$$

onde o pseudo-**tensor permutação** $\boldsymbol{\varepsilon_{ijk}}$ é composto de 27 termos:

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} 1 & ijk = 123; 231:312 \\ -1 & ijk = 132; 213:321 \\ 0 & i = j\,; j = k : k = i \end{cases} = \qquad \text{Bird(A-2-3;4;5)}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad [19]$$

$$= (i-j).(j-k).(k-i)/2$$

4-g) O **laplaciano** com h_i: Deen (A-7-22); Bird(A-7-17)

É uma segunda derivada que corresponde à contabilidade do que sai menos o que entra num elemento de volume (divergente) da variação de um campo no espaço (gradiente):

$$\boxed{\nabla^2 \varphi = \frac{1}{J} \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial}{\partial q_i} \frac{J}{h_i^2} \frac{\partial \varphi}{\partial q_i}} \qquad [20]$$

5- Bibliografia

Neste curso adotamos como biblografia dois livros com excelentes apendices de operações vetoriais e tensoriais:

Deen,W.M., Analysis of Transport Phenomena, Oxford, 1998.
Appendix A - Vectors and Tensors. p.551-81

Simples e objetivo altamente recomendado para recordar o cálculo vetorial e iniciar o calculo tensorial.

Bird, R.B., Stewart, W.E., Lighfoot, E.N., Transport Phenomena, 2 ed, Wiley, 2002.
Appendix A - Vector and Tensor Notation. p.807-42
Appendix B - The Fluxes and the Equations of change. p.843-81

Avançado e completo (quase enciclopédico), com exemplos e exercícios.

PQI5776 – Fenômenos de Transporte I – AULA 1- Parte 3

Operações Matriciais e a Representação Tensorial

1) Algumas propriedades das **matrizes**:

Sendo as matrizes A, B e δ quadradas [nxn] e C [1xn]:

$$A = \begin{bmatrix} A11 & A12 \\ A21 & A22 \end{bmatrix} \ : \ B = \begin{bmatrix} B11 & B12 \\ B21 & B22 \end{bmatrix} \ : \ \delta = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \ : \ C = \begin{bmatrix} C1 & C2 \end{bmatrix}$$

(1-a) as **transpostas** de A e C são:

$$A^T = \begin{bmatrix} A11 & A21 \\ A12 & A22 \end{bmatrix} \ ; \ B^T = \begin{bmatrix} B11 & B21 \\ B12 & B22 \end{bmatrix} \ ; \ \delta^T = \delta \ ; \ C^T = \begin{bmatrix} C1 \\ C2 \end{bmatrix}$$

(1-b) o **traço** é a soma dos termos da diagonal principal:

$$tr\,(A) = (A11 + A22) \ ; \ tr\,(\delta) = 2$$

(1-c) a parcela **simétrica** de A é:

$$A^S = \frac{A + A^T}{2} = \frac{1}{2}\left\{ \begin{bmatrix} A11 & A12 \\ A21 & A22 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} A11 & A21 \\ A12 & A22 \end{bmatrix} \right\} = \begin{bmatrix} A11 & (A21 + A12)/2 \\ (A21 + A12)/2 & A22 \end{bmatrix}$$

(1-d) a parcela **simétrica normalizada** de A é a parcela simétrica de A de cuja diagonal é subtraido o traço dividido pela ordem da matriz :

$$\overset{o}{A}{}^S = A^S - \frac{tr\,(A)}{tr\,(\delta)}\delta = A^S - \frac{tr\,(A)}{tr\,(\delta)} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (A11 - A22)/2 & (A21 + A12)/2 \\ (A21 + A12)/2 & (A22 - A11)/2 \end{bmatrix}$$

(1-e) a parcela **anti-simétrica** de A é:

$$A^a = \frac{A - A^T}{2} = \frac{1}{2}\left\{ \begin{bmatrix} A11 & A12 \\ A21 & A22 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} A11 & A21 \\ A12 & A22 \end{bmatrix} \right\} = \begin{bmatrix} 0 & -(A21 - A12)/2 \\ (A21 - A12)/2 & 0 \end{bmatrix}$$

(1-f) a matriz A pode ser expressa como a soma do traço dividido pela ordem, da parcela simétrica normalisada e da parcela antissimétrica:

$$A = \frac{tr(A)}{tr(\delta)} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \overset{o}{A}{}^S + A^a$$

(1-g) a **multiplicação** das matrizes A[nxn] e B[nxn] é o produto (**linhas x colunas**) e é denominada **contração** ; o resultado diminui (contrai) o número total de componentes de (nxn+nxn) para [nxn]:

$$A.B=\begin{bmatrix} A11 & A12 \\ A21 & A22 \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} B11 & B12 \\ B21 & B22 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} (A11\ B11+A12\ B21) & (A11\ B12+A12\ B22) \\ (A21\ B11+A22\ B21) & (A21\ B12+A22\ B22) \end{bmatrix}$$

(1-h) A **contração** da matriz C [1xn] com a matriz A [nxn] **não é** comutativa $C.A \neq A.C^T$ (a menos que A seja simétrica):

- $$C.A=\sum_{j=1}^{n} C_j . \sum_{i,j=1}^{n} A_{ij}=\begin{bmatrix} C1 & C2 \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} A11 & A12 \\ A21 & A22 \end{bmatrix}=$$

$$=\left[(C1\,A11+C2\,A21) \quad (C1\,A12+C2\,A22) \right]=\begin{bmatrix} CA1 & CA2 \end{bmatrix}=\sum_{i,j=1}^{n} A_{ij}C_i$$

- $$A.C^T=\sum_{i,j=1}^{n} A_{ij} . \sum_{j=1}^{n} C_j=\begin{bmatrix} A11 & A12 \\ A21 & A22 \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} C1 \\ C2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} (A11C1+A12C2) \\ (A21C1+A22C2) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} AC1 \\ AC2 \end{bmatrix}=\sum_{i,j=1}^{n} A_{ji}C_i$$

(1-i) a **dupla contração** de A:B é o traço da contração de A com B:

$$A:B=tr(A.B)=tr\left\{\begin{bmatrix} A11 & A12 \\ A21 & A22 \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} B11 & B12 \\ B21 & B22 \end{bmatrix}\right\}=$$

$$= tr\begin{bmatrix} (A11.B11+A12.B21) & (A11.B12+A12.B22) \\ (A21.B11+A22.B21) & (A21.B12+A22.B22) \end{bmatrix}=$$

$$=(A11.B11+A12.B21+A21.B12+A22.B22)=\sum_{ij} AijBji$$

A:B corresponde simplesmente ao somatório dos produtos termo a termo de A e B^T. Esta operação é comutativa A:B = B:A

(1-j) a **magnitude** de um tensor é a raiz quadrada da dupla contração do tensor com seu transposto:

$$|A|=\left[\frac{A:A^T}{2}\right]^{1/2}=\left\{\frac{tr}{2}\left(A.A^T\right)\right\}^{1/2}=\left(\frac{tr}{2}\left\{\begin{bmatrix} A11 & A12 \\ A21 & A22 \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} A11 & A21 \\ A12 & A22 \end{bmatrix}\right\}\right)^{1/2}=$$

$$=\left\{\frac{tr}{2}\begin{bmatrix} A11^2+A12^2 & A11.A21+A12.A22 \\ A21.A11+A22.A21 & A21^2+A22^2 \end{bmatrix}\right\}^{1/2}=$$

$$=\left(\frac{A11^2+A12^2+A21^2+A22^2}{2}\right)^{1/2}=\left[\sum_{ij}\frac{A^2ij}{2}\right]^{1/2}$$

(2) Representações Tensoriais

(2-a) Um **vetor** pode ser representado como a contração da matriz das coordenadas do vetor em relação a um sistema de coordenadas com a matriz dos respectivos versores:

$$\vec{a} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} \vec{e}_1 \\ \vec{e}_2 \\ \vec{e}_3 \end{bmatrix} = a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + a_3\vec{e}_3 = \sum_{i=1}^{n} a_i\vec{e}_i$$

(2-b) A multiplicação simples de dois vetores **a** e **b** é denominada de **produto diádico** e gera um ente complexo (n^2 termos):

$$\vec{a}\,\vec{b} = (a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + a_3\vec{e}_3)(b_1\vec{e}_1 + b_2\vec{e}_2 + b_3\vec{e}_3) = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i\vec{e}_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_j\vec{e}_j\right) =$$

$$= \begin{matrix} a_1b_1\vec{e}_1\vec{e}_1 + a_1b_2\vec{e}_1\vec{e}_2 + a_1b_3\vec{e}_1\vec{e}_3 + \\ + a_2b_1\vec{e}_2\vec{e}_1 + a_2b_2\vec{e}_2\vec{e}_2 + a_2b_3\vec{e}_2\vec{e}_3 + \\ + a_3b_1\vec{e}_3\vec{e}_1 + a_3b_2\vec{e}_3\vec{e}_2 + a_3b_3\vec{e}_3\vec{e}_3 \end{matrix} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} a_ib_j\vec{e}_i\vec{e}_j$$

este produto pode ser representado pela dupla contração de duas matrizes:

-a matriz(3x3) resultado da contração da matriz das coordenadas de **a**(3x1) com a matriz das de **b**(1x3):

$$[ab] = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1b_1 & a_1b_2 & a_1b_3 \\ a_2b_1 & a_2b_2 & a_2b_3 \\ a_3b_1 & a_3b_2 & a_3b_3 \end{bmatrix}$$

com a análoga matriz da contração dos versores denominado **díade**:

$$\vec{e}\vec{e} = \left\{ \begin{bmatrix} \vec{e}_1 \\ \vec{e}_2 \\ \vec{e}_3 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \end{bmatrix} \right\}^T = \begin{bmatrix} \vec{e}_1\vec{e}_1 & \vec{e}_2\vec{e}_1 & \vec{e}_3\vec{e}_1 \\ \vec{e}_1\vec{e}_2 & \vec{e}_2\vec{e}_2 & \vec{e}_3\vec{e}_2 \\ \vec{e}_1\vec{e}_3 & \vec{e}_2\vec{e}_3 & \vec{e}_3\vec{e}_3 \end{bmatrix}$$

ou seja o produto diádico de **a** com **b** é a **dupla contração** da matriz dos produtos dos coeficientes termo a termo com a diade:

$$\vec{a}\vec{b} = tr(ab{:}\vec{e}\vec{e}) = tr\left\{ \begin{bmatrix} a_1b_1 & a_1b_2 & a_1b_3 \\ a_2b_1 & a_2b_2 & a_2b_3 \\ a_3b_1 & a_3b_2 & a_3b_3 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} \vec{e}_1\vec{e}_1 & \vec{e}_2\vec{e}_1 & \vec{e}_3\vec{e}_1 \\ \vec{e}_1\vec{e}_2 & \vec{e}_2\vec{e}_2 & \vec{e}_3\vec{e}_2 \\ \vec{e}_1\vec{e}_3 & \vec{e}_2\vec{e}_3 & \vec{e}_3\vec{e}_3 \end{bmatrix} \right\} = \sum_{i,j=1}^{3} a_ib_j\ \vec{e}_i\vec{e}_j$$

(2-c) um **tensor** genérico pode ser representado simplificadamente pela dupla contração da matriz de seus coeficientes com a díade:

$$\vec{\vec{T}} = tr\left\{\begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} \vec{e}_1\vec{e}_1 & \vec{e}_1\vec{e}_2 & \vec{e}_1\vec{e}_3 \\ \vec{e}_2\vec{e}_1 & \vec{e}_2\vec{e}_2 & \vec{e}_2\vec{e}_3 \\ \vec{e}_3\vec{e}_1 & \vec{e}_3\vec{e}_2 & \vec{e}_3\vec{e}_3 \end{bmatrix}^T\right\} = \sum_{i,j=1}^{3} T_{ij}\ \vec{e}_i\vec{e}_j = T_{ij}$$

e normalmente a **díade pode ser omitida** na representação dos tensores.

3) Algumas propriedades dos **tensores**:

(3-a) **definição:**

tensor é um ente físico que **independe do sistema de referência** que o observa.

(3-b) um tensor tem **d**$^{\mathbf{n}}$ termos

onde d = dimensão do sistema de referência (d = 1, 2, 3, 4, ...)
n = ordem do tensor (n = 0 -> escalar; n = 1 -> vetor;
n = 2 -> tensor de ordem 2; ...)

(3-b) o produto **externo** de dois vetores **a b**

$$\vec{a}\,\vec{b} = \begin{bmatrix} a_1b_1 & a_1b_2 & a_1b_3 \\ a_2b_1 & a_2b_2 & a_2b_3 \\ a_3b_1 & a_3b_2 & a_3b_3 \end{bmatrix} = \sum_{i,j=1}^{n} a_i b_j = a_i b_j$$

(3-c) o produto **interno a.b** é o traço de **a b**:

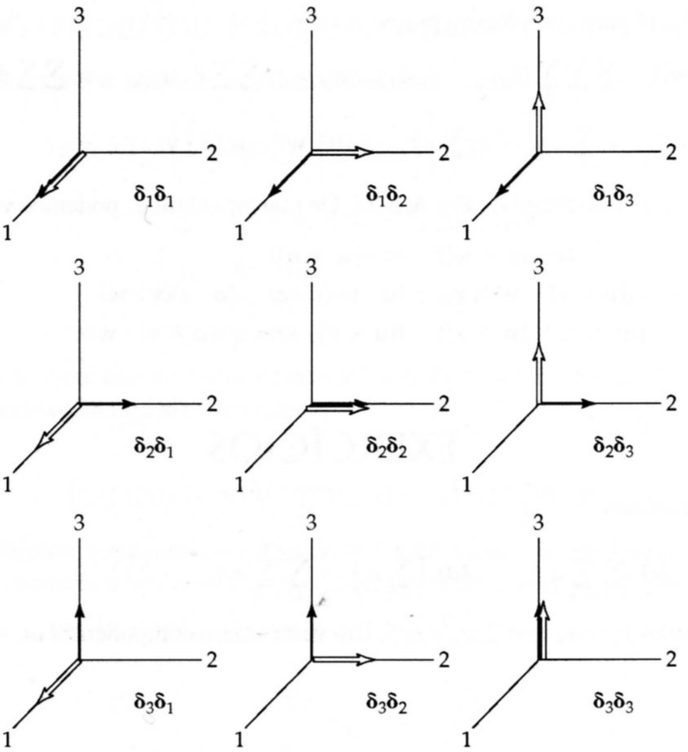
$$\vec{a}.\vec{b} = tr\begin{bmatrix} a_1b_1 & a_1b_2 & a_1b_3 \\ a_2b_1 & a_2b_2 & a_2b_3 \\ a_3b_1 & a_3b_2 & a_3b_3 \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i = a_i b_i \qquad \text{Bird(A-2-20)}$$

(3-d) o denominado produto **vetorial** **a x b** é uma representação pseudo - vetorial da parcela anti-simétrica de **a b**:

$$\vec{a}\,\mathrm{x}\,\vec{b} \Rightarrow \begin{bmatrix} a_1b_1 & a_1b_2 & a_1b_3 \\ a_2b_1 & a_2b_2 & a_2b_3 \\ a_3b_1 & a_3b_2 & a_3b_3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} a_1b_1 & a_2b_1 & a_3b_1 \\ a_1b_2 & a_2b_2 & a_3b_2 \\ a_1b_3 & a_2b_3 & a_3b_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & a_1b_2 - a_2b_1 & -(a_3b_1 - a_1b_3) \\ -(a_1b_2 - a_2b_1) & 0 & a_2b_3 - a_3b_2 \\ a_3b_1 - a_1b_3 & -(a_2b_3 - a_3b_2) & 0 \end{bmatrix}$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \sum_{i,j,k=1}^{n} a_i b_j \, \varepsilon_{ijk} \, \vec{e}_k = a_i b_j \, \varepsilon_{ijk} \qquad \text{Bird(A-2-21)}$$

4) Uma representação para o produto diádico $\boldsymbol{\delta}_i\boldsymbol{\delta}_j$



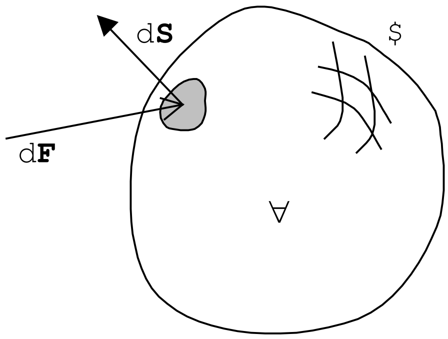
PQI5776 - Fenômenos de Transporte I - AULA 1- Parte 4

Operações Tensoriais

(1) O tensor das **Tensões**

(1-a) Define-se tensão (molecular stress) como a derivada da força pela área:

$$\vec{\vec{\pi}} = \frac{d\,\vec{F}}{d\,\vec{S}}$$



ou $\vec{\vec{\pi}}\,.\,d\vec{S} = d\,\vec{F} =$

$$= \begin{bmatrix} \pi_{11} & \pi_{12} & \pi_{13} \\ \pi_{21} & \pi_{22} & \pi_{23} \\ \pi_{31} & \pi_{32} & \pi_{33} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} dS_1 \\ dS_2 \\ dS_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \pi_{11}dS_1 + \pi_{12}dS_2 + \pi_{13}dS_3 \\ \pi_{21}dS_1 + \pi_{22}dS_2 + \pi_{23}dS_3 \\ \pi_{31}dS_1 + \pi_{32}dS_2 + \pi_{33}dS_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} dF_1 \\ dF_2 \\ dF_3 \end{bmatrix}$$

(1-b) integrando em $ e aplicando Gauss (utilizando o **divergente vetor)**:

$$\vec{F} = \int_{\$} d\,\vec{F} = \int_{\$} \vec{\vec{\pi}}\,.\,d\vec{S} = \int_{\forall} d\vec{i}v\,\vec{\vec{\pi}}\ dV$$

(1-c) **decomposição** do tensor das tensões

traço simétrico normalizado assimétrico

$$\vec{\vec{\pi}} = \underbrace{\frac{tr\left(\vec{\vec{\pi}}\right)}{3}}_{\left(p\ +p^v\right)} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\vec{\vec{\delta}}} + \overset{o}{\vec{\vec{\pi}}}{}^{S} + \underbrace{\vec{\vec{\pi}}^{a}}_{\approx 0}$$

forças: normais (pressão hidrostática) cisalhamento devido à rotação (consideradas nulas por Bird (p.18))

$$\boxed{\vec{\vec{\pi}} = -\vec{\vec{T}} = \left(p\ +p^v\right)\vec{\vec{\delta}} + \overset{o}{\vec{\vec{\tau}}}{}^{S} + \underbrace{\vec{\vec{\tau}}^{a}}_{\approx 0}}$$

(2) O **gradiente tensor** da velocidade

(2-a) Desenvolvendo com base nos fatores de escala:

$$\vec{\vec{\mathrm{grad}}}\,\vec{v} = \sum_i \frac{1}{h_i}\frac{\partial}{\partial q_i}\left(\sum_j v_j \vec{e}_j\right)\vec{e}_i = \sum_i \frac{\vec{e}_i}{h_i}\sum_j\left(v_j\frac{\partial \vec{e}_j}{\partial q_i} + \vec{e}_j\frac{\partial v_j}{\partial q_i}\right) =$$

$$= \sum_{i,j}\frac{\vec{e}_i\,\vec{e}_j}{h_i}\frac{\partial v_j}{\partial q_i} + \sum_i \frac{\vec{e}_i}{h_i}\sum_j v_j\frac{\partial \vec{e}_j}{\partial q_i}$$

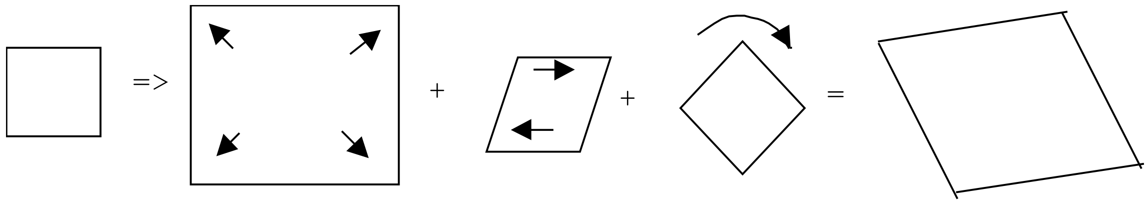
as parcelas do primeiro termo do ultimo membro da equação acima são facilmente identificadas em Bird(tabela A-7-1) e Deen(tabelas A-2,3,4-eqs.S-AA). As parcelas correspondentes ao segundo termo necessitam de um desenvolvimento matematico mais elaborado para a sua demonstração.

(2-b) **decomposição** do gradiente tensor da velocidade **v**:

traço simétrico norm. assimetrico

$$\vec{\vec{\mathrm{grad}}}\,\vec{v} = \underbrace{\frac{\mathrm{tr}\left(\vec{\vec{\mathrm{grad}}}\,\vec{v}\right)}{3}\vec{\vec{\delta}}}_{\mathrm{div}\,\vec{v}} + \underbrace{\mathring{\vec{\vec{\mathrm{grad}}}}{}^{S}\,\vec{v}}_{\vec{\Gamma}-\mathrm{div}\,\vec{v}} + \underbrace{\vec{\vec{\mathrm{grad}}}{}^{a}\,\vec{v}}_{\vec{\Omega}}$$

escoamento: dilatação deformação rotação



(3) relação entre as tensões e o escoamento:

$$\vec{\vec{\zeta}} = -\,\vec{\vec{\vec{\vec{\mu}}}}\,.\,\vec{\vec{\mathrm{grad}}}\,\vec{v} \qquad \text{Bird(1-2-3)}$$

(9) (81) (9) (3) termos

Newtoniano -> reduz a 2 ou 3 coeficientes

$$\mathring{\zeta}{}^{S}_{xy} = -\,\mu\,\frac{\partial v_x}{\partial y}$$

(4) A **dissipação viscosa**:

Ao escoar, um elemento fluido realiza trabalho viscoso que corresponde ao produto escalar do seu deslocamento com a força viscosa resultante que atua sobre ele. Expresso por unidade de tempo e de volume, é:

$$\frac{\breve{d}\, W_v}{\forall\, \delta t} = \frac{d\vec{r}\,.\,\vec{F}_v}{\forall\, dt} = \vec{v}\,.\,\frac{\int_\forall d\vec{i}v\,\vec{\vec{\tau}}\,dV}{\forall} = \vec{v}\,.\,d\vec{i}v\,\vec{\vec{\tau}}$$

mas:

$$div\left(\vec{\vec{\tau}}\,.\,\vec{v}\right) = \vec{v}\,.\,d\vec{i}v\,\vec{\vec{\tau}} + \vec{\vec{\tau}} : gr\vec{\vec{a}}d\,\vec{v} \qquad \text{Bird(A-4-29);Deen(A-4-14)}$$

então a potencia volumétrica pode ser decomposta em duas parcelas:

$$\underbrace{\vec{v}\,.\,d\vec{i}v\,\vec{\vec{\tau}}}_{\text{total}} = \underbrace{div\left(\vec{\vec{\tau}}\,.\,\vec{v}\right)}_{\text{externa}} + \underbrace{\left(-\vec{\vec{\tau}} : gr\vec{\vec{a}}d\,\vec{v}\right)}_{\text{interna}}$$

a parcela interna corresponde à dissipação viscosa que promove um aumento de temperatura no fluido. Esta parcela está portanto presente nos balanços de entropia e de energia interna.

(4-a) a **função dissipação Φ_v** de Rayleigh

para um fluido Newtoniano:

$$\vec{\vec{\tau}} = -\,2\,\mu\;\; gr\vec{\vec{a}}d^S\,\vec{v} \qquad \text{Deen(1.2-11)}$$

então:

$$\mu\,\Phi_v = -\vec{\vec{\tau}} : gr\vec{\vec{a}}d\,\vec{v} = 2\,\mu\;\; gr\vec{\vec{a}}d\,\vec{v} : gr\vec{\vec{a}}d\,\vec{v} =$$

$$= \frac{\mu}{2}\sum_{i\,j}\left[\left(\frac{\partial v_i}{\partial q_j} + \frac{\partial v_j}{\partial q_i}\right) - \frac{2}{3}\left(\sum_k \frac{\partial v_k}{\partial q_k}\right)\delta_{ij}\right]^2 \qquad \text{Bird(3-3-3)}$$

este termo, sempre positivo, corresponde à “potencia dissipada” devido às forças viscosas:

$$P = 2\,\mu\;\left(gr\vec{\vec{a}}d^S\,\vec{v}\right)^2$$

PQI-5776 Fenômenos de Transporte I
Lista de Exercícios 1

1)

O gradiente do vetor velocidade $\nabla \mathbf{v}$ é um tensor de segunda ordem (9 componentes).

a) escreva $\nabla \mathbf{v}$ em coordenadas cartesianas na forma matricial.

$$\nabla \mathbf{v} = \partial v_i / \partial x_j$$

b) Verifique que o traço de $\nabla \mathbf{v}$ é igual ao divergente de **v**:

$$\mathrm{tr}\,(\nabla \mathbf{v}) = \nabla . \mathbf{v}$$

c) transponha o gradiente $\nabla \mathbf{v}$, some com $\nabla \mathbf{v}$ e escreva na forma matricial a parte simétrica de $\nabla \mathbf{v}$ denominada de tensor elongação:

$$\mathbf{\Gamma} = \nabla^S \mathbf{v} = (\nabla \mathbf{v} + \nabla^t \mathbf{v})/2 \qquad \text{onde} \qquad (\nabla^S \mathbf{v})ij = (\nabla^S \mathbf{v})ji$$

d) multiplique $\mathrm{tr}(\nabla \mathbf{v})$ por $\boldsymbol{\delta}/3$ e subtraia de $\nabla^S \mathbf{v}$, escreva então a parcela simetrica do gradiente sem o traço:

$$\mathbf{\Gamma}^{\circ} = \nabla^S \mathbf{v} - \mathrm{tr}\,(\nabla \mathbf{v})\,\boldsymbol{\delta}/3$$

e) escreva na forma matricial a parte anti-simétrica de $\nabla \mathbf{v}$ denominada de tensor vorticidade:

$$\mathbf{\Omega} = \nabla^a \mathbf{v} = (\nabla \mathbf{v} - \nabla^t \mathbf{v})/2$$

f) escreva o rotacional de **v** e compare as suas três componentes com as componentes da parte anti-simétrica de $\nabla \mathbf{v}$:

$$\mathbf{w} = \nabla \times \mathbf{v} \qquad \Leftrightarrow \qquad \mathbf{\Omega}$$

g) contraia **w** com o pseudo tensor permutação $\boldsymbol{\varepsilon}$ e compare com o tensor vorticidade

$$\mathbf{w} . \boldsymbol{\varepsilon} = 2\,\mathbf{\Omega}$$

h) verifique que: **∇v** = $\frac{1}{3}\nabla.\mathrm{v}\,\delta+\overset{o}{\Gamma}+\Omega$ Resposta:

$$\nabla v = \begin{bmatrix} \frac{\partial v_x}{\partial x} & \frac{\partial v_y}{\partial x} & \frac{\partial v_z}{\partial x} \\ \frac{\partial v_x}{\partial y} & \frac{\partial v_y}{\partial y} & \frac{\partial v_z}{\partial y} \\ \frac{\partial v_x}{\partial z} & \frac{\partial v_y}{\partial z} & \frac{\partial v_z}{\partial z} \end{bmatrix} = \frac{1}{3}\left(\frac{\partial v_x}{\partial x}+\frac{\partial v_y}{\partial y}+\frac{\partial v_z}{\partial z}\right)\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} +$$

$$+\frac{1}{3}\begin{bmatrix} \left(2\frac{\partial v_x}{\partial x}-\frac{\partial v_y}{\partial y}-\frac{\partial v_z}{\partial z}\right) & \frac{3}{2}\left(\frac{\partial v_x}{\partial y}+\frac{\partial v_y}{\partial x}\right) & \frac{3}{2}\left(\frac{\partial v_x}{\partial z}+\frac{\partial v_z}{\partial x}\right) \\ \frac{3}{2}\left(\frac{\partial v_x}{\partial y}+\frac{\partial v_y}{\partial x}\right) & \left(2\frac{\partial v_y}{\partial y}-\frac{\partial v_x}{\partial x}-\frac{\partial v_z}{\partial z}\right) & \frac{3}{2}\left(\frac{\partial v_y}{\partial z}+\frac{\partial v_z}{\partial y}\right) \\ \frac{3}{2}\left(\frac{\partial v_x}{\partial z}+\frac{\partial v_z}{\partial x}\right) & \frac{3}{2}\left(\frac{\partial v_y}{\partial z}+\frac{\partial v_z}{\partial y}\right) & \left(2\frac{\partial v_z}{\partial z}-\frac{\partial v_y}{\partial y}-\frac{\partial v_x}{\partial x}\right) \end{bmatrix} +$$

$$+\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & \frac{\partial v_y}{\partial x}-\frac{\partial v_x}{\partial y} & \frac{\partial v_x}{\partial z}-\frac{\partial v_z}{\partial x} \\ \frac{\partial v_x}{\partial y}-\frac{\partial v_y}{\partial x} & 0 & \frac{\partial v_z}{\partial y}-\frac{\partial v_y}{\partial z} \\ \frac{\partial v_z}{\partial x}-\frac{\partial v_x}{\partial z} & \frac{\partial v_y}{\partial z}-\frac{\partial v_z}{\partial y} & 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{3}\nabla.v\;\delta+\overset{o}{\Gamma}+\Omega$$

2)

O Tensor stress $\boldsymbol{\sigma} = -\boldsymbol{\pi}$ é um tensor de segunda ordem (9 componentes).

a) escreva as componentes de $\boldsymbol{\sigma} = \sigma_{ij}$ na forma matricial.

b) Escreva a pressão p em função das componentes de $\boldsymbol{\sigma}$:

$$p = tr(\boldsymbol{\sigma})/3$$

c) transponha $\boldsymbol{\sigma}$, some com $\boldsymbol{\sigma}$ e escreva na forma matricial a parte simétrica de $\boldsymbol{\sigma}$:

$$\boldsymbol{\sigma}^S = (\boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{\sigma}^t)/2 \qquad \text{onde} \qquad \boldsymbol{\sigma}^S{}_{ij} = \boldsymbol{\sigma}^S{}_{ji}$$

d) multiplique $tr(\boldsymbol{\sigma})$ por $\boldsymbol{\delta}/3$ e subtraia de $\boldsymbol{\sigma}$, escreva então a parcela simetrica do tensor das tensões sem o traço:

$$\boldsymbol{\sigma}^{oS} = \boldsymbol{\sigma}^S - tr(\boldsymbol{\sigma})\,\boldsymbol{\delta}/3$$

e) escreva na forma matricial a parte anti-simétrica de $\boldsymbol{\sigma}$:

$$\boldsymbol{\sigma}^a = (\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}^t)/2$$

f) veja em <u>Deen p. 220</u> e <u>Bird p. 18</u> por que tem-se para $\boldsymbol{\sigma}$ a relação:

$$\boldsymbol{\sigma}^a = 0$$

g) verifique que:

$$\boldsymbol{\sigma} = tr(\boldsymbol{\sigma})\,\boldsymbol{\delta}/3 + \boldsymbol{\sigma}^S + \boldsymbol{\sigma}^a$$

h) identifique os termos de dilatação e cisalhamento.

$$\boldsymbol{\sigma} = -p\,\boldsymbol{\delta} + \boldsymbol{\zeta} + \boldsymbol{\sigma}^a$$

resposta:

$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} = \frac{1}{3}\left(\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz}\right)\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} +$$

$$+\frac{1}{3}\begin{bmatrix} \left(2\sigma_{xx} - \sigma_{yy} - \sigma_{zz}\right) & \frac{3}{2}\left(\sigma_{xy} + \sigma_{yx}\right) & \frac{3}{2}\left(\sigma_{xz} + \sigma_{zx}\right) \\ \frac{3}{2}\left(\sigma_{yx} + \sigma_{xy}\right) & \left(\sigma_{xx} - 2\sigma_{yy} - \sigma_{zz}\right) & \frac{3}{2}\left(\sigma_{yz} + \sigma_{zy}\right) \\ \frac{3}{2}\left(\sigma_{zx} + \sigma_{xz}\right) & \frac{3}{2}\left(\sigma_{zy} + \sigma_{yz}\right) & \left(\sigma_{xx} - \sigma_{yy} - 2\sigma_{zz}\right) \end{bmatrix} +$$

$$+\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & \sigma_{xy} - \sigma_{yx} & \sigma_{xz} - \sigma_{zx} \\ \sigma_{yx} - \sigma_{xy} & 0 & \sigma_{yz} - \sigma_{zy} \\ \sigma_{zx} - \sigma_{xz} & \sigma_{zy} - \sigma_{yz} & 0 \end{bmatrix} = -p\,\delta + \tau + \sigma^a$$

3) Um tensor pode ser escrito de diversas maneiras, por exemplo o gradiente da velocidade é Bird(A-7-15):

$$\text{gr}\vec{\text{a}}\text{d}\ \vec{v} = \vec{\nabla}\vec{v} = \sum_i \vec{e}_i \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\sum_j \vec{e}_j v_j\right) = \sum_{ij} \vec{e}_i\left(\vec{e}_j \frac{\partial v_j}{\partial x_i} + v_j \vec{e}_j \frac{\partial \vec{e}_j}{\partial x_i}\right)$$

e o rotacional Bird(A-4-10 ou Tab.A-9-1):

$$\text{r}\vec{\text{o}}\text{t}\ \vec{v} = \vec{\nabla}\text{x}\vec{v} = \sum_i \vec{e}_i \frac{\partial}{\partial x_i}\ \text{x}\left(\sum_j \vec{e}_j v_j\right) = \sum_{ijk} \varepsilon_{ijk}\, \vec{e}_i \frac{\partial v_k}{\partial x_j}$$

verifique, para um sistema ortogonal $\left(\frac{\partial \vec{e}_j}{\partial x_i} = 0\right)$, que:

a) Se *C* for par:

$$\text{d}\vec{\text{i}}\text{v}\left(\text{gr}\vec{\vec{\text{a}}}\text{d}\ \vec{v} + \text{gr}\vec{\vec{\text{a}}}\text{d}^T\ \vec{v}\right) = \text{gr}\vec{\text{a}}\text{d}\left(\text{div}\ \vec{v}\right) + \vec{\nabla}^2\ \vec{v} \qquad \text{Deen(A-4-11)}$$

R: $\sum_k \vec{e}_k \frac{\partial}{\partial x_k}.\left(\sum_i \vec{e}_i \frac{\partial}{\partial x_i}\sum_j \vec{e}_j v_j + \sum_j \vec{e}_j \frac{\partial}{\partial x_j}\sum_i \vec{e}_i v_i\right) = \sum_{ij} \vec{e}_j \frac{\partial}{\partial x_j}\frac{\partial v_i}{\partial x_i} + \sum_{ij} \vec{e}_j \frac{\partial^2 v_j}{\partial x_i^2}$

b) se *C* for impar:

$$\text{r}\vec{\text{o}}\text{t}\ \left(\text{r}\vec{\text{o}}\text{t}\ \vec{v}\right) = \text{gr}\vec{\text{a}}\text{d}\left(\text{div}\ \vec{v}\right) - \vec{\nabla}^2\ \vec{v} \qquad \text{Bird(A-7-37)}$$

R: $\sum_k \vec{e}_k \frac{\partial}{\partial x_k}\ \text{x}\left(\sum_i \vec{e}_i \frac{\partial}{\partial x_i}\ \text{x}\sum_j \vec{e}_j v_j\right) = \sum_{ij} \vec{e}_j \frac{\partial}{\partial x_j}\frac{\partial v_i}{\partial x_i} + \sum_{ij} \vec{e}_j \frac{\partial^2 v_j}{\partial x_i^2}$

Questionário:

1)Verifique a estreita analogia entre a potência elétrica dissipada $P = U^2/R$ e a potência viscosa dissipada :

$P = \Gamma^2/(1/2\mu)$

Será que essa analogia pode ser aplicada a outro tipo de transporte?

2)Escrever a equação em coordenadas cilíndricas:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\vec{v}) = -\vec{\nabla}.\rho\vec{v}\vec{v} - \vec{\nabla}p - \vec{\nabla}.\vec{\vec{\tau}} + \rho\vec{g}$$ *R: Ver Bird Apêndice B.*

3)A relação abaixo é tão importante que sua dedução é solicitada, como exercício, em vários livros de Fenômenos de Transporte. Como a sua dedução não é facil ela é, em geral, apresentada como exercício resolvido, Bird(A-4-29); Deen(A-4-14). No entanto ela pode ser facilmente interpretada como uma "regra da cadeia". Verifique.

- para $\boldsymbol{\tau}$ simétrico: $\text{div}\,\vec{\vec{\tau}}.\vec{v} = \vec{v}.\text{d}\vec{\text{i}}\text{v}\,\vec{\vec{\tau}} + \vec{\vec{\tau}}:\text{gr}\vec{\vec{\text{a}}}\text{d}\,\vec{v}$

4) Usando fatores de escala escreva:

a) gradiente: $\boldsymbol{\nabla\varphi}$ em coordenadas esféricas

R: $$\vec{\nabla}\varphi = \vec{e}_r\frac{\partial\varphi}{\partial r} + \frac{\vec{e}_\theta}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial\theta} + \frac{\vec{e}_\phi}{r\,\text{sen}\,\theta}\frac{\partial\varphi}{\partial\phi}$$

b) divergente: $\boldsymbol{\nabla.a}$ em coordenadas cilíndricas

R: $$\vec{\nabla}.\vec{a} = \frac{1}{r}\frac{\partial\, r\, a_r}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial a_\phi}{\partial\phi} + \frac{\partial a_z}{\partial z}$$

c) rotacional: $\boldsymbol{\nabla x a}$ em coordenadas retangulares

R: $$\vec{\nabla}x\vec{a} = \left(\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z}\right)\vec{e}_x + \left(\frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_x}{\partial x}\right)\vec{e}_y + \left(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y}\right)\vec{e}_z$$

d) laplaciano: $\boldsymbol{\nabla^2\varphi}$ em coordenadas esféricas

R: $$\nabla^2\varphi = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}r^2\frac{\partial\ \varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2\,\text{sen}\,\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\text{sen}\,\theta\frac{\partial\varphi}{\partial\theta} + \frac{1}{r^2\,\text{sen}^2\,\theta}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\phi}$$

e) gradiente: $\boldsymbol{\nabla a}$ em coordenadas cilíndricas

R: $$\vec{\vec{\nabla}}\vec{a} = \left[\begin{array}{lll} \dfrac{\partial a_r}{\partial r}\,\vec{e}_r\vec{e}_r + & \dfrac{\partial a_\phi}{\partial r}\,\vec{e}_r\vec{e}_\phi + & \dfrac{\partial a_z}{\partial r}\,\vec{e}_r\vec{e}_z + \\ + \dfrac{1}{r}\left(\dfrac{\partial a_r}{\partial \phi} + v_\phi\right)\vec{e}_\phi\vec{e}_r & + \dfrac{1}{r}\left(\dfrac{\partial a_\phi}{\partial \phi} + v_r\right)\vec{e}_\phi\vec{e}_\phi & + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial a_z}{\partial \phi}\,\vec{e}_\phi\vec{e}_z + \\ + \dfrac{\partial a_r}{\partial z}\,\vec{e}_z\vec{e}_r & + \dfrac{\partial a_\phi}{\partial z}\,\vec{e}_z\vec{e}_\phi & + \dfrac{\partial a_z}{\partial z}\,\vec{e}_z\vec{e}_z \end{array}\right]$$

Observar a presença dos dois termos v_ϕ e v_r correspondentes às derivadas dos respectivos versores em relação a ϕ.

f) dissipação: $\boldsymbol{\tau}:\nabla\mathbf{v}$ em coordenadas esféricas

R:

$$\vec{\vec{\nabla}}\vec{v} = \begin{array}{lll} \tau_{rr}\dfrac{\partial v_r}{\partial r} + & \dfrac{\tau_{r\theta}}{r}\left(\dfrac{\partial v_r}{\partial \theta} - v_\theta\right) + & \dfrac{\tau_{r\phi}}{r}\left(\dfrac{1}{\text{sen }\theta}\dfrac{\partial v_r}{\partial \phi} - v_\phi\right) + \\ + \tau_{\theta r}\dfrac{\partial v_\theta}{\partial r} & + \dfrac{\tau_{\theta\theta}}{r}\left(\dfrac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + v_r\right) + & \dfrac{\tau_{\theta\phi}}{r}\left(\dfrac{1}{\text{sen }\theta}\dfrac{\partial v_\theta}{\partial \phi} - v_\phi \cot\theta\right) + \\ + \tau_{\phi r}\dfrac{\partial v_\phi}{\partial r} & + \dfrac{\tau_{\phi\theta}}{r}\dfrac{\partial v_\phi}{\partial \theta} + & \dfrac{\tau_{\phi\phi}}{r}\left(\dfrac{1}{\text{sen }\theta}\dfrac{\partial v_\phi}{\partial \phi} + v_r + v_\theta \cot\theta\right) \end{array}$$