Resolução da Primeira prova

Nícolas André da Costa Morazotti

8 de setembro de 2020

1 Primeira Questão

No circuito da figura 1, a força eletromotriz fornecida pela fonte de tensão é $\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 \cos(\omega t)$, onde

$$\mathcal{E}_0 = 1.6V; \tag{1}$$
$$\omega = 10\text{rad/s}. \tag{2}$$

A chave bipolar está ligada ao ramo externo há muito tempo. O circuito está, portanto, no regime estacionário. Encontre a carga $q(t)$ no capacitor em função do tempo.

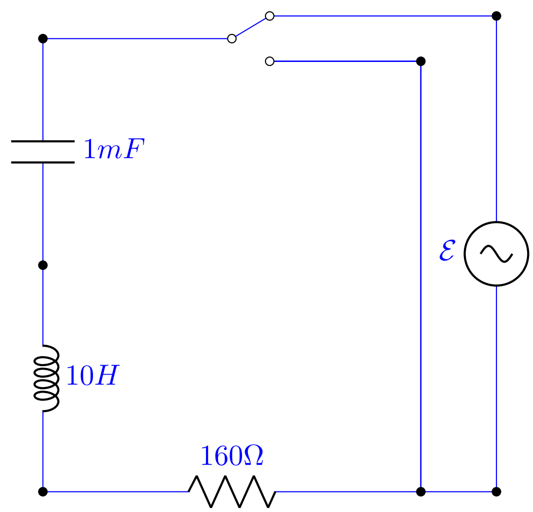


Figura 1: Questão 1.

No regime estacionário, a solução para a carga é dada pela equação não-homogênea

$$L\frac{\mathrm{d}^2 q}{\mathrm{d}t^2} + R\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} + \frac{q}{C} = \mathcal{E}_0 \cos(\omega t). \tag{3}$$

Reescrevendo a equação no plano complexo, temos

$$L\frac{\mathrm{d}^2 z}{\mathrm{d}t^2} + R\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} + \frac{z}{C} = \mathcal{E}_0 \exp(i\omega t) \tag{4}$$
$$\frac{\mathrm{d}^2 z}{\mathrm{d}t^2} + \frac{2}{\tau}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2 z = \frac{\mathcal{E}_0}{L} \exp(i\omega t), \tag{5}$$

com $q(t) = \Re z(t)$. Utilizando o *ansatz* $z(t) = z_0 e^{i\omega t}$, podemos reescrever a equação como

$$-\omega^2 z_0 e^{i\omega t} + \frac{2i\omega}{\tau} z_0 e^{i\omega t} + \omega_0^2 z_0 e^{i\omega t} = \frac{\mathcal{E}_0}{L} \exp(i\omega t) \tag{6}$$

$$z_0 \left(\omega_0^2 - \omega^2 + \frac{2i\omega}{\tau} \right) = \mathcal{E}_0 / L, \tag{7}$$

que implica em

$$z_0 = \frac{\mathcal{E}_0 / L}{(\omega_0^2 - \omega^2 + i2\omega/\tau)}. \tag{8}$$

Podemos tornar o denominador um número real multiplicando e dividindo pelo complexo conjugado do mesmo.

$$z_0 = \frac{\mathcal{E}_0 / L}{\omega_0^2 - \omega^2 + i2\omega/\tau} \cdot \frac{\omega_0^2 - \omega^2 - i2\omega/\tau}{\omega_0^2 - \omega^2 - i2\omega/\tau} \tag{9}$$

$$= \frac{\mathcal{E}_0 (\omega_0^2 - \omega^2 - i2\omega/\tau)}{L[(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\omega^2/\tau^2]}. \tag{10}$$

Antes de tomar a parte real, vamos calcular τ e ω_0.

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \tag{11}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{10 \cdot 10^{-3}}} \tag{12}$$

$$= 10 \frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}} \tag{13}$$

$$\tau = \frac{2L}{R} \tag{14}$$

$$= \frac{20}{160} s \tag{15}$$

$$= \frac{1}{8}. \tag{16}$$

Veja que o circuito está em ressonância! Então podemos simplificar a expressão para z_0 como

$$z_0 = -i \frac{\mathcal{E}_0 \tau}{2\omega L} \tag{17}$$

$$z(t) = -i \frac{\mathcal{E}_0 \tau}{2\omega L} e^{i\omega t} \tag{18}$$

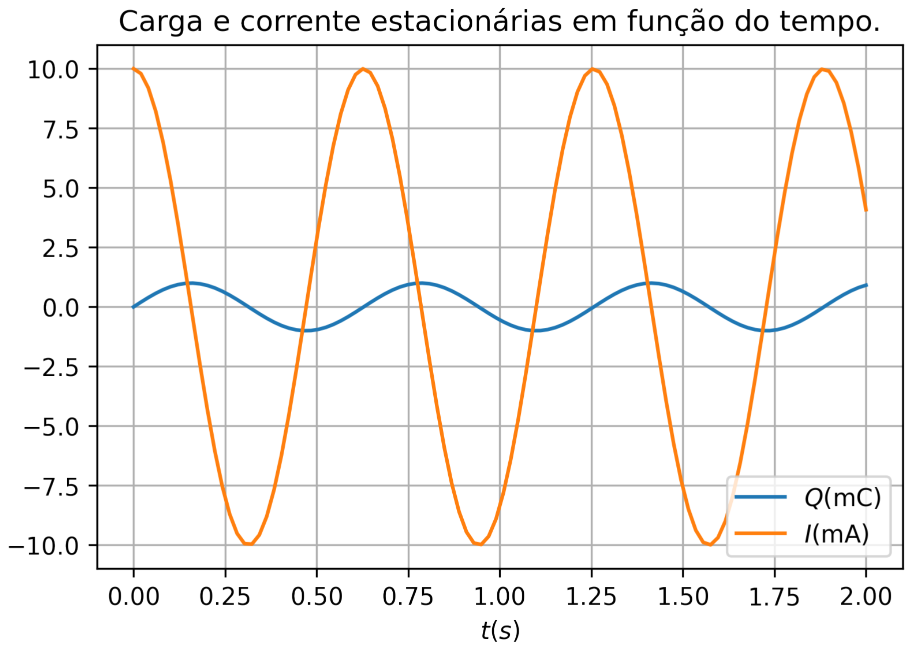
$$q(t) = \frac{\mathcal{E}_0 \tau}{2\omega L} \sin(\omega t) \tag{19}$$

$$= \frac{\mathcal{E}_\prime}{\omega R} \sin(\omega t) \tag{20}$$

$$= \frac{1.6\mathrm{V}}{10\mathrm{rad/s} \cdot 160\Omega} \sin(10t) \tag{21}$$

$$= 10^{-3} \sin(10t) C \tag{22}$$

$$= 1mC \sin(10t). \tag{23}$$



2 Segunda Questão

A ligação da chave bipolar é agora invertida, como mostra a figura 2, para eliminar a fonte de tensão do circuito. A mudança ocorre num instante em que a corrente é nula, e a carga no capacitor é 1mC. Encontre a carga $Q(t)$ que passa a circular no circuito interno, em função do tempo após a inversão da chave.

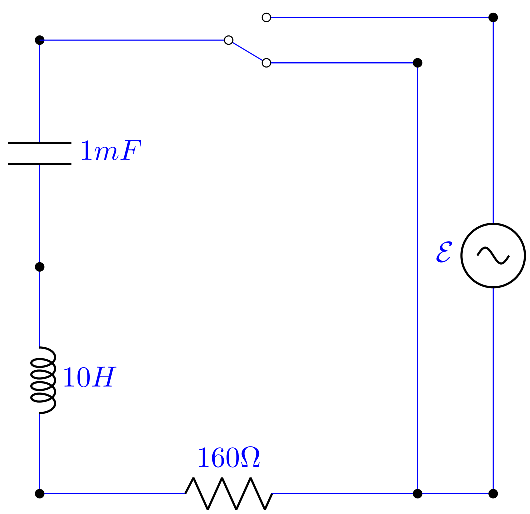


Figura 2: Questão 2.

A solução da carga, considerando agora $t = 0$ o tempo em que a chave foi mudada, é dada pela equação

$$Q(t) = \alpha Q_x + \beta Q_y, \tag{24}$$

com Q_x e Q_y a serem determinados pelo regime de amortecimento. Como $\omega_0 \tau = 10/8 > 1$, o regime é subamortecido, e as funções Q_x e Q_y são

$$Q_x = e^{-t/\tau} \cos(\omega_1 t) \tag{25}$$

$$Q_y = e^{-t/\tau} \frac{\sin(\omega_1 t)}{\omega_1} \tag{26}$$

$$\omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{1}{\tau^2}}. \tag{27}$$

Com as condições iniciais $Q(0) = 1\text{mC}$ e $I(0) = 0$, podemos buscar α e β. Lembrando que $Q_x(0) = 1$, $Q_y(0) = 0$,

$$Q(0) = 1\text{mC} = \alpha \tag{28}$$

$$I(t) = \alpha \left(-\frac{1}{\tau} Q_x - \omega_1^2 Q_y \right) + \beta \left(-\frac{1}{\tau} Q_y + Q_x \right) \tag{29}$$

$$I(0) = 1\text{mC} \left(-\frac{1}{\tau} \right) + \beta = 0 \tag{30}$$

$$\beta = \frac{1}{\tau}\text{mC} \tag{31}$$

$$Q(t) = e^{-t/\tau} \left(\cos(\omega_1 t) + \frac{\sin(\omega_1 t)}{\omega_1 \tau} \right) \text{mC}. \tag{32}$$