

2020-2, "FISMAT-AV", AULA 09

OBJETIVOS: FINALIZAR A DEFINIÇÃO DE DISTRIBUIÇÃO E DEFINIR DISTRIBUIÇÕES REGULARES E SINGULARES

(CONT.) 2.3 DEFINIÇÃO DE FUNÇÃO GENERALIZADA

VIMOS QUE AS DISTRIBUIÇÕES SÃO FUNCIONAIS LINEARES CONTÍNUOS NO ESPAÇO TESTE $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, CONSTITUINDO O ESPAÇO DUAL TOPOLÓGICO $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{D}^*(\mathbb{R}^n)$. O QUE PODE SER CONTINUIDADE, NESTE CONTEXTO?

UMA SEQUÊNCIA $(h_n)_{n \in \mathbb{N}}$ DE FUNÇÕES TESTE CONVERGE A UMA FUNÇÃO TESTE h SE

i. TODOS OS SUPORTES DAS FUNÇÕES ESTIVEREM CONTIDOS EM UMA ÚNICA

BOLA DO $\mathbb{R}^n$, FIXA, E

ii. CADA SEQUÊNCIA DE DERIVADAS PARCIAIS (DE QUALQUER GRAU, MAS FIXO NA SEQUÊNCIA) CONVERGIR UNIFORMEMENTE PARA A CORRESPONDENTE DERIVADA PARCIAL DE h .

FINALMENTE, UM FUNCIONAL LINEAR $T: \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{C}$ É CONTÍNUO SE, PARA QUALQUER $(h_n) \xrightarrow{\text{TESTE}} h$, A SEQUÊNCIA DE NÚMEROS COMPLEXOS $T(h_n)$ CONVERGIR PARA $T(h)$.

◇ EXEMPLO: O FUNCIONAL δ TAL QUE $h \xrightarrow{\delta} h(0)$ É UMA DISTRIBUIÇÃO, POIS É LINEAR E CONTÍNUO. DE FATO, $a h_1 + b h_2 \xrightarrow{\delta} a h_1(0) + b h_2(0) = a \cdot \delta(h_1) + b \cdot \delta(h_2)$, $\forall a, b \in \mathbb{C}$. ALÉM DISSO,

$h_n \xrightarrow{\text{UNIF.}} h \Rightarrow h_n(x) \xrightarrow{\text{PONTUAL}} h(x) \Rightarrow h_n(0) \xrightarrow{x=0} h(0)$.

MAS $h(0) = \delta(h)$, E (h_n) ARBITRÁRIA...

ASSIM, $(\delta(h_n)) \rightarrow \delta(h)$.

◇ 102

2.4 DISTRIBUIÇÕES REGULARES

AS DISTRIBUIÇÕES REGULARES SÃO AS FUNÇÕES GENERALIZADAS "MAIS PRÓXIMAS" DAS FUNÇÕES USUAIS. ELAS INSPIRAM/SUGEREM AS DEFINIÇÕES DE PROPRIEDADES DE DISTRIBUIÇÕES, POIS TAIS DEFINIÇÕES GENERALIZADAS DEVEM REPRODUZIR AS JÁ CONHECIDAS, QUANDO APLICADAS ÀS FUNÇÕES USUAIS.

UMA FUNÇÃO $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ É LOCALMENTE INTEGRÁVEL SE EXISTIR A INTEGRAL $\int_K d^n x |f(x)|$ PARA QUALQUER COMPACTO K DO $\mathbb{R}^n$. FUNÇÕES LO-

CALMENTE INTEGRÁVEIS, MAS NÃO INTEGRÁVEIS, "TÊM PROBLEMAS NO INFINITO".

FECHADO
E LIMITADO

QUALQUER FUNÇÃO LOCALMENTE
INTEGRÁVEL f INDUZ UMA DISTRIBUI-
ÇÃO REGULAR T_f (MAS, NA MAIORIA DAS VEZES,
TAMBÉM DENOTADA COMO f !!!) DE-

FINIDA COMO

PRODUTO INTERNO! $\hookrightarrow$

$$\boxed{\begin{matrix} \langle T_f, h \rangle \\ \parallel \\ \langle f, h \rangle \end{matrix}}$$

$$T_f(h) = \int f(x) h(x) dx$$

LINEAR
EM h

$\rightarrow \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$

PARA QUALQUER $h \in \mathcal{D}$.

◇ EXEMPLO: A FUNÇÃO θ (OU H)
DE HEAVISIDE É LOCALMENTE INTE-
GRÁVEL. DE FATO, COMO $\theta(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$
SEGUE QUE $\int_a^b |\theta(x)| dx = \max(b, 0) - \max(a, 0)$.

A DISTRIBUIÇÃO ASSOCIADA É

$$\langle \theta, h \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \theta(x) h(x) dx = \int_0^{\infty} h(x) dx.$$

$$\text{" } \theta(\cdot) = \int_0^{\infty} \cdot dx \text{"}$$



VAMOS VERIFICAR CONTINUIDADE
UMA ÚLTIMA VEZ, PARA TODAS AS
DISTRIBUIÇÕES REGULARES!

SEJA $(h_m) \xrightarrow{\text{TESTE}} h$. HÁ UMA BOLA
FECHADA B QUE CONTÉM TODOS OS
SUPORTES. SEJA $M = \int_B d^n x |f(x)| < \infty$.
↪ LOC. INT.

**MÓDULO DA SOMA NÃO EXCEDE
A SOMA DOS MÓDULOS**

$$|T_f(h) - T_f(h_m)| = \left| \int f(x) [h(x) - h_m(x)] d^n x \right| \leq$$

$$\leq \int |f(x)| \cdot |h(x) - h_m(x)| d^n x =$$

$$= \int_B |f(x)| \cdot |h(x) - h_m(x)| d^n x \leq$$

$$\leq \int_B |f(x)| \cdot \left[\max_{x \in B} |h(x) - h_m(x)| \right] d^n x \leq$$

≡ H

$$\leq M \cdot H$$

MAS $H \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0 \dots \therefore (T_f(h_m)) \rightarrow T_f(h).$

EXERCÍCIOS:

9.1 MOSTRE QUE $\frac{1}{\sqrt{|x|}}$ É LOC. INT..

9.2 O MESMO PARA $\log|x|$.

9.3 MOSTRE QUE $\frac{1}{|x|}$ NÃO É LOC. INT..

DICA: BASTA ANALISAR $x \geq 0$.

SE T FOR UMA DISTRIBUIÇÃO, MAS NÃO EXISTIR f LOCALMENTE INTEGRÁVEL TAL QUE $\langle T, h \rangle = \int f(x)h(x)dx$, T É UMA DISTRIBUIÇÃO SINGULAR.