



Mecânica I – PME3100

Aula 10 Cinemática do Ponto (Giacaglia)

**Capítulo 4 (Giacaglia)****1 Geometria das Curvas****1.1 Vetor Função de um Parâmetro****1.2 Curva Função de um Parâmetro****1.3 Fórmulas de Frenet****1 Geometria das Curvas****1.1 Vetor Função de um Parâmetro**

Se um ponto P ou um vetor $\bar{v} = P - O$ referido a um sistema cartesiano ortogonal de origem O , depende de um parâmetro real τ , dizemos que este ponto ou vetor é função de τ

Indicamos esta correspondência por:

$$P = P(\tau)$$

ou

$$\bar{v} = \bar{v}(\tau)$$

Figura na lousa

**Capítulo 4 (Giacaglia)****1 Geometria das Curvas****1.1 Vetor Função de um Parâmetro****1.2 Curva Função de um Parâmetro****1.3 Fórmulas de Frenet**

Se (x, y, z) são as coordenada de P , ou as componentes de $\bar{v}$, as relações anteriores são equivalentes a:

$$x = x(\tau)$$

$$y = y(\tau)$$

$$z = z(\tau)$$

$$\bar{v} = x(\tau)\bar{i} + y(\tau)\bar{j} + z(\tau)\bar{k}$$

**Capítulo 4 (Giacaglia)****1 Geometria das Curvas****1.1 Vetor Função de um Parâmetro****1.2 Curva Função de um Parâmetro****1.3 Fórmulas de Frenet**

Considere a razão incremental

$$\frac{\Delta \bar{v}(\tau)}{\Delta \tau} = \frac{\bar{v}(\tau + \Delta \tau) - \bar{v}(\tau)}{\Delta \tau}$$

O seu limite, se existir, quando $\Delta \tau \rightarrow 0$, chama-se derivada de $\bar{v}(\tau)$ em relação ao parâmetro τ .

$$\bar{v}' = \lim_{\Delta \tau \rightarrow 0} \frac{\Delta \bar{v}}{\Delta \tau} = \frac{d\bar{v}}{d\tau}$$

**Capítulo 4 (Giacaglia)****1 Geometria das Curvas****1.1 Vetor Função de um Parâmetro****1.2 Curva Função de um Parâmetro****1.3 Fórmulas de Frenet**

Sejam os vetores $\bar{v}(\tau)$, $\bar{u}(\tau)$ e a função escalar $f(\tau)$

Então, admitida diferenciabilidade, temos:

$$\frac{d}{d\tau}(f\bar{v}) = f'\bar{v} + f\bar{v}'$$

$$\frac{d}{d\tau}(\bar{v} \cdot \bar{u}) = \bar{v}' \cdot \bar{u} + \bar{v} \cdot \bar{u}'$$

$$\frac{d}{d\tau}(\bar{v} \wedge \bar{u}) = \bar{v}' \wedge \bar{u} + \bar{v} \wedge \bar{u}'$$

**Capítulo 4 (Giacaglia)****1 Geometria das Curvas****1.1 Vetor Função de um Parâmetro****1.2 Curva Função de um Parâmetro****1.3 Fórmulas de Frenet**

Da 2ª equação do slide anterior $\Rightarrow \frac{d}{d\tau}(\bar{v} \cdot \bar{u}) = \bar{v}' \cdot \bar{u} + \bar{v} \cdot \bar{u}'$

Se estivermos tratando de um vetor de módulo constante



$$|\bar{u}| = cte \Rightarrow |\bar{u}|^2 = cte \Rightarrow \bar{u} \cdot \bar{u} = cte$$



$$\frac{d}{d\tau}(\bar{u} \cdot \bar{u}) = \bar{u}' \cdot \bar{u} + \bar{u} \cdot \bar{u}' = 2\bar{u} \cdot \bar{u}' = 0$$



$$\bar{u}' = 0$$

ou

$$\bar{u} \perp \bar{u}'$$



Capítulo 4 (Giacaglia)

1 Geometria das Curvas

1.1 Vetor Função de um Parâmetro

1.2 Curva Função de um Parâmetro

1.3 Fórmulas de Frenet

Interessa-nos o caso em que $\bar{u} \perp \bar{u}'$

Ex: $\bar{u}$ é a velocidade de um ponto no MCU e τ é o tempo

A derivada de um vetor de módulo constante é sempre ortogonal ao vetor.

**Capítulo 4 (Giacaglia)****1 Geometria das Curvas****1.1 Vetor Função de um Parâmetro****1.2 Curva Função de um Parâmetro****1.3 Fórmulas de Frenet****1.2 Curva Função de um Parâmetro**

Seja $P = P(\tau)$ um ponto que é função do parâmetro τ .

Suas coordenadas $x(\tau)$, $y(\tau)$, $z(\tau)$ são as equações paramétricas da curva descrita por P no espaço, ao variar τ com continuidade.

Esta curva pode ser representada por

$$P(\tau) = \mathbf{0} + \bar{\mathbf{v}}(\tau)$$



Capítulo 4 (Giacaglia)

1 Geometria das Curvas

1.1 Vetor Função de um Parâmetro

1.2 Curva Função de um Parâmetro

1.3 Fórmulas de Frenet

$$P(\tau) = 0 + \bar{v}(\tau)$$

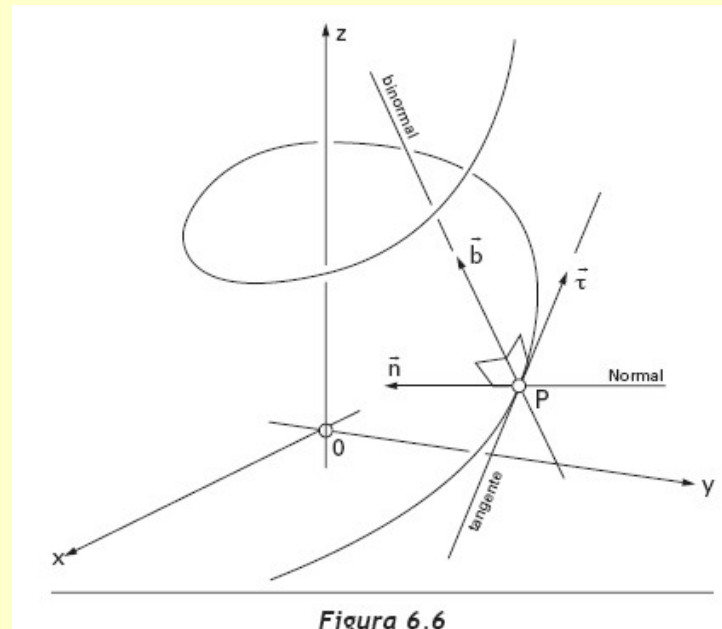


Figura 6.6

Fonte: França, L. N. F. e Matsumura, A. Z. 2011, *Mecânica Geral*, 3ª edição, Editora Edgard Blücher Ltda.

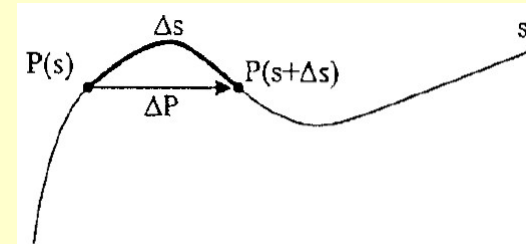
**Capítulo 4 (Giacaglia)****1 Geometria das Curvas****1.1 Vetor Função de um Parâmetro****1.2 Curva Função de um Parâmetro****1.3 Fórmulas de Frenet**

Seja s o arco, sobre a curva, contado a partir de uma certa origem e com uma orientação definida. Podemos, então, sempre considerar

$$P = P(s) = 0 + \bar{v}(s)$$

onde s é uma função escalar do parâmetro $\tau \Rightarrow s = s(\tau)$

Figura na lousa

**Capítulo 4 (Giacaglia)****1 Geometria das Curvas****1.1 Vetor Função de um Parâmetro****1.2 Curva Função de um Parâmetro****1.3 Fórmulas de Frenet**

$$\text{A derivada } \bar{t} = \frac{\frac{dP(\tau)}{d\tau}}{\left| \frac{dP(\tau)}{d\tau} \right|} = \frac{dP(s)}{ds}$$

Kaminski, P. C.; Mecânica Geral para Engenheiros; 1ª edição (demonstração: pág. 252)

É um **vetor unitário**, tangente à curva e de sentido concordante com o sentido adotado dos arcos crescentes. Chama-se **vetor tangente**.

$$\text{Como } |\bar{t}| = 1 \text{ resulta que } \Rightarrow \bar{t} \cdot \frac{d\bar{t}}{ds} = 0$$

Portanto $\frac{d\bar{t}}{ds}$ é ortogonal a $\bar{t}$



Capítulo 4 (Giacaglia)

1 Geometria das Curvas

1.1 Vetor Função de um Parâmetro

1.2 Curva Função de um Parâmetro

1.3 Fórmulas de Frenet

vetor tangente $\bar{t}$

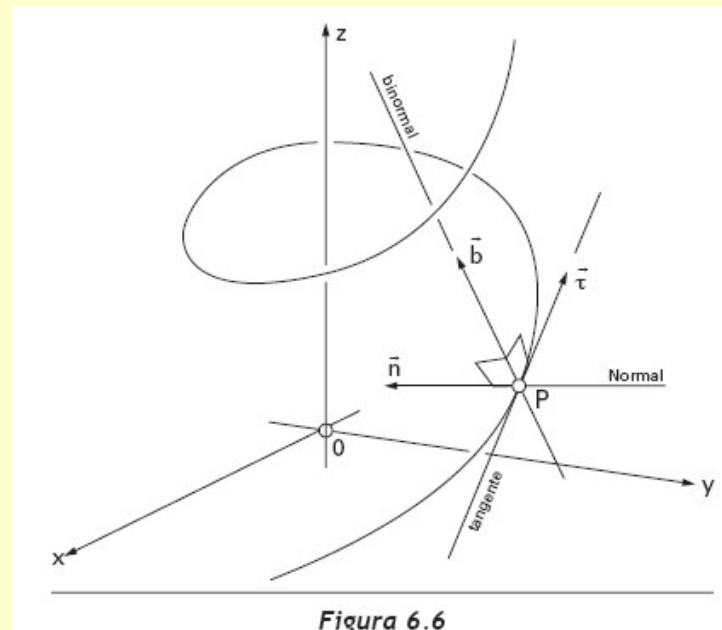


Figura 6.6

**Capítulo 4 (Giacaglia)****1 Geometria das Curvas****1.1 Vetor Função de um Parâmetro****1.2 Curva Função de um Parâmetro****1.3 Fórmulas de Frenet**

Coloquemos

$$\frac{\frac{d^2 P(\tau)}{d\tau^2}}{\left| \frac{d^2 P(\tau)}{d\tau^2} \right|} = \frac{\frac{d\bar{t}}{d\tau}}{\left| \frac{d\bar{t}}{d\tau} \right|} = \bar{n}$$

$$\frac{d^2 P(s)}{ds^2} = \frac{d\bar{t}}{ds} = \frac{1}{\rho} \bar{n} = c \bar{n} \quad (c \geq 0)$$

O escalar $\rho = \rho(s)$ chama-se *raio de curvatura* da curva em s e $c = c(s)$, *curvatura* em s . O vetor $\bar{n}$, de **módulo unitário**, chama-se **vetor normal** (principal)

Kaminski, P. C.; Mecânica Geral para Engenheiros; 1ª edição (demonstração: pág. 253)



Capítulo 4 (Giacaglia)

1 Geometria das Curvas

1.1 Vetor Função de um Parâmetro

1.2 Curva Função de um Parâmetro

1.3 Fórmulas de Frenet

vetor normal $\bar{n}$

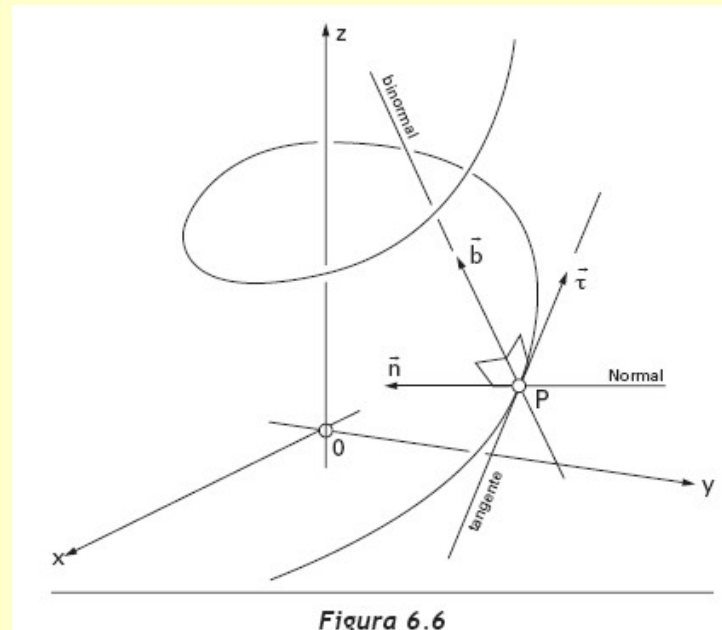


Figura 6.6

**Capítulo 4 (Giacaglia)****1 Geometria das Curvas****1.1 Vetor Função de um Parâmetro****1.2 Curva Função de um Parâmetro****1.3 Fórmulas de Frenet**

Existe um vetor $\bar{b}$ que é normal a $\bar{t}$ e a $\bar{n}$, portanto paralelo a $\bar{t} \wedge \bar{n}$

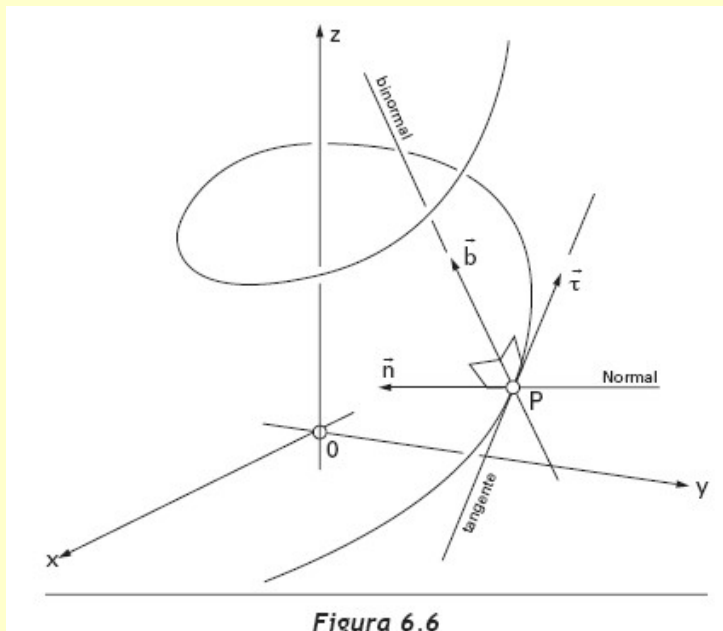


Figura 6.6

$$\bar{b} = \bar{t} \wedge \bar{n}$$

$\bar{b} \Rightarrow$ *vetor binormal*



Capítulo 4 (Giacaglia)

1 Geometria das Curvas

1.1 Vetor Função de um Parâmetro

1.2 Curva Função de um Parâmetro

1.3 Fórmulas de Frenet

vetor binormal $\bar{b}$

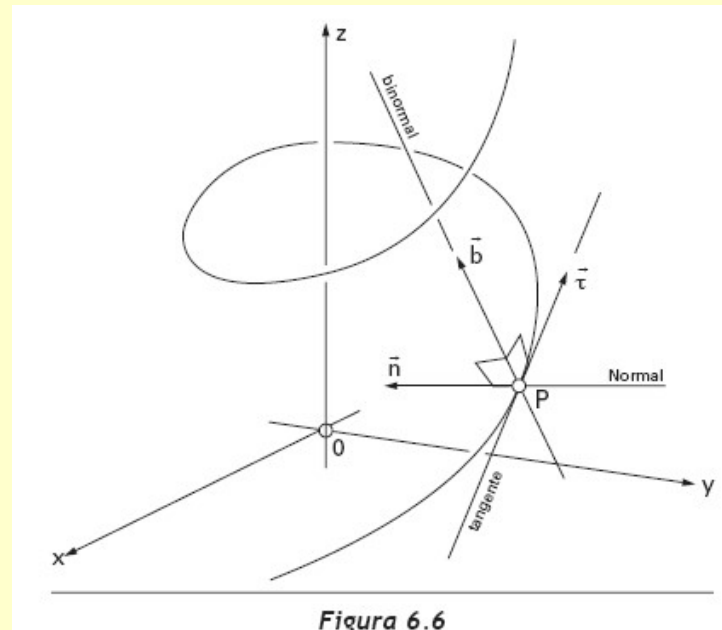


Figura 6.6

**Capítulo 4 (Giacaglia)****1 Geometria das Curvas****1.1 Vetor Função de um Parâmetro****1.2 Curva Função de um Parâmetro****1.3 Fórmulas de Frenet**

- O plano que contém os vetores $\bar{t}$ e $\bar{n}$ chama-se *plano osculador*
- O plano normal ao vetor $\bar{t}$ em P chama-se *plano normal* à curva
- Qualquer plano que contenha o vetor tangente, chama-se *plano tangente* à curva
- O plano normal ao plano osculador e que contém o vetor $\bar{t}$ chama-se *plano retificante*

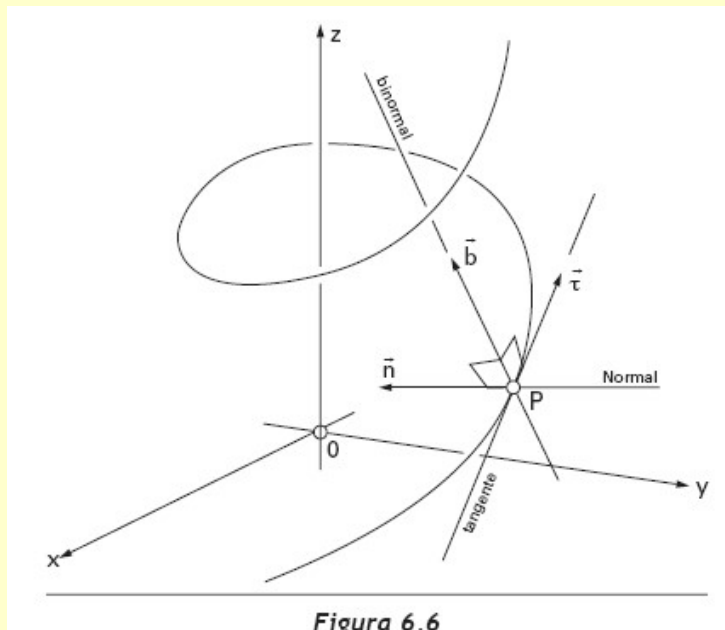
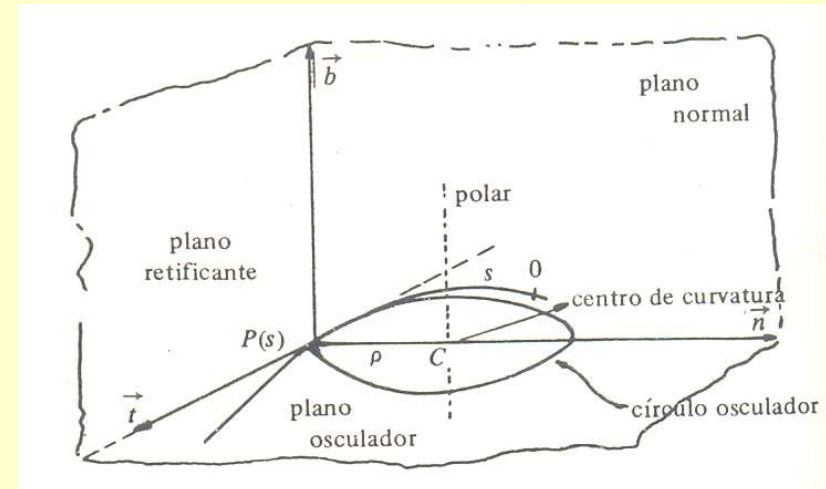


Figura 6.6



Fonte: GIACAGLIA, G. E. O. *Mecânica Geral*. 10ª ed.
Rio de Janeiro: Editora Campus Ltda, 1982.



Capítulo 4 (Giacaglia)

1 Geometria das Curvas

1.1 Vetor Função de um Parâmetro

1.2 Curva Função de um Parâmetro

1.3 Fórmulas de Frenet

Os vetores unitários

$$\bar{t}, \bar{n}, \bar{b}$$

constituem o chamado *Triedro de Frenet*

**Capítulo 4 (Giacaglia)****1 Geometria das Curvas****1.1 Vetor Função de um Parâmetro****1.2 Curva Função de um Parâmetro****1.3 Fórmulas de Frenet****1.3 Fórmulas de Frenet**

$$\frac{\frac{d^2 P(\tau)}{d\tau^2}}{\frac{d^2 P(\tau)}{d\tau^2}} = \frac{d^2 P(s)}{ds^2} = \frac{d\bar{t}}{ds} = \frac{1}{\rho} \bar{n} = c\bar{n} \quad (c \geq 0) \Rightarrow \text{equação vista no slide 13}$$

$$\frac{d\bar{t}}{ds} = \frac{1}{\rho} \bar{n} = c\bar{n}$$

1ª fórmula de Frenet

**Capítulo 4 (Giacaglia)****1 Geometria das Curvas****1.1 Vetor Função de um Parâmetro****1.2 Curva Função de um Parâmetro****1.3 Fórmulas de Frenet**

$\frac{d\bar{b}}{ds}$ é normal a $\bar{t}$ e a $\bar{b}$ e paralelo a $\bar{n}$

$$\frac{d\bar{b}}{ds} = \gamma \bar{n} \quad 2^{\text{a}} \text{ fórmula de Frenet}$$

γ é chamada *torção da curva* da curva em $P(s)$.
O inverso da torção chama-se *raio de torção*.

**Capítulo 4 (Giacaglia)****1 Geometria das Curvas****1.1 Vetor Função de um Parâmetro****1.2 Curva Função de um Parâmetro****1.3 Fórmulas de Frenet**

Derivemos agora a relação $\bar{n} = \bar{b} \wedge \bar{t}$ em relação a s

$$\frac{d\bar{n}}{ds} = \frac{d\bar{b}}{ds} \wedge \bar{t} + \bar{b} \wedge \frac{d\bar{t}}{ds} = \gamma \bar{n} \wedge \bar{t} + c \bar{b} \wedge \bar{n}$$

$$\boxed{\frac{d\bar{n}}{ds} = -\gamma \bar{b} - c \bar{t}} \quad 3^{\text{a}} \text{ fórmula de Frenet}$$



Capítulo 4 (Giacaglia)

1 Geometria das Curvas

1.1 Vetor Função de um Parâmetro

1.2 Curva Função de um Parâmetro

1.3 Fórmulas de Frenet

Resumo da ópera

$$\frac{d\bar{t}}{ds} = c\bar{n}$$

$$\frac{d\bar{b}}{ds} = \gamma\bar{n}$$

$$\frac{d\bar{n}}{ds} = -c\bar{t} - \gamma\bar{b}$$

são chamadas ***fórmulas de Frenet***



Capítulo 4 (Giacaglia)

1 Geometria das Curvas

1.1 Vetor Função de um Parâmetro

1.2 Curva Função de um Parâmetro

1.3 Fórmulas de Frenet

As equações $c = c(s)$ e $\gamma = \gamma(s)$ são chamadas *equações intrínsecas* da curva.

Dado um “ponto inicial” desta curva, elas fornecem, por intermédio das equações de Frenet, a curva de parâmetro s .



Capítulo 4 (Giacaglia)

1 Geometria das Curvas

1.1 Vetor Função de um Parâmetro

1.2 Curva Função de um Parâmetro

1.3 Fórmulas de Frenet

E 3.34 (livro Giacaglia)

Dada a curva S por suas equações paramétricas

$$x = a(\cos t - \sin t) \quad y = a(\sin t + \cos t) \quad z = at$$

Determinar os vetores da tangente, da normal principal e da binormal.
(Triedro de Frenet)



PERGUNTAS?

