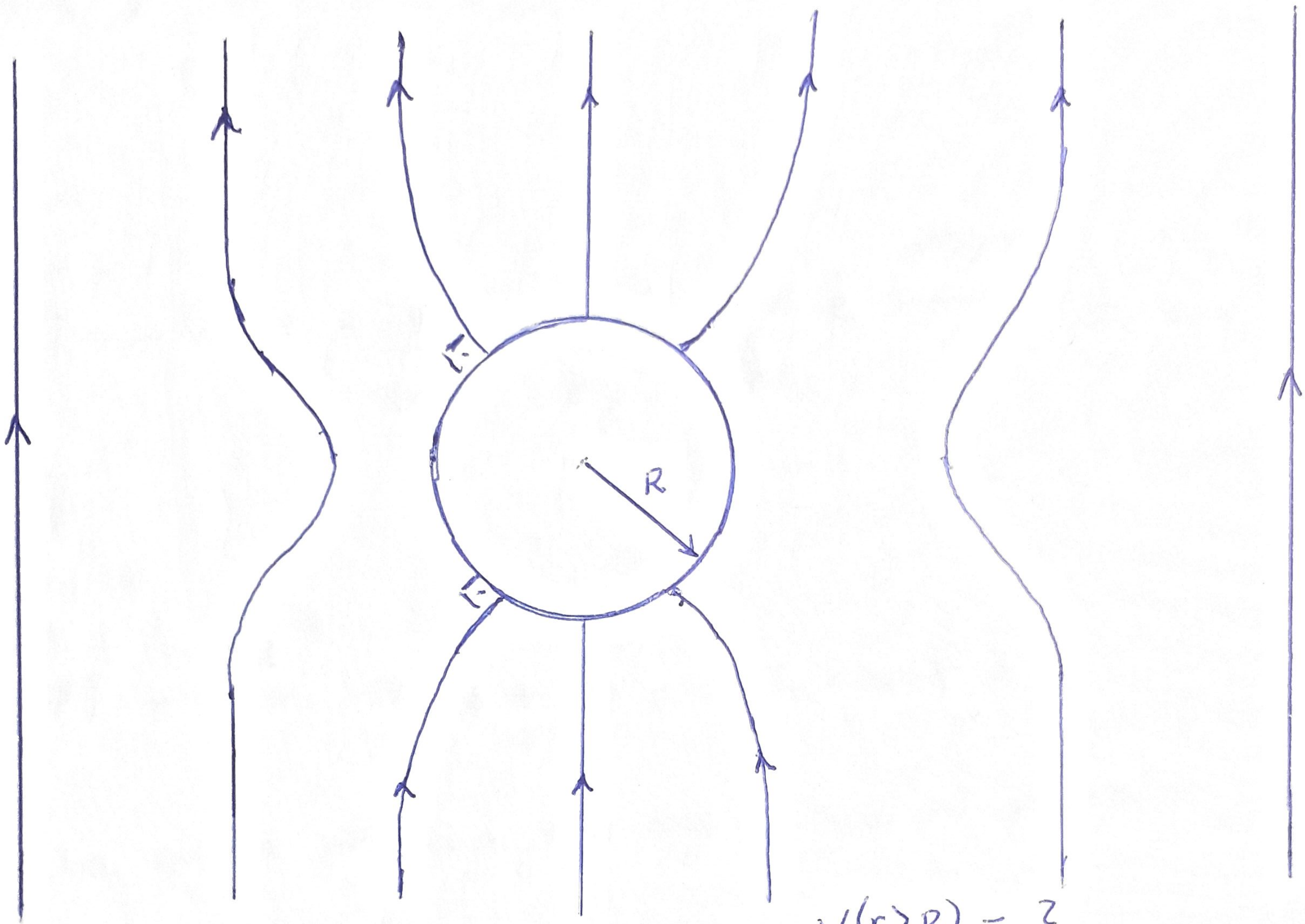
15/09/2020

Esfera condutora neutra de raio R num campo elétrico externo inicialmente uniforme $\vec{E}_{ext} = E_0 \hat{z}$ ①



$V(r > R) = ?$

A presença da esfera condutora deve deformar as linhas de campo inicialmente uniformes.

O campo elétrico no interior da esfera é nulo.

A superfície da esfera $(r = R)$ é uma equipotencial, logo

$$V(r = R) = C$$

onde C pode ser tomada como zero sem perda de generalidade neste caso.

Para pontos muito distantes da esfera

$$\vec{E}(\vec{r}) \xrightarrow{r \gg R} \vec{E}_{ext} = E_0 \hat{z} = -\vec{\nabla} V$$

Então

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\vec{\nabla} V = -\frac{\partial V}{\partial x}\hat{x} - \frac{\partial V}{\partial y}\hat{y} - \frac{\partial V}{\partial z}\hat{z} \xrightarrow{r \gg R} E_0 \hat{z}$$

Portanto

$$V(\vec{r}) \xrightarrow{r \gg R} -E_0 z + D = -E_0 r \cos\theta + D$$

Perceba que o potencial não vai a zero no infinito.

Condições de contorno

$$\begin{cases} V = 0, \quad r = R & (1) \\ V = -E_0 r \cos\theta + D, \quad r \to \infty & (2) \end{cases}$$

Este problema tem simetria azimutal

$$V(r, \theta) \Rightarrow \frac{\partial V}{\partial \phi} = 0$$

A solução geral para $V(\vec{r})$ é dada por

$$V(\vec{r}) = V(r,\theta) = \sum_{l=0}^{\infty} \left(A_l r^l + \frac{B_l}{r^{l+1}} \right) P_l(\cos\theta)$$

Aplicando a condição de contorno (1):

$$\sum_{l=0}^{\infty} \left(A_l R^l + \frac{B_l}{R^{l+1}} \right) P_l(\cos\theta) = V(R,\theta) = 0 \quad \forall\ \theta \in [0,\pi]$$

$$\Downarrow$$

$$A_l R^l + \frac{B_l}{R^{l+1}} = 0 \Rightarrow B_l = -R^{2l+1} A_l \quad (l = 0, 1, 2, \dots)$$

Portanto

$$V(\vec{r}) = \sum_{l=0}^{\infty} \left(r^l - \frac{R^{2l+1}}{r^{l+1}} \right) A_l P_l(\cos\theta)$$

Aplicando a condição (2):

$$V(r \gg R, \theta) \longrightarrow \sum_{l=0}^{\infty} A_l r^l P_l(\cos\theta) = -E_0 r \cos\theta + D$$

$$= -E_0 r P_1(\cos\theta) + D P_0(\cos\theta)$$

Então, usando a ortogonalidade dos polinômios de Legendre

$$\sum_{l=0}^{\infty} A_l r^l \int_0^{\pi} P_l(\cos\theta)\, P_{l'}(\cos\theta) \sin\theta \, d\theta$$

$$= -E_0 r \int_0^{\pi} P_1(\cos\theta)\, P_{l'}(\cos\theta) \sin\theta \, d\theta + D \int_0^{\pi} P_0(\cos\theta)\, P_{l'}(\cos\theta) \sin\theta \, d\theta$$

$x = \cos\theta$

$$\sum_{l=0}^{\infty} A_l r^l \underbrace{\int_{-1}^{1} P_l(x)\, P_{l'}(x)\, dx}_{= \frac{2}{2l+1} \delta_{ll'}} = -E_0 r \underbrace{\int_{-1}^{1} P_1(x)\, P_{l'}(x)\, dx}_{= \frac{2}{3} \delta_{l'1}} + D \underbrace{\int_{-1}^{1} P_0(x)\, P_{l'}(x)\, dx}_{= 2 \delta_{l'0}}$$

Portanto

$$\frac{A_l}{2l+1} r^l = -\frac{E_0}{3} r \, \delta_{l1} + D \delta_{l0} \Rightarrow A_l = \begin{cases} D, & l = 0 \\ -E_0, & l = 1 \\ 0, & l > 1 \end{cases}$$

Então

$$V(r,\theta) = -\left(r - \frac{R^3}{r^2} \right) E_0 \cos\theta + \left(1 - \frac{R}{r} \right) D$$

Densidade de carga induzida

A derivada normal do potencial é descontínua na superfície da esfera devido à carga superficial induzida

$$\lim_{\epsilon\to 0}\left\{ \frac{\partial V}{\partial r}\Big|_{R+\epsilon} - \cancel{\frac{\partial V}{\partial r}}\Big|_{R-\epsilon} \right\} = \frac{\partial V(r>;R)}{\partial r}\Big|_{R} = -\frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

$$\frac{\partial V}{\partial r} = -\left(1+2\frac{R^3}{r^3}\right)E_0\cos\theta + \frac{R}{r^2}D$$

Portanto

$$\frac{\partial V}{\partial r}\Big|_{R} = -3\cos\theta\, E_0 + \frac{D}{R} \quad \Rightarrow \quad \sigma(\theta) = 3\epsilon_0 E_0\cos\theta - \frac{\epsilon_0 D}{R}$$

Carga total induzida

$$Q = R^2\int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi} d\theta\, \sigma(\theta)\sin\theta$$

$$= (2\pi)R^2\left\{ 3\epsilon_0 E_0 \cancel{\int_0^{\pi} \sin\theta\cos\theta\, d\theta} - \frac{\epsilon_0 D}{R}\int_0^{\pi}\sin\theta\, d\theta \right\}$$

$$= R^2\frac{2\pi\epsilon_0}{R} D\cos\theta\Big|_0^{\pi} = -\frac{4\pi\epsilon_0 R^2 D}{R} = 0 \Rightarrow D = 0$$

esfera neutra!

Então, para $r \geqslant R$

$$V(\vec{r}) = V(r,\theta) = -\left(r - \frac{R^3}{r^2}\right) E_0 \cos\theta$$

$$= \underbrace{-E_0 r \cos\theta}_{\text{potencial associado ao campo } \vec{E}_{ext}} + \underbrace{\frac{R^3}{r^2} E_0 \cos\theta}_{\text{potencial gerado pela carga superficial induzida}} \xrightarrow{r \gg R} -E_0 r \cos\theta$$

Densidade de carga superficial induzida

$$\sigma(\theta) = 3\epsilon_0 E_0 \cos\theta$$

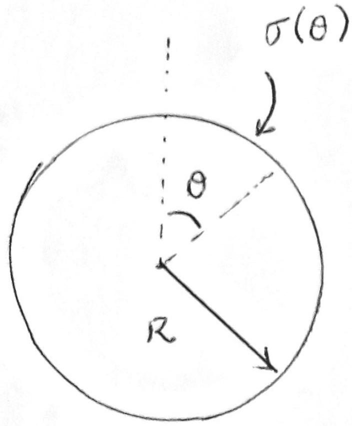
Campo elétrico para $r > R$:

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\vec{\nabla} V = -\frac{\partial V}{\partial r}\hat{r} - \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta}\hat{\theta} - \frac{1}{r\sin\theta}\cancelto{0}{\frac{\partial V}{\partial \phi}}\hat{\phi}$$

$$= \left(1 + 2\frac{R^3}{r^3}\right) E_0 \cos\theta\,\hat{r} - \left(1 - \frac{R^3}{r^3}\right) E_0 \sin\theta\,\hat{\theta}$$

$$\vec{E}(\vec{r}) \xrightarrow{r \gg R} E_0 \cos\theta\,\hat{r} - E_0 \sin\theta\,\hat{\theta} = E_0 \underbrace{\left(\cos\theta\,\hat{r} - \sin\theta\,\hat{\theta}\right)}_{=\hat{z}}$$

Potencial devido a uma densidade superficial de carga especificada $\sigma_0(\theta)$ sobre uma casca esférica de raio R



Determinar:

$$V(r \leq R) \quad e \quad V(r \geq R)$$

Solução geral:

$$V(r,\theta) = \sum_{l=0}^{\infty} \left(A_l r^l + \frac{B_l}{r^{l+1}} \right) P_l(\cos\theta)$$

No interior da casca, o potencial não possui singularidades, portanto

$$V(r \leq R) = \sum_{l=0}^{\infty} A_l r^l P_l(\cos\theta) = V_<$$

No exterior da casca, o potencial deve ir a zero no infinito, portanto

$$V(r \geq R) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{B_l}{r^{l+1}} P_l(\cos\theta) = V_>$$

Sabemos que o potencial é contínuo no cruzamento da superfície da casca

$$V_<(R) = V_>(R)$$

$$\Downarrow$$

$$\sum_{l=0}^{\infty} A_l R^l P_l(\cos\theta) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{B_l}{R^{l+1}} P_l(\cos\theta)$$

Logo, devido à ortogonalidade de $\{P_l\}$

$$B_l = R^{2l+1} A_l$$

Já a derivada normal de V é descontínua na superfície devido à presença da carga superficial com densidade $\sigma(\theta)$

$$\left.\frac{\partial V_>}{\partial r}\right|_R - \left.\frac{\partial V_<}{\partial r}\right|_R = -\frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

$$\frac{\partial V_<}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial r}\left\{\sum_{l=0}^{\infty} A_l r^l P_l(\cos\theta)\right\} = \sum_{l=0}^{\infty} l A_l r^{l-1} P_l(\cos\theta)$$

$$\left.\frac{\partial V_<}{\partial r}\right|_R = \sum_{l=0}^{\infty} l A_l R^{l-1} P_l(\cos\theta)$$

$$\frac{\partial V_>}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial r}\left\{ \sum_{l=0}^{\infty} \frac{R^{2l+1} A_l}{r^{l+1}} P_l(\cos\theta) \right\}$$

$$= - \sum_{l=0}^{\infty} (l+1) \frac{R^{2l+1}}{r^{l+2}} A_l P_l(\cos\theta)$$

$$\left.\frac{\partial V_>}{\partial r}\right|_R = - \sum_{l=0}^{\infty} (l+1) R^{l-1} A_l P_l(\cos\theta)$$

Então

$$- \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) R^{l-1} A_l P_l(\cos\theta) = - \frac{\sigma(\theta)}{\epsilon_0}$$

Usando **a ortogonalidade dos polinômios de Legendre:**

$$\sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) R^{l-1} A_l \underbrace{\int_0^{\pi} P_l(\cos\theta) P_{l'}(\cos\theta) \sin\theta \, d\theta}_{\frac{2}{2l+1}\delta_{ll'}} = \frac{1}{\epsilon_0} \int_0^{\pi} \sigma(\theta) P_l(\cos\theta) \sin\theta \, d\theta$$

$$2 R^{l-1} A_l = \frac{1}{\epsilon_0} \int_0^{\pi} \sigma(\theta) P_l(\cos\theta) \sin\theta \, d\theta$$

$$A_l = \frac{1}{2 \epsilon_0 R^{l-1}} \int_0^{\pi} \sigma(\theta) P_l(\cos\theta) \sin\theta \, d\theta$$

Por exemplo, para $\sigma(\theta) = \sigma_0 \cos(2\theta)$, σ_0 cte

$$\sigma(\theta) = \sigma_0 \cos(2\theta) = \sigma_0 \left(\cos^2\theta - \sin^2\theta \right)$$

$$= \sigma_0 \left(2\cos^2\theta - 1 \right) = \sigma_0 \underbrace{\left(2x^2 - 1 \right)}_{\text{polinômio de grau 2}}$$

Portanto $\sigma(\theta)$ deve ser uma combinação linear de:

$$\begin{cases} P_0 = 1 \\ P_1 = x \\ P_2 = \frac{1}{2}(3x^2 - 1) \end{cases} \Rightarrow \sigma(\theta) = \sigma_0 \left(\frac{4}{3} P_2 - \frac{1}{3} P_0 \right)$$

Portanto

$$A_\ell = \frac{\sigma_0}{2\epsilon_0 R^{\ell-1}} \int_{-1}^{1} \left(\frac{4}{3} P_2 - \frac{1}{3} P_0 \right) P_\ell(x)\, dx$$

$$\int_{-1}^{1} P_0(x) P_\ell(x)\, dx = 2\, \delta_{\ell 0}$$

$$\int_{-1}^{1} P_2(x) P_\ell(x)\, dx = \frac{2}{5} \delta_{\ell 2}$$

Logo

$$A_0 = -\frac{\sigma_0 R}{3\epsilon_0} \Rightarrow B_0 = -\frac{\sigma_0 R^2}{3\epsilon_0} = R A_0$$

$$A_2 = \frac{4}{15}\frac{\sigma_0}{\epsilon_0 R} \Rightarrow B_2 = R^3 A_2 = \frac{4}{15}\frac{\sigma_0 R^4}{\epsilon_0}$$

Finalmente

$$V_<(r) = -\frac{\sigma_0 R}{3\epsilon_0} + \frac{4\sigma_0}{15\epsilon_0}\frac{r^2}{R}\frac{1}{2}(3\cos^2\theta - 1) \quad , r \leqslant R$$

$$V_>(r) = -\frac{\sigma_0}{3\epsilon_0}\frac{R^2}{r} + \frac{4\sigma_0}{15\epsilon_0}\frac{R^4}{r^3}\frac{1}{2}(3\cdot\cos^2\theta - 1) \quad , r \geqslant R$$

Perceba que para $r = R$

$$V_<(R) = V_>(R) = -\frac{\sigma_0 R}{3\epsilon_0} + \frac{2\sigma_0 R}{15\epsilon_0}(3\cos^2\theta - 1)$$

Separação de variáveis em coordenadas cilíndricas

Exercício 13 – lista 1 c (potencial sem dependência em z)

Eq. de Laplace em coordenadas cilíndricas

$$\frac{1}{s}\frac{\partial}{\partial s}\left(s\frac{\partial V}{\partial s}\right)+\frac{1}{s^2}\frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2}+\cancelto{0}{\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}}=0$$

Procuraremos por soluções do tipo

$$V(s,\phi)=S(s)\,\Phi(\phi)$$

$$\Phi\,\frac{1}{s}\frac{d}{ds}\left(s\frac{dS}{ds}\right)+\frac{S}{s^2}\frac{d^2\Phi}{d\phi^2}=0$$

Multiplicando por $\dfrac{s^2}{S\Phi}$:

$$\underbrace{\frac{s}{S}\frac{d}{ds}\left(s\frac{dS}{ds}\right)}_{\text{só depende de } s}+\underbrace{\frac{1}{\Phi}\frac{d^2\Phi}{d\phi^2}}_{\text{só depende de } \phi}=0$$

Então

$$\frac{s}{S}\frac{d}{ds}\left(s\frac{dS}{ds}\right) = K^2 \quad e \quad \frac{1}{\Phi}\frac{d^2\Phi}{d\phi^2} = -K^2$$

$$\frac{d^2\Phi}{d\phi^2} = -K^2\Phi \Rightarrow \Phi(\phi) = A\cos(K\phi) + B\sin(K\phi)$$

a função $\Phi(\phi)$ deve ser periódica

$$\Phi(\phi+2\pi) = \Phi(\phi) \Rightarrow \begin{cases} \cos(\phi + 2\pi K) = \cos\phi \\ \sin(\phi+2\pi K) = \sin\phi \end{cases} \quad \forall\,\phi$$

Logo

$$K = 0, 1, 2, \cdots$$

Para a eq. radial, temos então

$$s\frac{d}{ds}\left(s\frac{dS}{ds}\right) = K^2 S \quad \text{ou} \quad s^2\frac{d^2S}{ds^2} + s\frac{dS}{ds} - K^2 S = 0$$

ansatz: $S(s) = s^\alpha$, para $K \neq 0$

$$s\frac{d}{ds}\left(s\,\alpha\, s^{\alpha-1}\right) = K^2 s^\alpha$$

$$s\left\{\alpha s^{\alpha-1} + s\,\alpha(\alpha-1)s^{\alpha-2}\right\} = K^2 s^\alpha$$

$$\alpha s^\alpha + \alpha(\alpha-1)s^\alpha = K^2 s^\alpha$$

Logo

$$\alpha^2 = K^2 \Rightarrow \alpha = \pm K$$

Portanto

$$S(s) = C s^{K} + D s^{-K} \quad , \quad K = 1, 2, \ldots$$

Para $K = 0$:

$$s \frac{d}{ds}\left(s \frac{dS}{ds} \right) = 0 \Rightarrow \frac{d}{ds}\left(s \frac{dS}{ds} \right) = 0 \Rightarrow s \frac{dS}{ds} = E$$

Então

$$\frac{dS}{ds} = \frac{E}{s} \Rightarrow S(s) = E \ln s + F \quad , \quad K = 0$$

Logo, a solução mais geral da eq. de Laplace em coordenadas cilíndricas para potencial sem dependência em z é

$$V(s,\phi) = a_0 + b_0 \ln s + \sum_{K=1}^{\infty} \left\{ s^{K} \left[a_K \cos(K\phi) + b_K \sin(K\phi) \right] + s^{-K} \left[c_K \cos(K\phi) + d_K \sin(K\phi) \right] \right\}$$