Escola Politécnica da USP – Departamento de Engenharia de Produção

PRO3252 Automação e controle

Cap. 4 – Modelagem de sistemas dinâmicos com Transformadas de Laplace
Quadros de Transformadas e Exercícios

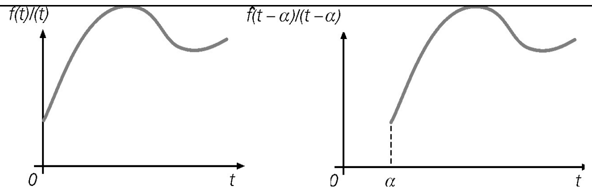
Profs. Drs. Mauro de Mesquita Spinola e Marcelo Schneck de Paula Pessôa

1 Transformadas de Laplace de funções comuns

	Função f(t)	Transformada de Laplace F(s) = $\mathcal{L}[f(t)]$
1.	δ(t) Impulso unitário (Delta de Dirac)	1
2.	1(t) ou u(t) Degrau unitário	$\frac{1}{s}$
3.	t Rampa unitária	$\frac{1}{s^2}$
4.	t^n (n inteiro positivo)	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
5.	e^{-at} Exponencial	$\frac{1}{s+a}$
6.	te^{-at}	$\frac{1}{(s+a)^2}$
7.	$t^n e^{-at}$	$\frac{n!}{(s+a)^{n+1}}$
8.	sen ωt	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$
9.	cos ωt	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$
10.	e^{-at} sen ωt	$\frac{s}{(s+a)^2+\omega^2}$
11.	e^{-at} cos ωt	$\frac{s+a}{(s+a)^2+\omega^2}$
12.	t sen ωt	$\frac{2\omega s}{(s^2+\omega^2)^2}$

	Função f(t)	Transformada de Laplace F(s) = ℒ[f(t)]
13.	t cos ωt	$\dfrac{s^2-\omega^2}{(s^2+\omega^2)^2}$

2 Algumas propriedades da Transformada de Laplace

	Propriedade	Representação matemática
1.	Linearidade ou Homogeneidade	$\mathscr{L}\left[\alpha\, f(t)\right] = \alpha\, \mathscr{L}\left[f(t)\right] = \alpha\, F(s)$
2.	Aditividade	$\mathscr{L}\left[\, f_1(t) \pm f_2(t)\,\right] = \mathscr{L}\left[\, f_1(t)\,\right] \pm \mathscr{L}\left[\, f_2(t)\,\right] = F_1(s) \pm F_2(s)$
3.	Translação no tempo	 $\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)1(\tau)e^{-s(\tau+\alpha)}d\tau = e^{-\alpha s}F(s)$
4.	Derivação	$\mathscr{L}[\frac{d}{dt}f(t)] = \mathscr{L}[Df(t)] = s\,F(s) - f(0)$
5.	Integração	$\mathscr{L}[\int f(t)\,dt\,] = \mathscr{L}[D^{-1}f(t)dt] = \frac{1}{s}\,F(s)\; + \frac{1}{s}\; D^{-1}[f(0)]$
6.	Teorema valor inicial	$f(0^+) = \lim_{s\to\infty} sF(s)$
7.	Teorema do valor final	$\lim_{t\to\infty} f(t) = \lim_{s\to 0} sF(s)$
8.	Multiplicação pela função exponencial	$\mathscr{L}\left[e^{-\alpha t} f(t)\right] = \int_0^{\infty} e^{-\alpha t} f(t)e^{-st}dt = \int_0^{\infty} e^{-(s+\alpha)t} f(t)dt = F(s+\alpha)$
9.	Transformada inversa	$\mathscr{L}^{-1}[F(s)] = f(t) = \frac{1}{2\pi j}\int_{c-j\infty}^{c+j\infty} F(s)e^{st}ds, t>0$

3 Exercícios

1. Obtenha a Transformada de Laplace das seguintes funções:

   a) f(t) = 5

   b) f(t) = 5t

   c) f(t) = $5e^{-4t}$

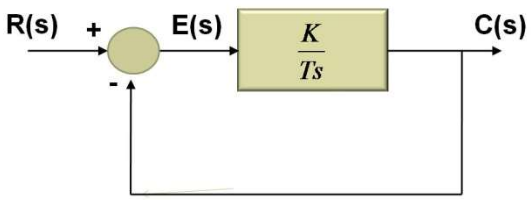
   d) f(t) = 5 sen(3t)

2. Obtenha a antitransformada de Laplace das funções seguintes:

$$R_1(s) = \frac{1}{s^2 + 5s + 6}$$

$$R_2(s) = \frac{1}{s^2 + 5s + 6}\frac{1}{s}$$

3. Considere um sistema com o seguinte diagrama de blocos, com K=10 e T=2ms:



   a) Obtenha a função de transferência do sistema, C(s)/R(s).

   b) Obtenha a resposta ao degrau unitário, no domínio de frequência.

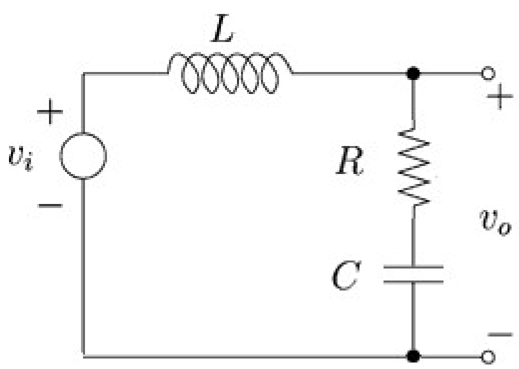
   c) Obtenha a resposta ao degrau unitário, no domínio do tempo, para t>0.

   d) Desenhe um gráfico esquemático (sem escala), mostrando o desempenho do sistema no tempo estimulado pelo impulso unitário.

   e) Discuta o que ocorre com a resposta no tempo se for aumentado o valor de K (mantendo T=2ms).

   f) Discuta o que ocorre com a resposta se a constante T aumentar (mantendo K=10).

4. Função de transferência de um circuito elétrico RLC. Seja o circuito elétrico RLC representado na Figura.



As equações que regem o comportamento desse circuito estão representadas por:

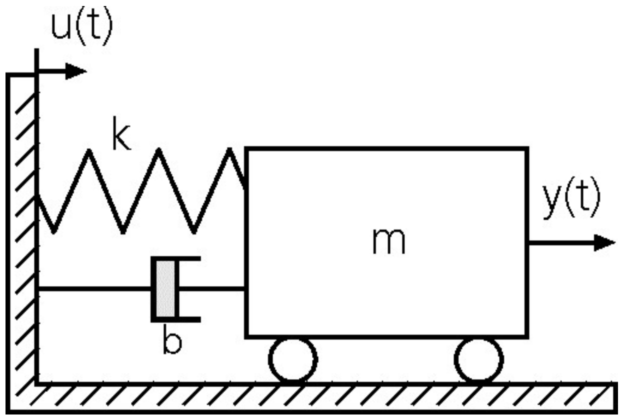
$$v(t) = Ri(t)$$

$$i(t) = C\frac{dv(t)}{dt}$$

$$v(t) = L\frac{di(t)}{dt}$$

Desenvolva a função de transferência desse circuito. Essa função vai fornecer a relação entre a saída Vo(s) e a entrada Vi(s). Em outras palavras, será necessário determinar G(s)=Vo(s)/Vi(s).

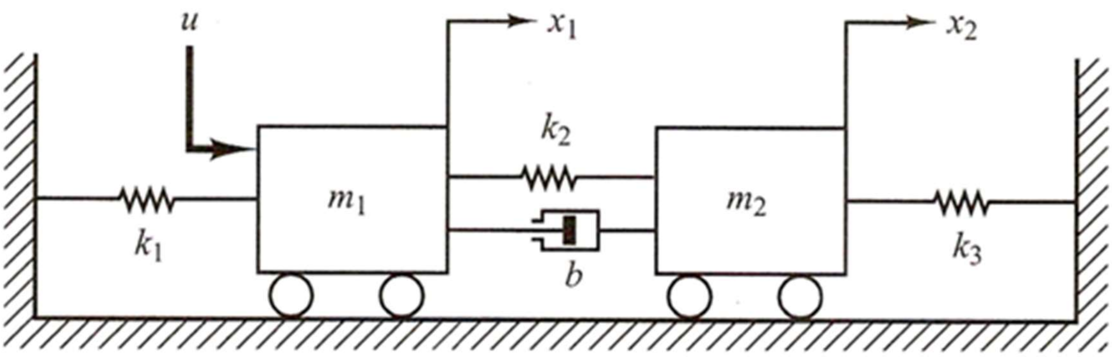
5. Função de transferência de um sistema massa-mola-amortecedor. Seja o sistema mecânico representado na Figura. Pode-se entender que a massa **m** está solidária a uma caçamba de caminhão que se movimenta seguindo a equação de posição **u(t)**. A massa **m** prende-se à caçamba através de uma mola cuja constante é **k** e um amortecedor de coeficiente **b**.



Esse sistema pode ser modelado aplicando-se as equações da física referentes à força na massa, na mola e no amortecedor, conforme a Equação:

Equação da massa	$\sum F = ma$
Equação da mola	$F_1 = -k(y-u)$
Equação do amortecedor	$F_2 = -b\dfrac{d(y-u)}{dt}$

6. Seja o sistema da figura abaixo:



As equações diferenciais desse sistema são:

$$m_1\ddot{x}_1 = -k_1x_1 - k_2(x_1 - x_2) - b(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) + u$$
$$m_2\ddot{x}_2 = -k_3x_2 - k_2(x_2 - x_1) - b(\dot{x}_2 - \dot{x}_1)$$

Fazer o gráfico no Wolfram da resposta a impulso no tempo considerando os seguintes valores:

m1=100

m2=250

k1=0

k2=2

k3=8

b=10