PEF-5916
Dinâmica e Estabilidade das Estruturas

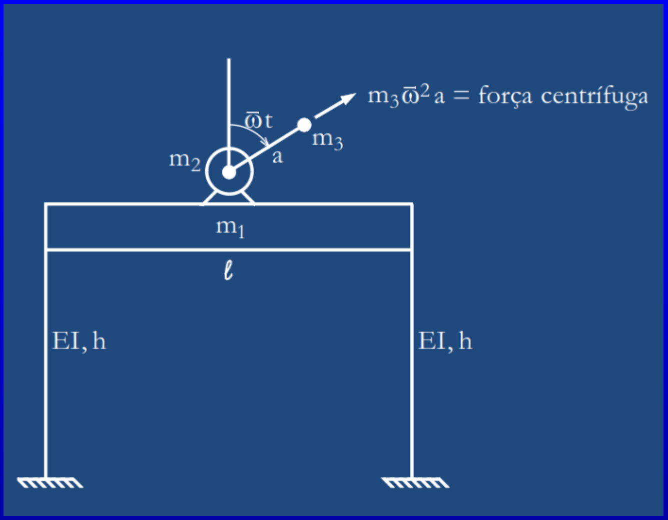
Prof. Dr. Carlos Eduardo Nigro Mazzilli

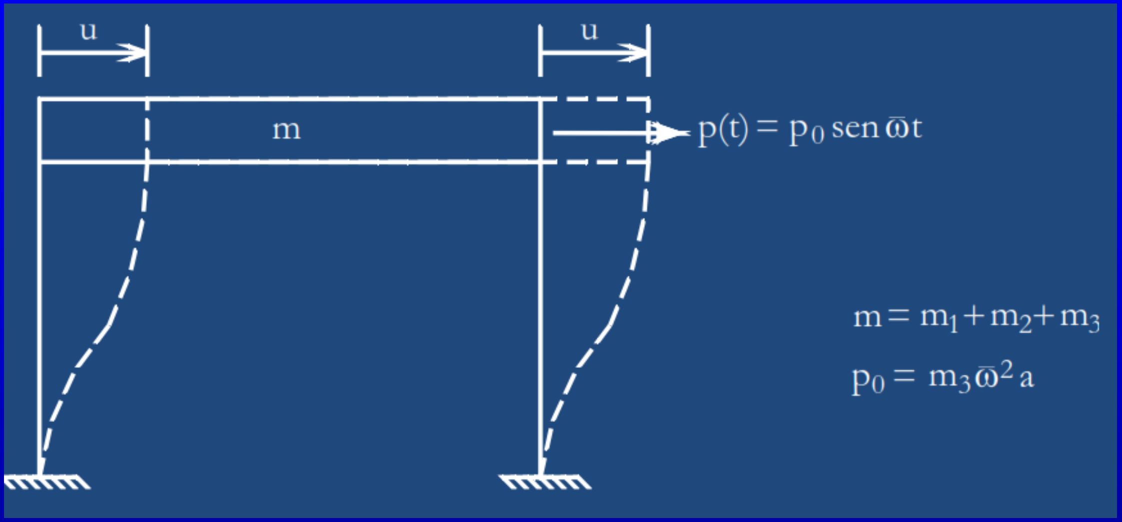
Sistemas de um grau de liberdade

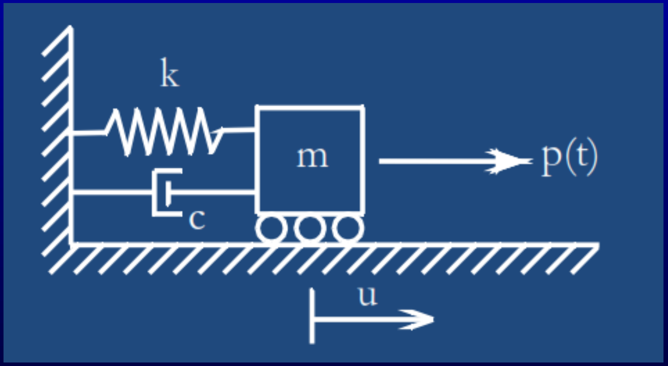
- O campo de deslocamentos fica totalmente caracterizado por uma única variável (coordenada generalizada *u*)
- Da mesma forma, todas as demais respostas do sistema (especialmente os esforços solicitantes, tensões e deformações) ficam caracterizados por essa única coordenada generalizada
- Evidentemente, nem sempre uma estrutura fica bem representada por um modelo de um grau de liberdade, sendo necessário recorrer a modelos de hierarquia mais alta, com vários graus de liberdade
- Exemplos de graus de liberdade são os deslocamentos nodais da Análise Matricial das Estruturas e do MEF
- Por motivos didáticos, inicialmente serão discutidos apenas modelos de um grau de liberdade

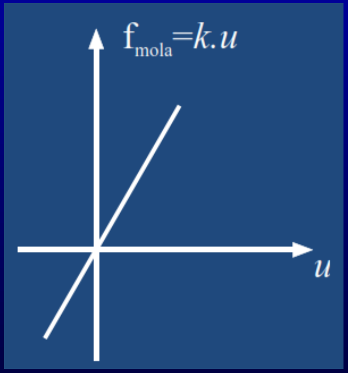
Formulação das equações de movimento

Exemplo: Fundação aporticada de máquina



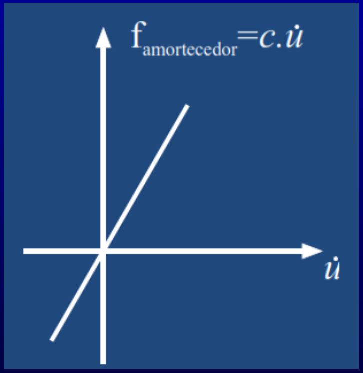






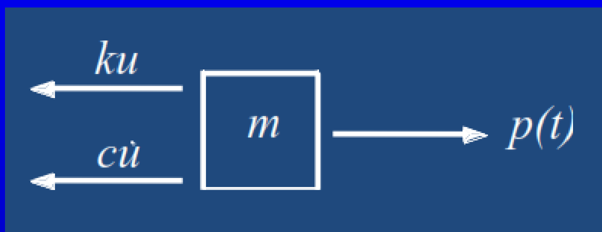
$$k = 2\left(\frac{12EI}{h^3}\right)$$

$$k = \frac{24EI}{h^3}$$

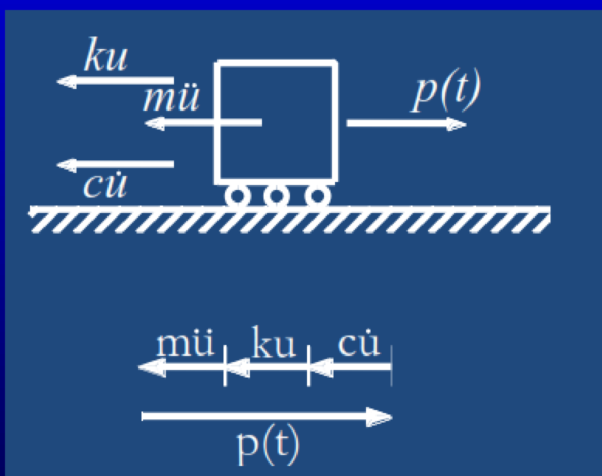


Formulação das equações de movimento

Oscilador equivalente com um grau de liberdade



2ª Lei de Newton: $m\ddot{u} = p(t) - ku - c\dot{u}$



Princípio de D'Alembert: $p(t) - m\ddot{u} - c\dot{u} - ku = 0$

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = p(t)$$

Formulação das equações de movimento

Elementos essenciais do problema dinâmico linear

1 - Carregamento e resposta variáveis no tempo	$p(t)$ e $u(t)$	
2 - Presença da força de inércia	$m\ddot{u}$	$(m > 0)$
3 - Presença de dissipação de energia	$c\dot{u}$	$(c \geq 0)$
4 - Sistema com rigidez k e força elástica	ku	$(k > 0)$

Características do modelo matemático

- Equação diferencial de 2ª ordem
- Para obter a resposta dinâmica u(t) é necessário integrá-la duas vezes e considerar as condições iniciais
- Vibrações livres: $p(t) = 0$

  $m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = 0$ com amortecimento

  $m\ddot{u} + ku = 0$ sem amortecimento
- Vibrações forçadas: $p(t) \neq 0$

  $m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = p(t)$ com amortecimento

  $m\ddot{u} + ku = p(t)$ sem amortecimento

Vibração livre

$$p(t) \equiv 0$$

$$u(t) = u_0 e^{rt} \qquad u_0, r \quad \text{constantes}$$

$$\left(mr^2 + cr + k\right) u_0 e^{rt} = 0$$

Para $u_0 \neq 0 \implies$
$$mr^2 + cr + k = 0$$
$$r = \frac{1}{2m}\left(-c \pm \sqrt{c^2 - 4mk}\right)$$

- Amortecimento supercrítico $\quad c > \sqrt{4mk}$

$$u(t) = Ae^{r_1 t} + Be^{r_2 t} \qquad r_1, r_2 \quad \text{negativos} \quad \text{(decaimento sem oscilação)}$$

- Amortecimento crítico $\quad c = \sqrt{4mk}$

$$u(t) = (A + Bt)e^{rt} \qquad r = -\frac{c}{2m} \quad \text{negativo (decaimento sem oscilação)}$$

- Amortecimento subcrítico $c < \sqrt{4mk}\,, \quad r = -\xi\omega \pm i\omega_D$

$$u(t) = e^{-\xi\omega t}\left[A\,\text{sen}\,\omega_D t + B\cos\omega_D t\right] = e^{-\xi\omega t}\rho\cos\left(\omega_D t - \theta\right)$$ (decaimento com oscilação)

$\xi = \dfrac{c}{2m\omega} < 1$ taxa de amortecimento

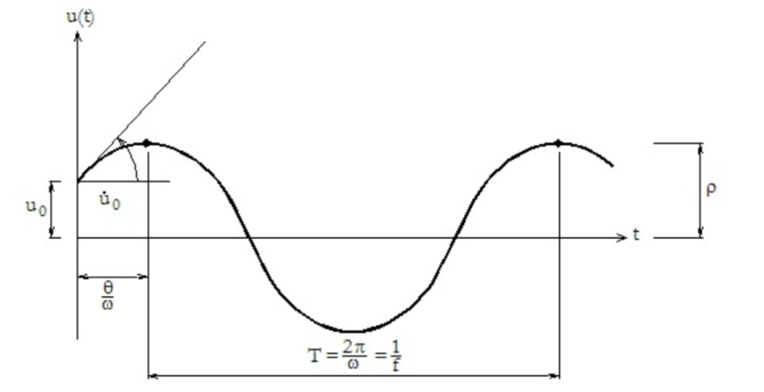
$\omega = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$ freqüência natural não-amortecida

$\omega_D = \omega\sqrt{1-\xi^2}$ freqüência natural amortecida

- Caso particular: vibrações não amortecidas $c = 0\,, \quad r = \pm i\omega$

$$u(t) = A\,\text{sen}\,\omega t + B\cos\omega t = \rho\cos\left(\omega t - \theta\right)$$

- Vibrações não amortecidas



$$u_0 = \rho\cos\theta$$
$$\dot{u}_0 = \omega\rho\,\mathrm{sen}\,\theta$$

$$\Rightarrow \quad \rho = \sqrt{u_0^2 + \left(\frac{\dot{u}_0}{\omega}\right)^2}$$

$$\theta = \arctan\frac{\dot{u}_0}{\omega u_0},\ -\frac{\pi}{2} \le \theta \le \frac{\pi}{2}$$

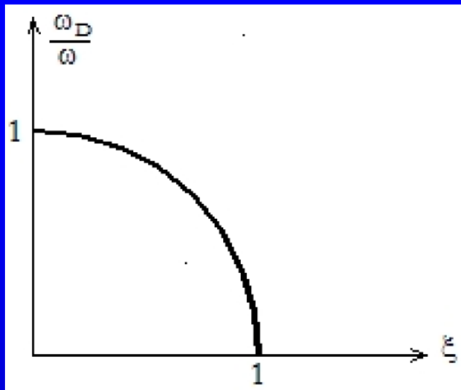
- Vibrações com amortecimento subcrítico

$$u_0 = \rho\cos\theta$$
$$\dot{u}_0 = -\xi\omega\rho\cos\theta + \omega_D\rho\,\mathrm{sen}\,\theta$$

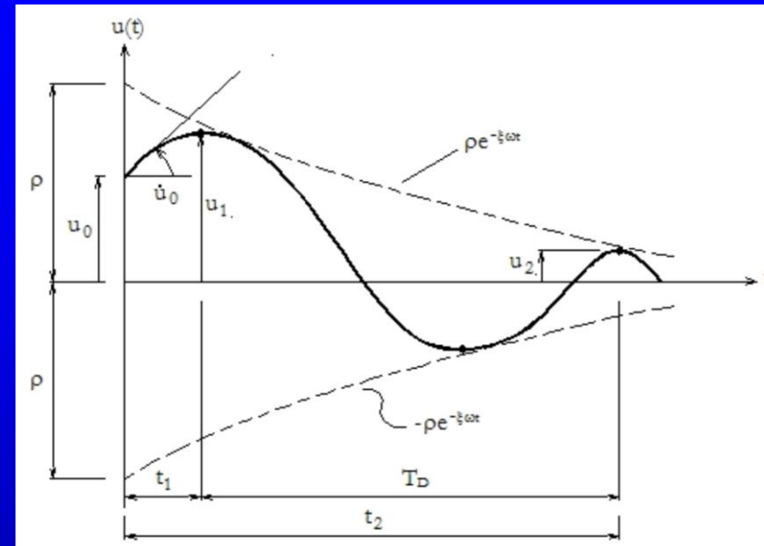
$$\Rightarrow \quad \rho = \sqrt{u_0^2 + \left(\frac{\dot{u}_0 + \xi\omega u_0}{\omega_D}\right)^2} \qquad \theta = \arctan\frac{\dot{u}_0 + \xi\omega u_0}{\omega_D u_0}$$

$$-\frac{\pi}{2} \le \theta \le \frac{\pi}{2}$$

- Vibrações com amortecimento subcrítico



$$\left(\frac{\omega_D}{\omega}\right)^2 = 1 - \xi^2$$



$$\frac{u_1}{u_2} = e^{\xi\omega T_D} = e^{2\pi\xi\left(\frac{\omega}{\omega_D}\right)} = e^{\frac{2\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}} \cong e^{2\pi\xi}$$

$$t_1 = \frac{\theta-\alpha}{\omega_D}, \text{ sendo } \alpha = \arctan\left(\frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}\right)$$

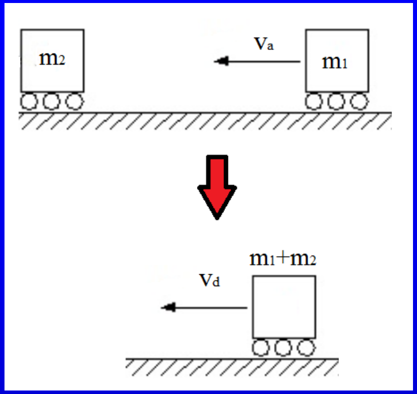
- Relação entre decremento logarítmico e taxa de amortecimento

$$\delta = \ln\frac{u_1}{u_2}$$

$$\xi = \frac{\delta}{2\pi}$$

Choque Mecânico: hipóteses

1. Choque é perfeitamente inelástico
2. Quantidade de movimento se conserva
3. A favor da segurança, despreza-se o amortecimento



De 2: $m_1 v_a = (m_1 + m_2) v_d \Rightarrow v_d = \dfrac{m_1}{m_1 + m_2} v_a$

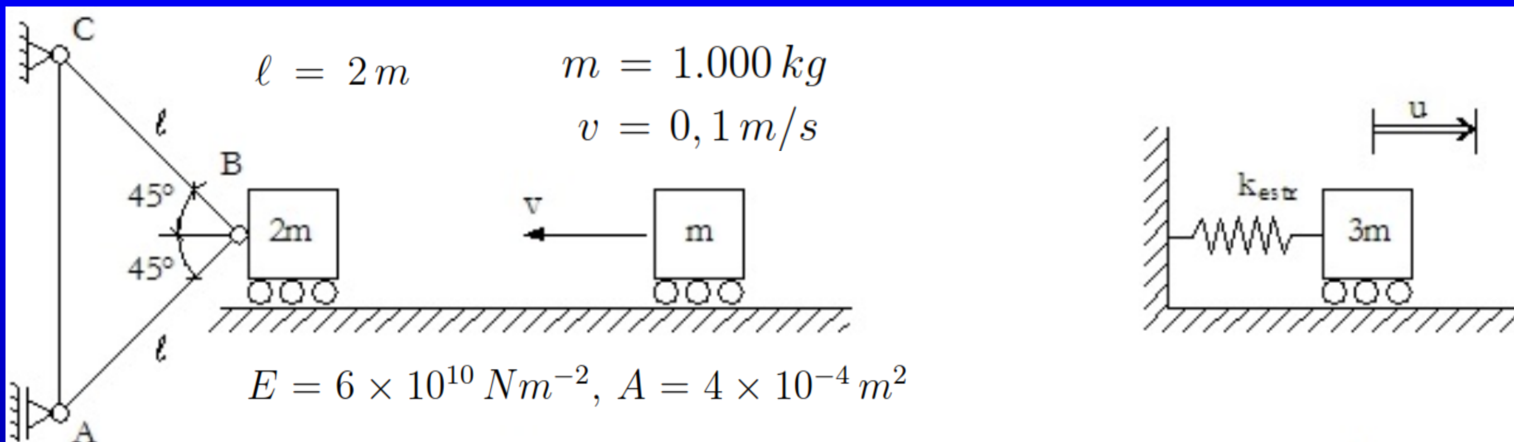
De 1 e 2: a energia mecânica não se conserva

$$E_{diss} = \frac{1}{2} m_1 v_a^2 - \frac{1}{2}(m_1 + m_2) v_d^2 = \frac{1}{2} m_1 v_a^2 - \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\left(\frac{m_1}{m_1 + m_2} v_a\right)^2 = \frac{1}{2} m_1 v_a^2 \underbrace{\left(1 - \frac{m_1}{m_1 + m_2}\right)}_{<1}$$

De 3: vibrações livres não amortecidas

Choque Mecânico Horizontal

Exemplo

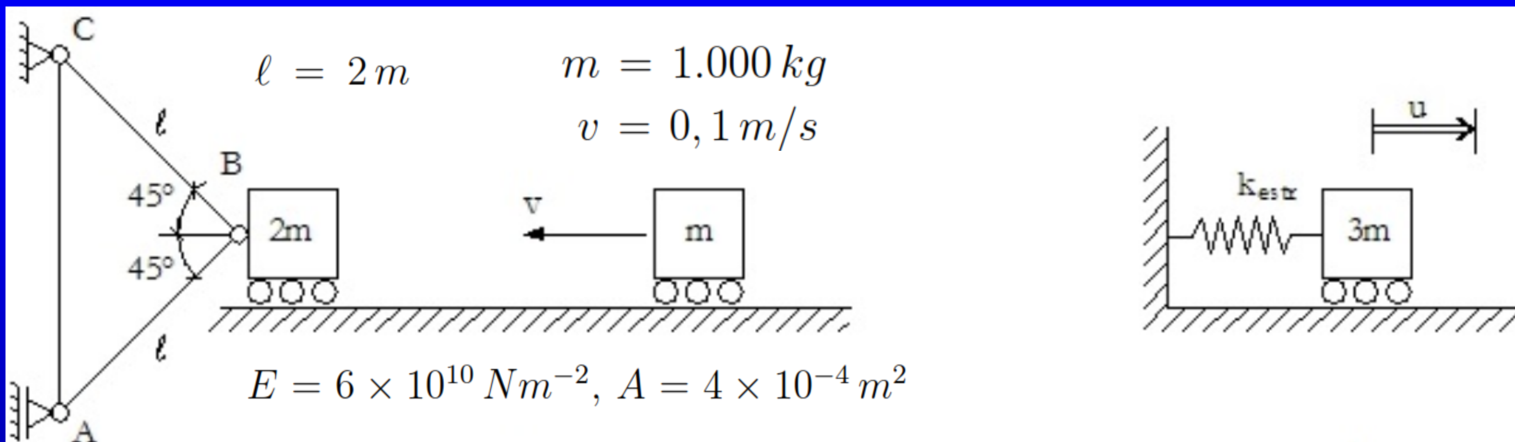


$$\ddot{u} + \omega^2 u = 0 \qquad u_0 = 0 \qquad \dot{u}_0 = -\frac{v}{3}$$

$$k_{estr} = \frac{EA}{\ell}\left(\frac{4}{4+\sqrt{2}}\right) = 8,866 \times 10^6\,N/m \qquad \omega = \sqrt{\frac{k_{estr}}{3m}} = 54,36\,rad/s \Rightarrow u\,(t) = -0,000613\,\mathrm{sen}\,(54,36t)$$

Choque Mecânico Horizontal

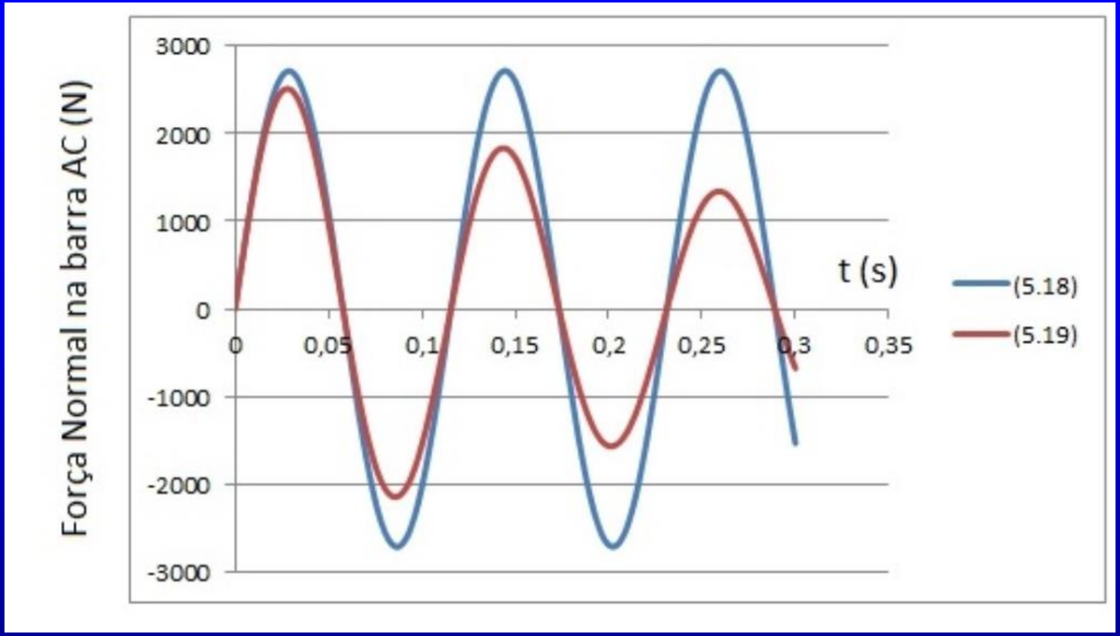
Exemplo



$$
\begin{aligned}
F_{max} &= k_{estr}\rho = 5436\,N \\
|N_{AB}|_{max} &= |N_{BC}|_{max} = 3844\,N \qquad \text{(compressão)} \\
N_{AC} &= 2718\,N \qquad \text{(tração)}
\end{aligned}
$$

Choque Mecânico Horizontal

Exemplo



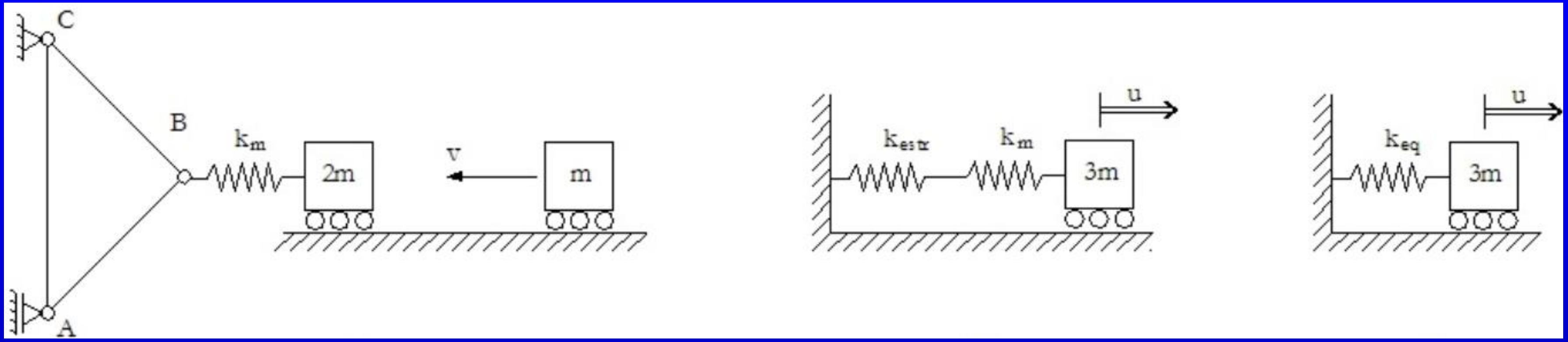
$$N_{AC}^{0}(t) = \frac{1}{2} k_{estr} \rho \cos(\omega t - \theta) = 2718 \text{sen}(54,36t) \ N. \qquad (5.18)$$

$\xi = 0,05$ e $\omega_D \cong \omega$ ⇨

$$N_{AC}^{\xi}(t) = \frac{1}{2} k_{estr} e^{-\xi \omega t} \rho \cos(\omega_D t - \theta) \cong 2718 e^{-2,718t} \text{sen}(54,36t) \ N. \qquad (5.19)$$

Choque Mecânico Horizontal

Exemplo: com associação série



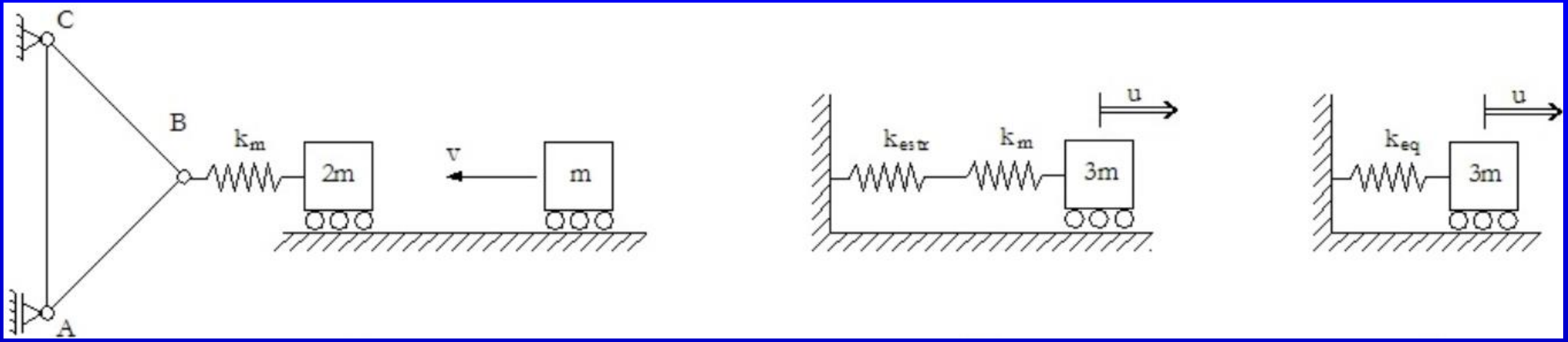
$$u = \frac{F}{k_{eq}} = \frac{F}{k_{estr}} + \frac{F}{k_m} \Rightarrow k_{eq} = \frac{k_{estr}k_m}{k_{estr}+k_m} \Rightarrow \omega' = \sqrt{\frac{k_{eq}}{3m}} \Rightarrow \rho' = \frac{|\dot{u}_0|}{\omega'} = \frac{v}{3\sqrt{\frac{k_{eq}}{3m}}}$$

$$F_{max} = k_{eq}\rho' \Rightarrow \rho'_{estr} = \frac{F_{max}}{k_{estr}} = \left(\frac{k_{eq}}{k_{estr}}\right)\rho'$$

$$\rho'_{estr} = \left(\frac{k_{eq}}{k_{estr}}\right)\frac{v}{3\sqrt{\frac{k_{eq}}{3m}}} = \frac{v}{3\sqrt{\frac{k_{estr}}{3m}}}\left(\frac{k_{eq}}{k_{estr}}\right)\sqrt{\frac{k_{estr}}{k_{eq}}} = \rho\sqrt{\frac{k_{eq}}{k_{estr}}} = \rho\sqrt{\frac{k_m}{k_{estr}+k_m}}$$

Choque Mecânico Horizontal

Exemplo: com associação série

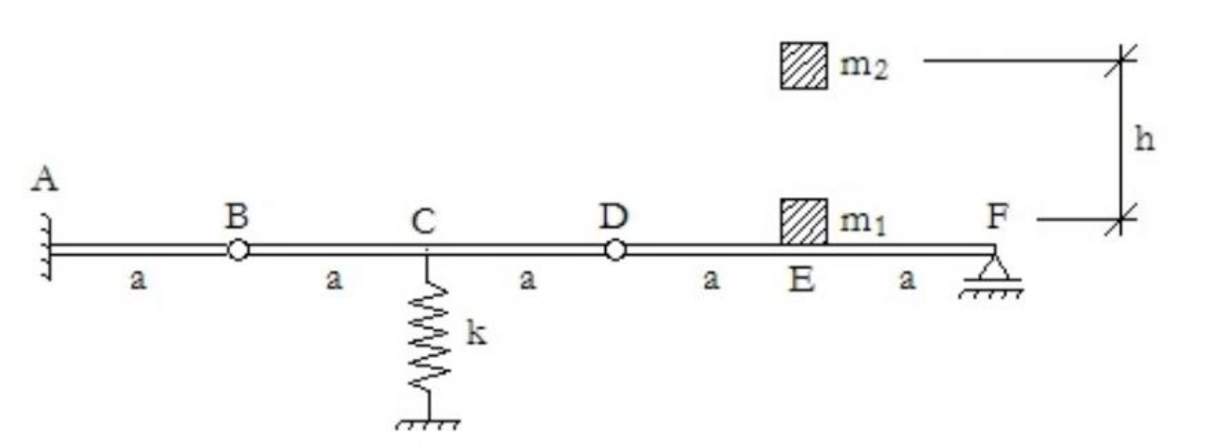


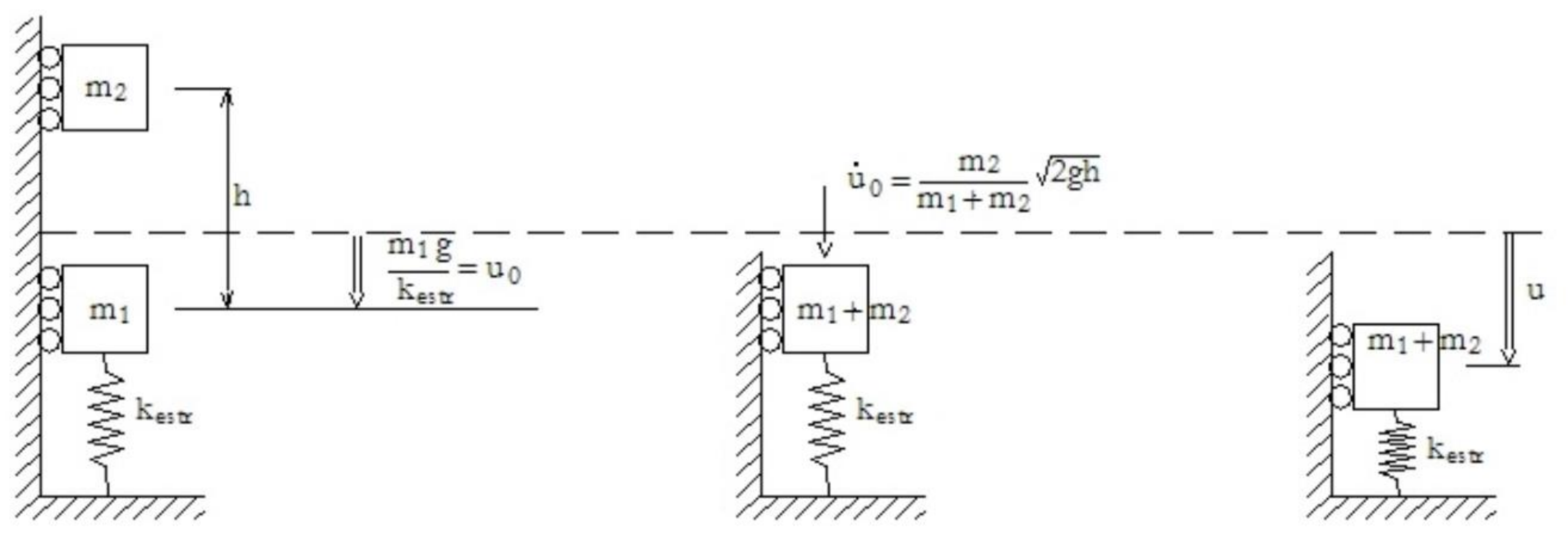
Critério de projeto: $$\rho'_{estr} = \frac{1}{2}\rho$$ ⇒ $$\frac{k_m}{k_{estr} + k_m} = \frac{1}{4}$$

$$k_m = \frac{k_{estr}}{3} = 2,955 \times 10^6 \; N/m$$

Choque Mecânico Vertical

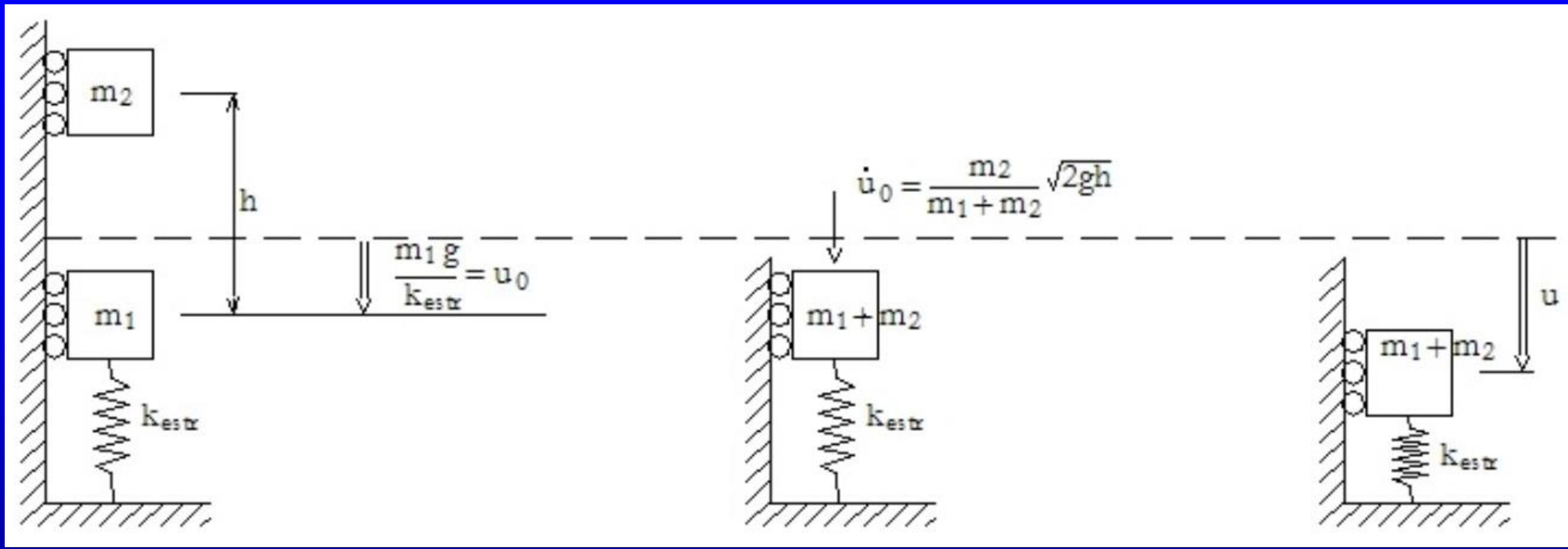
Exemplo





Choque Mecânico Vertical

Exemplo



$$(m_1 + m_2)\,\ddot{u} + k_{estr} u = (m_1 + m_2)\, g$$

$$u(t) = \frac{(m_1 + m_2)\, g}{k_{estr}} + \rho \cos(\omega t - \theta)$$

$$\omega = \sqrt{\frac{k_{estr}}{m_1 + m_2}}$$

$$u_0 = \frac{m_1 g}{k_{estr}} = \frac{(m_1 + m_2)\, g}{k_{estr}} + \rho \cos\theta$$

$$\dot{u}_0 = \frac{m_2}{m_1 + m_2}\sqrt{2gh} = \omega \rho \operatorname{sen}\theta$$

$$\rho = m_2 \sqrt{\frac{g}{k_{estr}}\left(\frac{2h}{m_1 + m_2} + \frac{g}{k_{estr}}\right)}$$

$$u_{max} = D u_e$$

$$u_e = \frac{(m_1 + m_2)\, g}{k_{estr}}$$

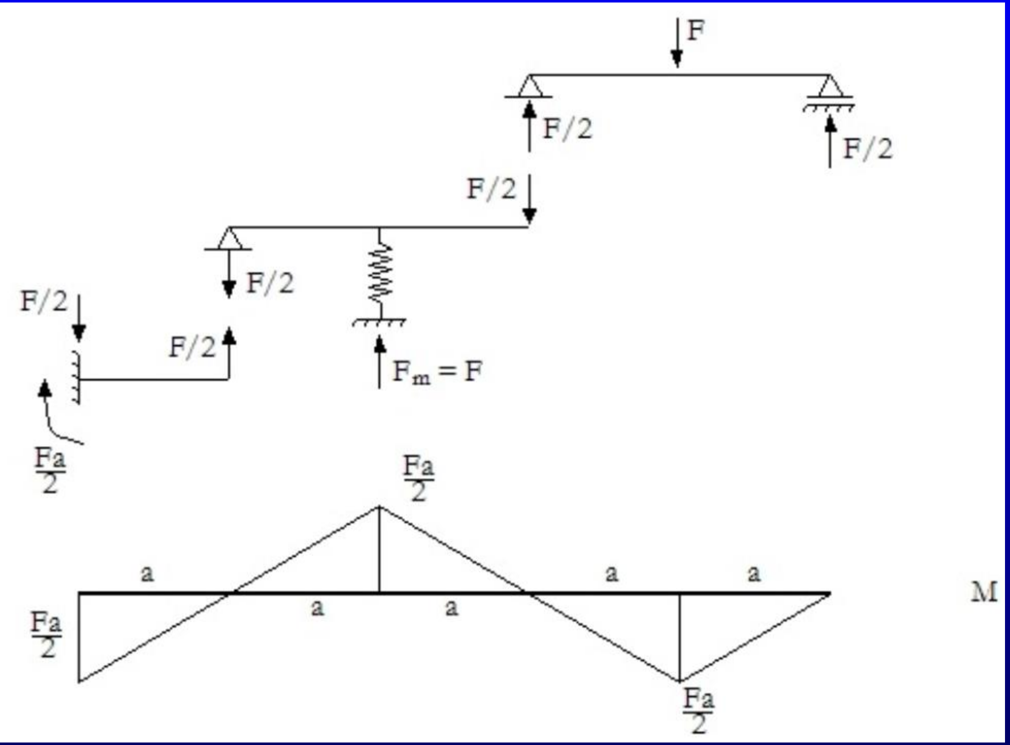
$$D = 1 + \frac{m_2}{m_1 + m_2}\sqrt{1 + \frac{2h}{u_e}}$$

Choque Mecânico Vertical

Exemplo: qual a altura de queda para $D = \dfrac{u_{\max}}{u_e} = 2$?

$$m_1 = 3000\,kg,\ m_2 = 750\,kg,\ u_{max} = 0,2\,m,\ EI = 2\times10^6\,Nm^2,\ a = 2\,m \text{ e } k = 10^6\,Nm^{-1}$$

Teorema dos Esforços Virtuais
ou
Segundo Teorema de Castigliano



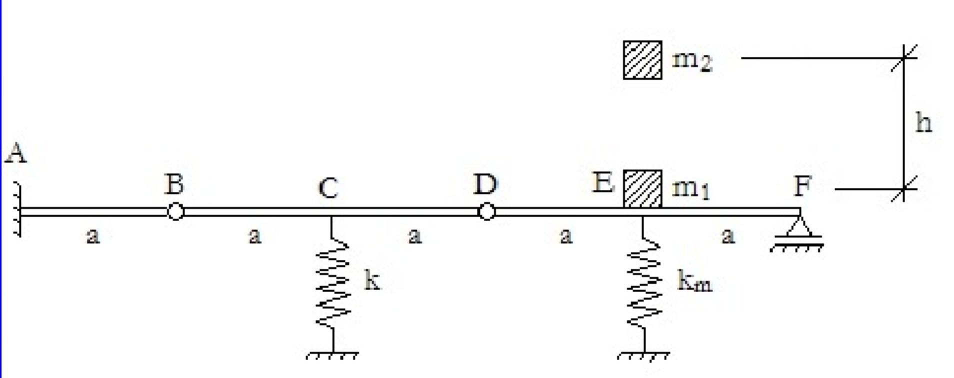
$$k_{estr} = \frac{F}{u} = \frac{1}{\frac{5a^3}{12EI} + \frac{1}{k}}$$

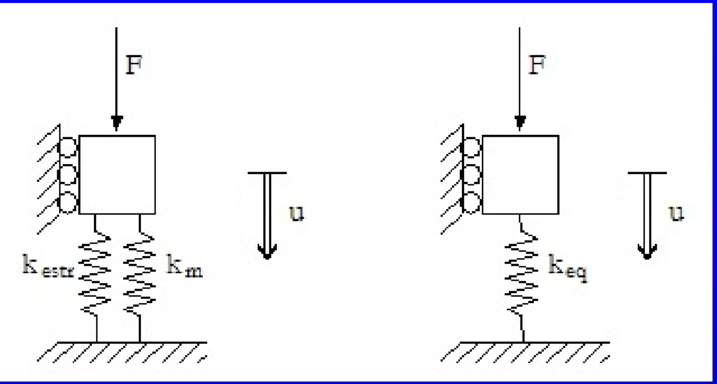
$$k_{estr} = 375000\,\frac{N}{m}$$
$$u_0 = 0,08\,m,$$
$$u_e = 0,1\,m,$$

$$D = \frac{u_{max}}{u_e} = 2 = 1 + \frac{750}{3750}\sqrt{1 + \frac{2h}{0,1}} \Rightarrow h = 1,2\,m$$

Choque Mecânico Vertical

Exemplo: com associação paralelo





$$u = \frac{F}{k_{eq}} = \frac{F_{estr}}{k_{estr}} = \frac{F_m}{k_m}$$

$$F = F_{estr} + F_m \,.$$

$$k_{eq} u = k_{estr} u + k_m u, \qquad \forall u,$$

$$k_{eq} = k_{estr} + k_m.$$

Choque Mecânico Vertical

Exemplo: com associação paralelo

Novo deslocamento estático

$$u'_e = \frac{(m_1+m_2)\,g}{k_{eq}} = \frac{(m_1+m_2)\,g}{k_{estr}}\left(\frac{k_{estr}}{k_{eq}}\right) = u_e\left(\frac{k_{estr}}{k_{eq}}\right) = \frac{0,1}{\alpha}$$

$$\alpha = \frac{k_{eq}}{k_{estr}}$$

$$k_{eq} \; > \; k_{estr}$$

Critério de projeto: para a mesma altura de queda, deseja-se $u'_{max} = 0,1\,m$

$$D' = \frac{u'_{max}}{u'_e} = \frac{0,1}{\frac{0,1}{\alpha}} = \alpha = 1 + \frac{750}{3750}\sqrt{1 + \frac{2\times 1,2}{0,1}\alpha}$$

$$\alpha = 2,5892$$

$$k_{eq} = 2,5892\,k_{estr} = k_{estr} + k_m$$

$$k_m = 1,5892\,k_{estr} = 5,960\times 10^5\;N/m$$