MAT 0147: Cálculo II (T21-FEA-USP)

Conjuntos abertos, fechados e aplicações contínuas.

Guia resumido

Setembro 2020

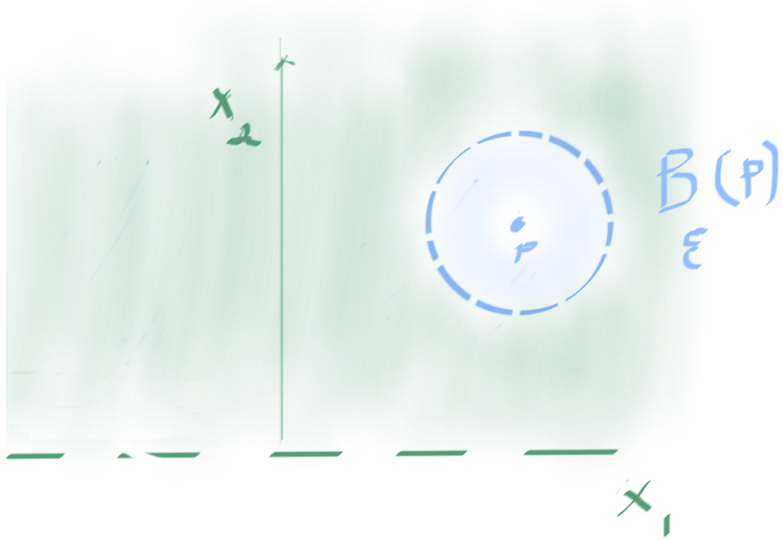
Alerta: Este é apenas um guia resumido de parte das transparências das aulas. Ele não substitui as aulas (onde existem discussões, resoluções de exercícios, figuras, etc) e não substitui a leitura da bibliografia recomendada.

Objetivo: Estudar domínios e continuidades de funções (tais como as funções utilidades) $f : U \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ e aplicações $F : U \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$.

Conjuntos abertos, fechados e bordo

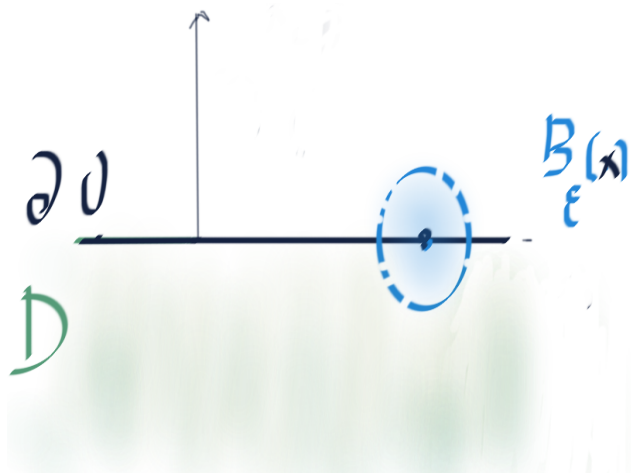
Def: Um conjunto $U \subset \mathbb{R}^m$ é chamado um **conjunto aberto** se para cada $p \in U$ existe um raio $\epsilon > 0$ tal que $B_\epsilon(p) \subset U$

Ex: $U = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 | x_2 > 0\}$



Def: Um conjunto $D \subset \mathbb{R}^m$ é chamado **um conjunto fechado** se seu complementar $D^c = \{x \in \mathbb{R}^m, x \notin D\}$ é aberto.

Ex: $D = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 | x_2 \leq 0\}$



Def: A **fronteira ou bordo** de um conjunto $U \subset \mathbb{R}^m$ é o conjunto

$$\partial U = \{x \in \mathbb{R}^m | \ \forall \ \epsilon \ B_\epsilon(x) \cap U \neq \emptyset \ \text{ e } \ B_\epsilon(x) \cap U^c \neq \emptyset \}$$

Ex: Se $U = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 | x_2 > 0\}$ então
$\partial U = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 | x_2 = 0\}$

Obs: Em geral um conjunto será

- aberto se for definido por $<$, $>$
- fechado se for definido por $=$, $\leq$ e $\geq$
- fronteira se for definido por $=$

Para formalizar o conceito vago *em geral* precisaremos do conceito de funções contínuas.

Problema

Sejam x_1, x_2 o número de unidades das mercadorias A e B consumidas por uma pessoa. Sejam $\$\,2,00$ e $\$\,3,00$ os preços unitários de A e B respectivamente. Descreva em coordenadas euclidianas o espaço dos números de unidades das mercadorias, quando a despesas para mercadorias é ***no máximo*** *$\$\,10,00$ e esboce tal conjunto.*

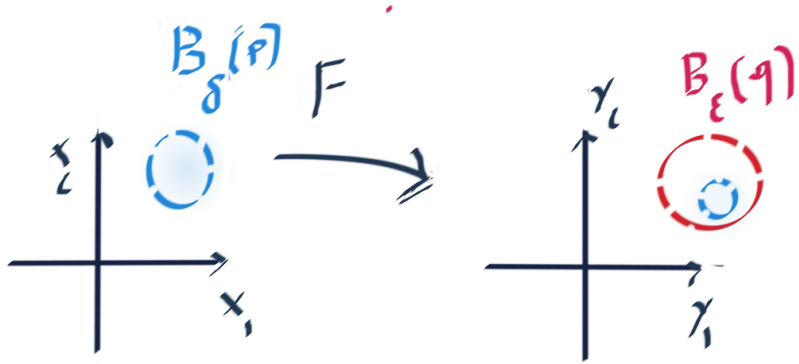
Limite

Def: Seja uma aplicação $F : U \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$. Dizemos que

$$\lim_{x \to p} F(x) = q$$

se para qualquer $\epsilon > 0$, existe um $\delta > 0$ tal que

$$F(B_\delta(p)) \subset B_\epsilon(q)$$



Obs: Tal como em Calculo I, podemos definir limites via sequências (as duas definições são equivalentes).

Def: Uma sequência $\{p_j\}$ é uma função $\mathbb{N} \to \mathbb{R}^m$.

Def: Dizemos que $p_j \to p$ se para qualquer $\epsilon > 0$ existe um tempo N_0 tal que $\forall \quad j > N_0 \; p_j \in B_\epsilon(p)$

Def (alternativa): $\lim_{x \to p} F(x) = q$ se e somente se $\forall \; \{x_j\}$ tal que $x_j \to p$ temos que $F(x_j) \to q$.

Aplicação contínua

Def: Dizemos que $F : U \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ é **contínua em** $p \in U$ se

$$\lim_{x \to p} F(x) = F(p)$$

A aplicação F será **contínua** se for contínua em cada $p \in U$.

Proposição

(a) *Considere funções $f : U \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ contínuas. Então soma, diferença, produto, quociente (onde faz sentido) de funções contínuas são funções contínuas;*

Ex: A função linear $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida como $f(x) = x_1 + x_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ é contínua pois é a soma da função contínua $h(x) = x_1$ com a função contínua $g(x) = x_2$.

Proposição

(b) *Uma aplicação* $F : U \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ *definida como* $F(x) = (f_1(x), \cdots, f_n(x))$ *é uma aplicação contínua SSE* $f_i : U \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ *é continua para todo* i

Ex: $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $F(x) = (\frac{1}{\sqrt{2}}x_1 - \frac{1}{\sqrt{2}}x_2, \frac{1}{\sqrt{2}}x_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}x_2)$ ou seja $F(x) = Ax$ onde $A = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$ é contínua, pois suas funções componentes $f_1(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}x_1 - \frac{1}{\sqrt{2}}x_2$ e $f_2(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}x_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}x_2$ são contínuas.

Ex: A curva parametrizada $\alpha : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$ definida como $\alpha(\theta) = (2\cos(\theta), 2\sin(\theta))$ é contínua, pois suas funções componentes $\alpha_1(\theta) = 2\cos(\theta)$ e $\alpha_2(\theta) = 2\sin(\theta)$ são funções contínuas.

Proposição

(c) *Suponha que as aplicações* $F : A \subset \mathbb{R}^m \to B \subset \mathbb{R}^n$ *e* $G : B \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ *são contínuas então a aplicação composta* $G \circ F : A \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^k$ *é contínua.*

Prob: Verifique que a função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida como $f(x) = d(x, R)$ onde $R = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 | 2x_1 + 2x_2 = 0\}$ é contínua.

Dica: Ou use a formula da função distancia de um ponto a uma reta junto com o item (a) ou verifique que f é composta por $h(x) = x_1$ com uma rotação.

Pré-imagem de função contínua

Proposição

Seja $g : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ *uma função contínua. Então:*

1. $g^{-1}(c) = \{x \in \mathbb{R}^m | g(x) = c\}$ *é fechado;*
2. $g^{-1}[a, \infty) = \{x \in \mathbb{R}^m | a \leq g(x)\}$ *é fechado;*
3. $g^{-1}(a, b) = \{x \in \mathbb{R}^m | a < g(x) < b\}$ *é aberto;*
4. *união de abertos é aberto;*
5. *Interseção de fechados é fechado,*
6. *interseção finita de abertos é aberto;*
7. *união finita de fechados é fechado;*

Prob: Seja $\Omega = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 | \, x_2 \leq 3, 0 \leq x_1 \leq 4x_2\}$

(a) Esboce o conjunto Ω.

(b) Diga se Ω é fechado, aberto ou nenhum dos dois.

Observações sobre limites de funções

Proposição

Sejam $f : U \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, $\alpha : (0-\epsilon, 0+\epsilon) \to \mathbb{R}^m$ *e* $\beta : (0-\epsilon, 0+\epsilon) \to \mathbb{R}^m$ *com* $\alpha(0) = p = \beta(0)$ *onde* $p \in \partial U$. *Se* $\lim_{t\to 0} f(\alpha(t)) \neq \lim_{t\to 0} f(\beta(t))$ *então* $\lim_{x\to p} f(x)$ *não existe.*

Prob Seja $f(x_1, x_2) = \frac{x_1^2 x_2}{x_1^4 + x_2^2}$. Verifique que o limite não existe quando $p = (0, 0)$.

Dica: Considere $\alpha(t) = (0, t)$ e $\beta(t) = (t, t^2)$

Proposição

Sejam $f : U \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ *e* $g : U \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ *tal que* $\lim_{x \to p} f = 0$ *e* $|g| < K$ *onde* $K > 0$ *é uma constante. Então* $\lim_{x \to p} f(x)g(x) = 0$

Prob Sejam $f(x_1, x_2) = \frac{x_2 x_1^2 \cos(x_1^2 + x_2^2)}{x_1^2 + x_2^2}$ e $p = (0, 0)$. Calcule $\lim_{x \to p} f(x)$