

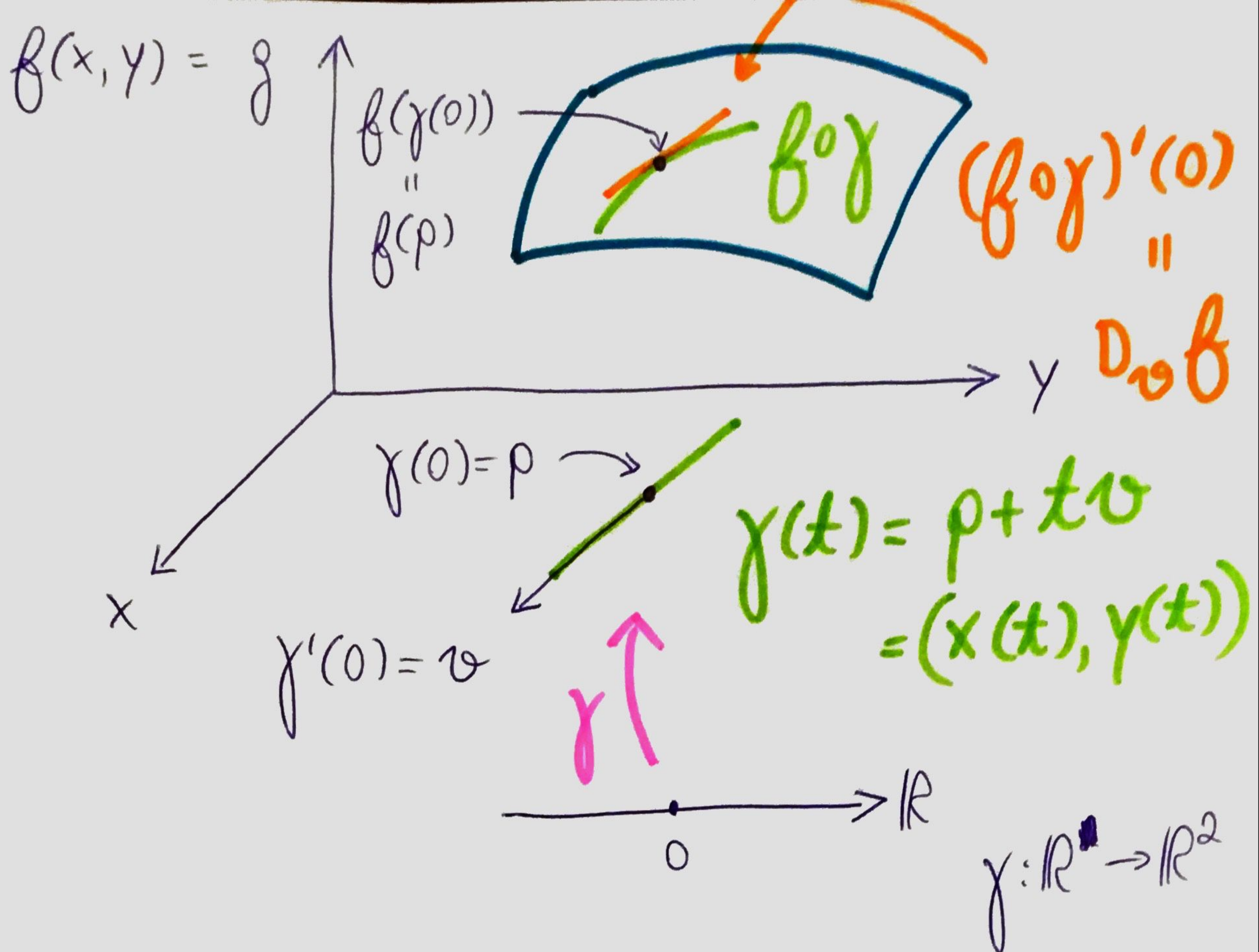
OBJETIVOS: APRESENTAR INTER-  
PRETAÇÕES E GENERALIZAÇÕES DA  
DERIVADA FUNCIONAL

## (CONT.) 1.3 DERIVADA FUNCIO- NAL

### \* INTERPRETAÇÃO MATE- MÁTICA

VIMOS QUE A DERIVADA DE GÂ-  
TEAUX É UMA GENERALIZAÇÃO DA DERI-  
VADA DIRECIONAL DO CÁLCULO VETO-  
RIAL. NAQUELE CONTEXTO, VAMOS RE-  
LEMBRAR QUE, SE EXISTIR, A DERIVADA  
DIRECIONAL DE  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  NO PONTO  
 $p \in \mathbb{R}^2$ , NA DIREÇÃO DO VETOR  $v \in \mathbb{R}^2$  É

$$D_v f = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(p+tv) - f(p)}{t}$$



ASSIM COMO DEFINIMOS  $J(\epsilon) \equiv J(f + \epsilon h)$  PARA UM FUNCIONAL, A DERIVADA DIRECIONAL É UMA "DERIVADA SIMPLES" PARA  $f \circ \gamma: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , ONDE  $\gamma: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  É A CURVA  $\gamma(t) = p + tv$ .

$$D_v f = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(f \circ \gamma)(t) - (f \circ \gamma)(0)}{t} = (f \circ \gamma)'(0) =$$

$$= [\nabla f|_p] \cdot \gamma'(0) = [\nabla f|_p] \cdot v \equiv \langle \nabla f|_p, v \rangle.$$

O PRODUTO ESCALAR VISTO ACIMA É UM CASO PARTICULAR DE UM PRODUTO INTERNO  $\langle \cdot, \cdot \rangle: V \times V \rightarrow \mathbb{F}$  EM UM ESPAÇO VETORIAL  $V$  NO CORPO DE ESCALARES  $\mathbb{F}$  ( $\mathbb{R}$  OU  $\mathbb{C}$ , PARA NÓS). TAL PRODUTO DEVE SATISFAZER

$$(i) \quad \langle u, \alpha v + w \rangle = \alpha \cdot \langle u, v \rangle + \langle u, w \rangle,$$

$$(ii) \quad \langle u, v \rangle^* = \langle v, u \rangle \quad \text{E}$$

$$(iii) \quad \langle u, u \rangle \geq 0$$

PARA QUAISQUER  $u, v, w \in V$  E  $\alpha \in \mathbb{F}$ .

EM UM ESPAÇO DE FUNÇÕES, UM EXEMPLO DE PRODUTO INTERNO É

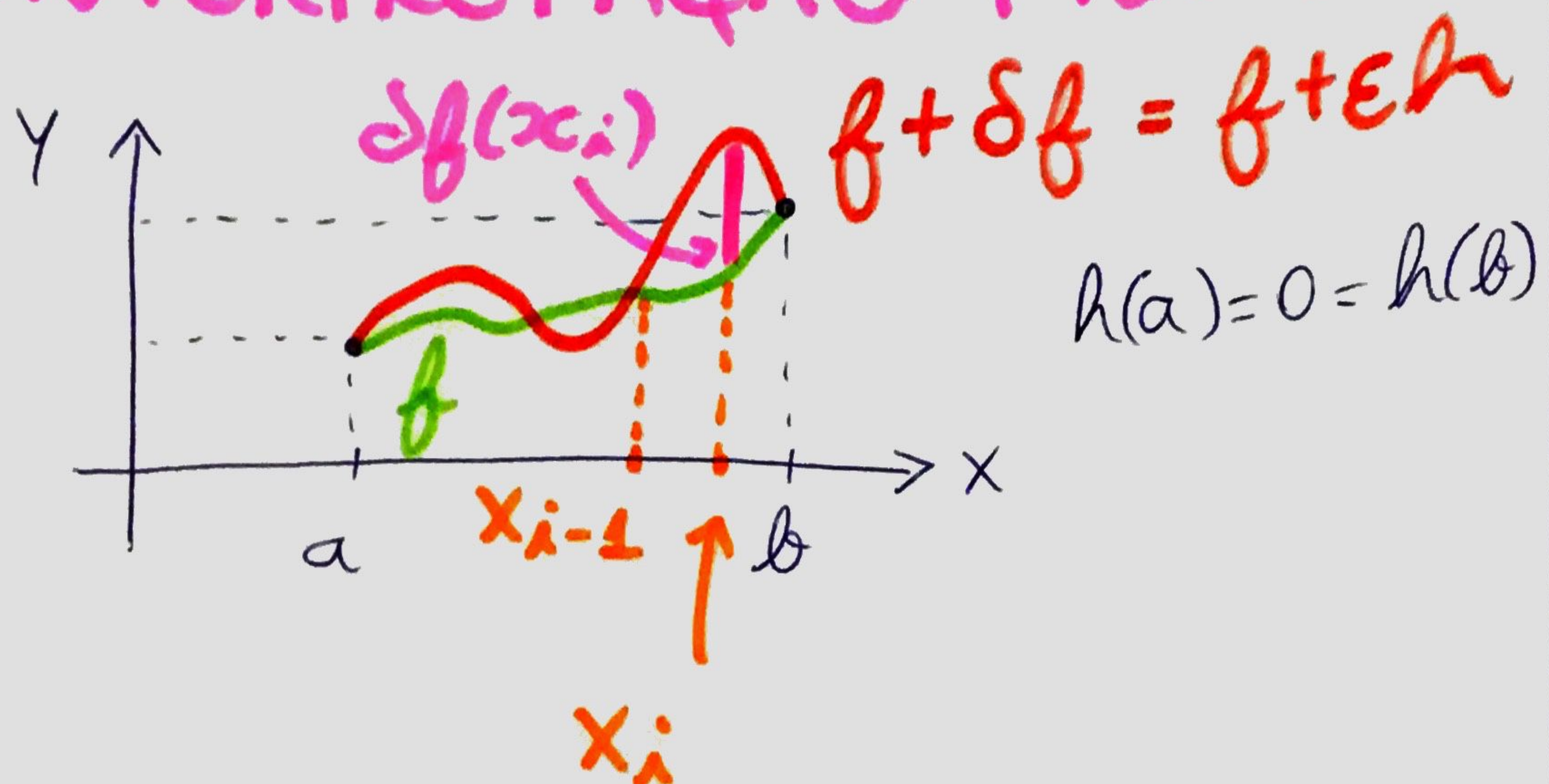
$$\langle f, g \rangle = \int_a^b dx [f(x)]^* \cdot [g(x)]$$

E AQUI CONVÉM LEMBRAR QUE

$$\delta J(f, h) = \int d^n x \cdot h(x) \cdot \frac{\delta J}{\delta f(x)} \equiv \left\langle \frac{\delta J}{\delta f(x)}, h \right\rangle.$$

OU SEJA, A DERIVADA FUNCIONAL É UM TIPO DE GRADIENTE, QUE "ATUA" SOBRE ARBITRÁRIAS "FUNÇÕES-TESTE"  $h$ .

## \* INTERPRETAÇÃO FÍSICA



A DERIVADA FUNCIONAL EXPRESSA A TAXA DE VARIAÇÃO DO FUNCIONAL  $J(f)$  EM RELAÇÃO A MUDANÇAS NA FUNÇÃO  $f$  EM UMA VIZINHANÇA DO PONTO  $x$ , INDEPENDENTEMENTE DA VARIAÇÃO  $h$ .

$$\delta J^\epsilon = J(f + \epsilon h) - J(f) = J(f + \delta f) - J(f) \approx$$

$$\begin{aligned} & \approx \epsilon \cdot \sum_i \Delta x_i h(x_i) \frac{\delta J}{\delta f(x_i)} = \\ & = \sum_i \frac{\delta J}{\delta f(x_i)} \underbrace{[\epsilon \cdot h(x_i)]}_{\delta f(x_i)} \Delta x_i \end{aligned}$$

## \* UMA FUNÇÃO, DOIS PONTOS

CORRELAÇÕES DE UMA GRANDEZA / CAMPO ENVOLVEM DOIS PONTOS (TEMPORAIS, NO CASO DE UMA CORRELAÇÃO TEMPORAL; ESPACIAIS, EM UMA CORRELAÇÃO ESPACIAL).

DEFINE-SE

$$\frac{\delta^2 J}{\delta f(y) \delta f(z)} \equiv \left. \frac{\partial^2}{\partial \epsilon \partial \xi} [J(f + \epsilon \delta(x-y) + \xi \delta(x-z))] \right|_{\substack{\epsilon=0 \\ \xi=0}}$$

"TAXA DE VARIAÇÃO DE J EM RELAÇÃO A f NAS VIZINHANÇAS DE y e z"

# \* FUNCIONAIS DE VÁRIAS FUNÇÕES

SE  $J(f_1, \dots, f_N)$  DEPENDER DE  $n$  FUNÇÕES, DEFINEM-SE VÁRIAS DERIVADAS FUNCIONAIS COMO

$$\left[ \frac{d}{d\varepsilon} J(f_1 + \varepsilon h_1, \dots, f_N + \varepsilon h_N) \right]_{\varepsilon=0}$$

$$\equiv \int d^n x \sum_{k=1}^N h_k(x) \frac{\delta J}{\delta f_k(x_0)}$$

NESTE CONTEXTO,  $\frac{\delta f(x)}{\delta f(y)} = \delta(x-y)$

GENERALIZA-SE PARA

$$\frac{\delta f_i(x)}{\delta f_j(y)} = \delta_{ij} \cdot \delta(x-y).$$

# \* DERIVADAS DE ORDEM SUPERIOR E EXPANSÃO FUNCIONAL DE TAYLOR

DERIVADAS DE GÂTEAUX DE ORDEM SUPERIOR SÃO DEFINIDAS NATURALMENTE:

$$\delta^n J(f, h) \equiv \left\{ \frac{d^n}{d\varepsilon^n} J(f + \varepsilon h) \right\}_{\varepsilon=0}$$

$$= f^{(n)}(0),$$

$$\text{POIS } f(\varepsilon) \equiv J(f + \varepsilon h).$$

SENDO  $f$  INFINITAMENTE DIFERENCIÁVEL, ELA ADMITE A EXPANSÃO DE TAYLOR (MACLAURIN)

$$f(\varepsilon) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(0) \cdot \varepsilon^n.$$