

2020-2, "FISMAT-AV", AULAS 07 E 08

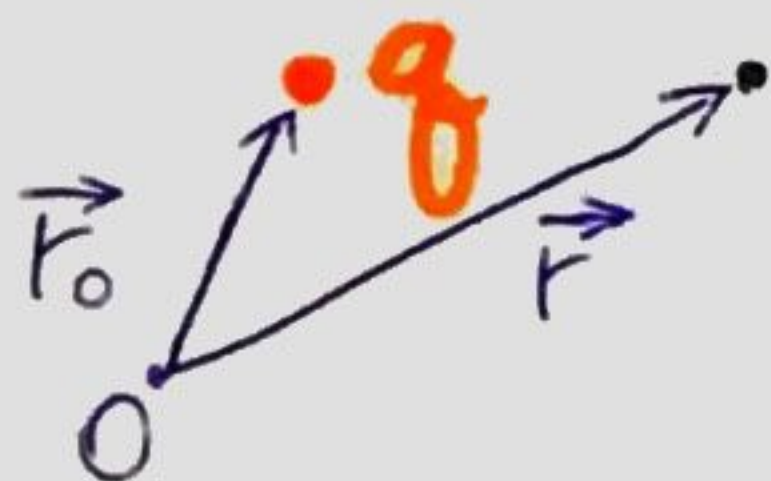
OBJETIVOS: APRESENTAR OS
FUNDAMENTOS FORMAIS DA TEORIA
DAS DISTRIBUIÇÕES

2. DISTRIBUIÇÕES

2.1 MOTIVAÇÕES

→ "CONCENTRAÇÕES" DE CARGA
ELÉTRICA, MASSA OU PROBABILIDA-
DE

MICROSCÓPICO

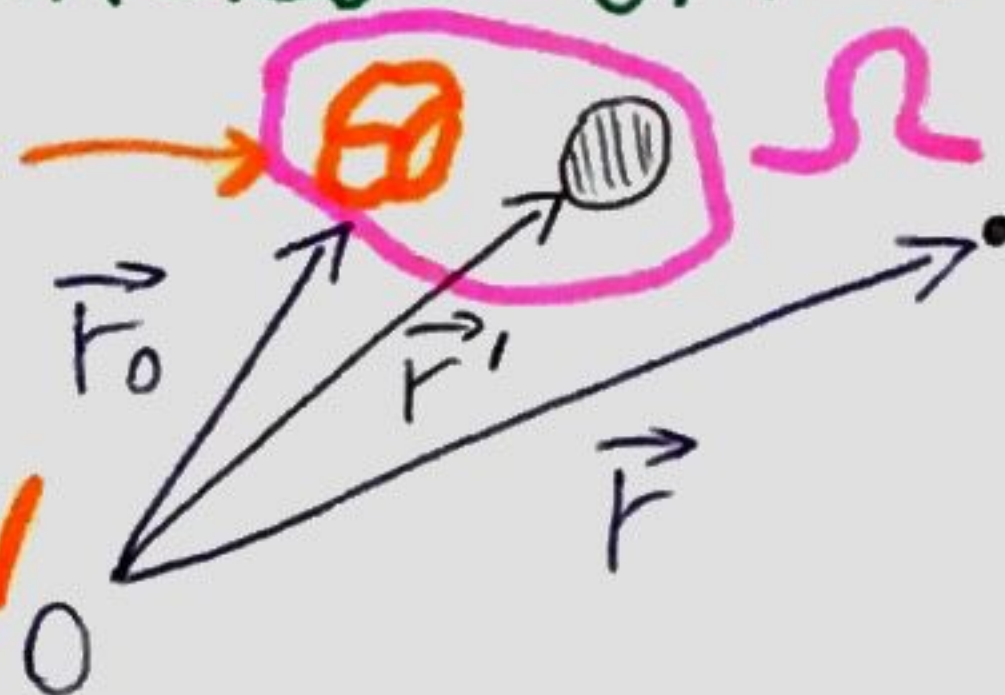


$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r} - \vec{r}_0}{|\vec{r} - \vec{r}_0|^3}$$

||
?

MACROSCÓPICO

$dq \approx \rho(\vec{r}_0) dV$



$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\Omega} \rho(\vec{r}') \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dV'$$

DENSIDADE,
CONTÍNUO

CARGA PONTUAL: $\rho(\vec{r}') \rightsquigarrow q \cdot \delta_{\vec{r}_0}(\vec{r}')$

$$\int_{\Omega} \delta_{\vec{r}_0}(\vec{r}') d^3r' = \begin{cases} 1, & \text{se } \vec{r}_0 \in \Omega \\ 0, & \text{se } \vec{r}_0 \notin \Omega \end{cases}$$

→ DERIVADAS FUNCIONAIS

VIMOS QUE, PARA VARIAÇÕES ADMISSÍVEIS (QUE SE ANULAM NA FRONTEIRA DE UM PROBLEMA VARIACIONAL),

A APLICAÇÃO $\delta J(f, \cdot): V \rightarrow \mathbb{R}$,

$h \mapsto \delta J(f, h)$, É LINEAR, ↪ ESPAÇO (DE BANACH) DE FUNÇÕES

UM FUNCIONAL EM V

QUE ADMITE A REPRESENTAÇÃO

$$\left\langle \frac{\delta J}{\delta f}, h \right\rangle = \int dx h(x) \frac{\delta J}{\delta f(x)}.$$

↑ ↑
PRODUTO INTERNO?

→ DIFICULDADES / "PESO" DAS SE-
QUÊNCIAS DELTA

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx \delta(x) f(x) = f(0) \quad \text{e} \quad \int dx \delta(x) = 1,$$

MAS $\delta(x)$ NÃO É FUNÇÃO E NÃO É O
LIMITE DE UMA SEQUÊNCIA DELTA (POIS
ISSO TAMBÉM NÃO EXISTE).

$$(i) \quad \delta_n(x) = \begin{cases} n/2, & \text{se } |x| \leq 1/n \\ 0, & \text{CASO CONTRÁRIO} \end{cases}$$

$$(ii) \quad \delta_n(x) = \frac{\sin nx}{\pi x}$$

$$(iii) \quad \delta_n(x) = \frac{n}{\sqrt{\pi}} e^{-n^2 x^2}$$

$$(iv) \quad \delta_n(x) = \frac{1}{n\pi} \cdot \frac{1}{x^2 + 1/n^2}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}$$

$$\int dx \delta_n(x) = 1$$

$$\forall x \neq 0$$

$$\delta_n(x) \rightarrow 0$$

$n \rightarrow \infty$

$\nexists \lim_{n \rightarrow \infty} \delta_n(x)$ MAS

$$\int dx \delta(x) f(x) \equiv \lim_{n \rightarrow \infty} \int dx \delta_n(x) f(x) = f(0).$$

A DELTA DE DIRAC SÓ FAZ SENTIDO SOB INTEGRAÇÃO, OK, MAS QUALQUER "PERGUNTA" EXIGIRIA UMA SEQUÊNCIA DELTA!

→ "FLEXIBILIZA" TRANSFORMADAS E SOLUÇÕES DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS

NO SENTIDO DE DISTRIBUIÇÕES, UMA EXPRESSÃO COMO $f(x-vt) + g(x+vt)$ PODE SER UMA SOLUÇÃO DA EQ. DE ONDA $u_{tt} = v^2 \cdot u_{xx}$ MESMO SE f E g NÃO FOREM DUAS VEZES DIFFERENCIÁVEIS! IMPULSOS, DESCONTINUIDADES, ONDAS DE CHOQUE PASSAM A FAZER SENTIDO MATEMÁTICO!

2.2 PRELIMINARES EM DIMENSÃO FINITA

NO ESPAÇO VETORIAL $\mathbb{R}^n$, ADOTA-DA A BASE PADRÃO $B = \{e_i\}$, $i = 1, \dots, n$,

$$e_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \left. \begin{array}{l} \text{\textcolor{red}{}} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{\textcolor{red}{i-1 ZEROS}} \\ \text{\textcolor{red}{n-i ZEROS}} \end{array}$$

O PRODUTO INTERNO EUCLIDIANO DE $x, y \in \mathbb{R}^n$ É

$$\langle x, y \rangle = \begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y^1 \\ \vdots \\ y^n \end{pmatrix} = x^1 y^1 + \dots + x^n y^n.$$

AGORA, IMAGINEMOS FUNCIONAIS LINEARES EM $V = \mathbb{R}^n$, COMO $\varphi: V \rightarrow \mathbb{R}$ TAL QUE

$$\varphi(ax + by) = a\varphi(x) + b\varphi(y)$$

PARA QUAISQUER $a, b \in \mathbb{R}$, $x, y \in V$.

TAIS FUNCIONAIS CONSTITUEM
UM NOVO ESPAÇO VETORIAL, O ESPAÇO
DUAL V^* , COM AS OPERAÇÕES

$$(\varphi_1 + \varphi_2)(x) = \varphi_1(x) + \varphi_2(x)$$

E

$$(a\varphi)(x) = a \cdot \varphi(x).$$

EM RELAÇÃO À BASE DUAL $B^* = \{e^i\}$

ONDE $\overbrace{i-1 \text{ ZEROS}} \quad \overbrace{n-i \text{ ZEROS}}$

$$e^i = (0 \dots 0 \underset{\text{1}}{1} 0 \dots 0),$$

CADA FUNCIONAL LINEAR (OU COVETOR,
OU 1-FORMA) ADMITE A REPRESENTAÇÃO

$$\varphi = (\varphi_1 \dots \varphi_n).$$

OS ESPAÇOS V E V^* SÃO ISO-
MORFOS, POIS TÊM A MESMA DIMEN-
SÃO, n . FIXADO $y \in V$, A CADA FUN-
CIONAL $\varphi \in V^*$ CORRESPONDE UM
ÚNICO $\hat{\varphi} \in V$ TAL QUE

$$\varphi(y) = \langle \hat{\varphi}, y \rangle. \quad \text{DE FATO,}$$

$$\varphi(y) = (\varphi_1 \dots \varphi_n) \begin{pmatrix} y^1 \\ \vdots \\ y^n \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \vdots \\ \varphi_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y^1 \\ \vdots \\ y^n \end{pmatrix},$$

DEI MODO QUE $\hat{\varphi}$ É TAL QUE $\hat{\varphi}^i \equiv \varphi_i$.

A CORRESPONDÊNCIA, EM DIMENSÃO FINITA, É BIUNÍVOCA, NA VERDADE.

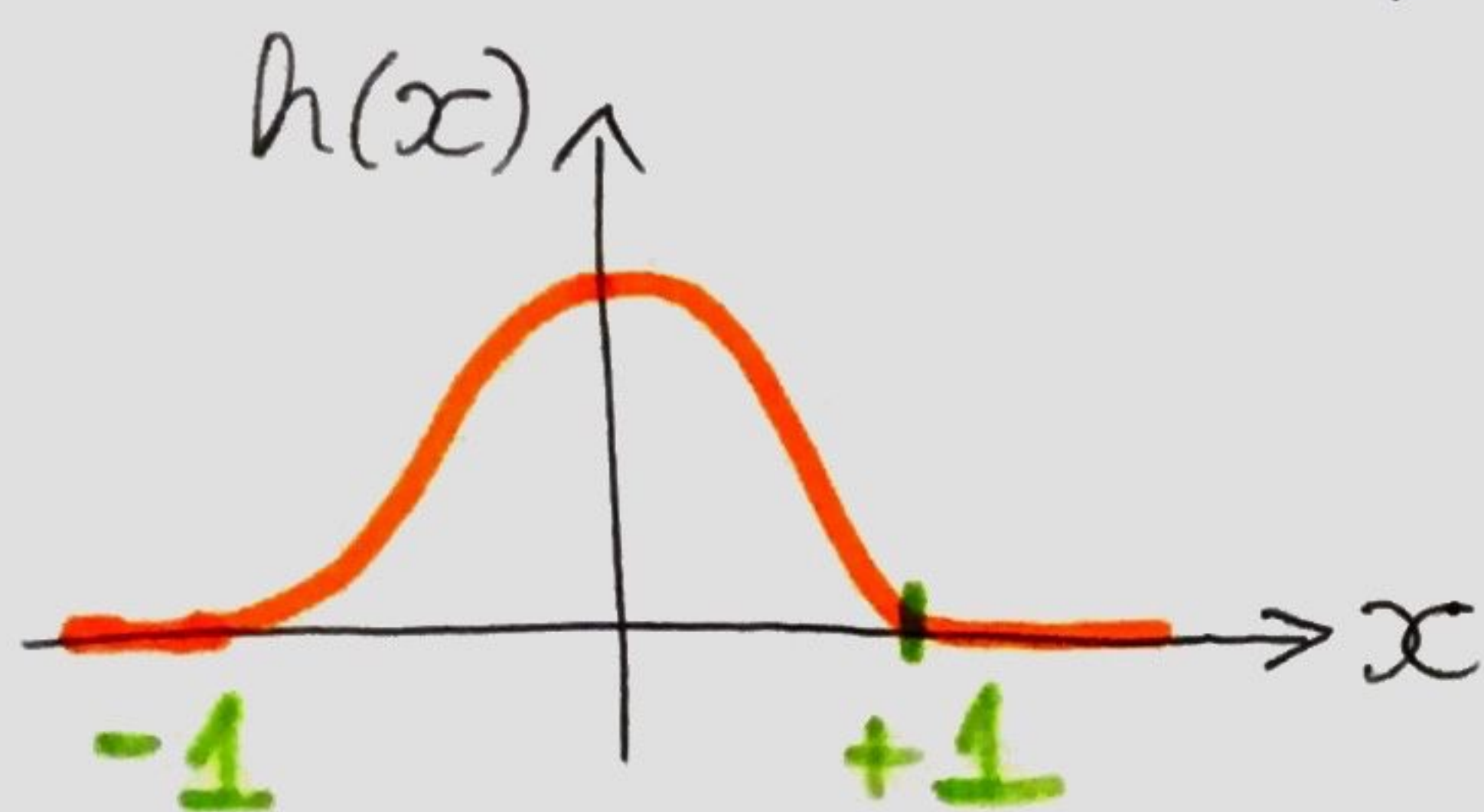
2.3 DEFINIÇÃO DE FUNÇÃO GENERALIZADA

UMA FUNÇÃO TESTE $\varphi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ É UMA FUNÇÃO DE CLASSE C^∞ DE SUORTE COMPACTO. ISSO QUER

DIZER QUE h SE ANULA NO EXTERIOR DE ALGUMA BOLA NO $\mathbb{R}^n$.

◇ EXEMPLO: É UMA FUNÇÃO TESTE $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ DADA POR

$$h(x) = \begin{cases} 0, & \text{SE } |x| \geq 1 \\ \exp\left\{-\frac{1}{1-x^2}\right\}, & \text{SE } |x| < 1 \end{cases}$$



NOTE QUE $(-1, +1)$ É O CONJUNTO $\{x / h(x) \neq 0\}$.

PORÉM, O SUPORTE DE h É $[-1, +1]$, POIS DEVE INCLUIR OS PONTOS DE ACUMULAÇÃO DE $(-1, +1)$. COMO, NO $\mathbb{R}^n$, UM CONJUNTO COMPACTO EQUIVALE A SER FECHADO E LIMITADO, O SUPORTE DE h É COMPACTO. $h \in C^\infty(\mathbb{R})$, MAS NÃO É ANALÍTICA, POIS NÃO PODE SER EXPRESSA EM SÉRIE DE POTÊNCIAS EM $x = \pm 1$. ◇

FUNÇÕES TESTE PODEM SER ADI-
CIONADAS OU MULTIPLICADAS POR COM-
PLEXOS PARA GERAR NOVAS FUNÇÕES
TESTE E CONSTITUIR O ESPAÇO TESTE,
O ESPAÇO VETORIAL $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ DAS FUN-
ÇÕES TESTE $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$.

↪ **SUORTE
COMPACTO**

PARACE MUITO RESTRITO? SIM,
MAS NEM TANTO: SEMPRE HÁ UMA FUN-
ÇÃO TESTE "PRÓXIMA" DE UMA FUNÇÃO
"RAZOÁVEL", MESMO SEM SUORTE COM-
PACTO. ALÉM DISSO, PRECISAMOS
"DOMAR A DIMENSÃO INFINITA": AGORA,
QUANTO "MAIOR" FOR V , "MENOR" SERÁ V^* .

UMA DISTRIBUIÇÃO EM $\mathbb{R}^n$ É
QUALQUER FUNCIONAL LINEAR CONTÍ-
NUO EM $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$. O ESPAÇO DAS DIS-
TRIBUIÇÕES, OU ESPAÇO DUAL TOPO-
LÓGICO, $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, É UM SUBESPAÇO
DO ESPAÇO DUAL $\mathcal{D}^*(\mathbb{R}^n)$, QUE TAM-
BÉM CONTÉM FUNCIONAIS DESCON-
TÍNUOS, AINDA QUE LINEARES!!!