

## **PMR3409 – CONTROLE II**

### **EXPERIÊNCIA 2**

## **TEOREMA DE AMOSTRAGEM E RECONSTRUÇÃO DE SINAIS AMOSTRADOS**

### **1. INTRODUÇÃO**

Esta experiência tem por objetivo a observação prática dos efeitos da amostragem digital de sinais contínuos e reconstrução de sinais.

A Seção 2 apresenta a teoria de Séries e Transformada de Fourier e a teoria de amostragem. O conhecimento desta teoria é fundamental para entender os resultados da experiência.

## 2. FUNDAMENTOS TEÓRICOS

### 2.1. Teoria de Amostragem

A amostragem de um sinal contínuo consiste em simplesmente trocar os valores do sinal por um conjunto discreto de pontos. Estes pontos são iguais aos valores do sinal nos chamados instantes de amostragem. O resultado da amostragem é então uma sequência de números.

A amostragem quando é realizada com períodos de amostragem fixos, é chamada amostragem uniforme. Nesta experiência somente serão tratadas amostragens uniformes. O período de amostragem, que é o tempo decorrido entre duas amostragens consecutivas, será denominado por  $T_a$ . A frequência de amostragem é o inverso do período de amostragem, sendo calculada por:

$$\omega_a = \frac{2\pi}{T_a}, \text{ em rad/s, ou,} \quad (1)$$

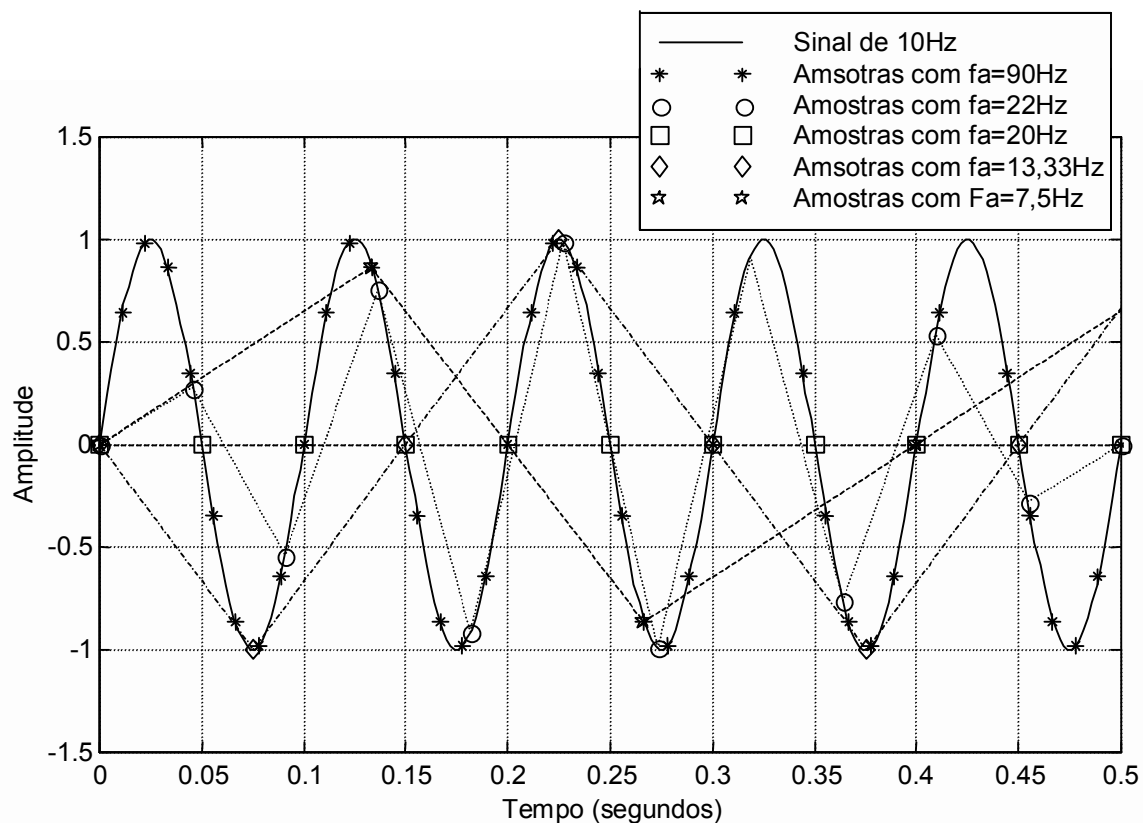
$$f_a = \frac{1}{T_a}, \text{ em Hz.} \quad (2)$$

Muita pouca informação é perdida pela amostragem de um sinal contínuo se os instantes de amostragem estão suficientemente “próximos”, mas muito da informação pode ser perdida se os instantes de amostragem estiverem “longe”. Isto pode ser visto pela Figura 1 abaixo, na qual a função seno com frequência de 10Hz (período de 0,1 segundos) é amostrada.

Observa-se pela Figura 1 que a partir das amostras obtidas com  $f_a = 90\text{Hz}$  ( $f_a \gg f_s$ , onde  $f_s$  é a frequência do sinal original de 10Hz) é fácil conhecer (reconstruir) o sinal original perfeitamente, sem perda de informação. Com  $f_a = 22\text{Hz}$  ( $f_a = 2,2f_s$ ) ainda é possível reconstruir o sinal, sabendo-se a sua frequência verdadeira. Com  $f_a = 20\text{Hz}$  ( $f_a = 2f_s$ ), o sinal reconstruído pode ser uma reta ou uma curva senoidal, contudo mesmo conhecendo-se a frequência do sinal é impossível obter a sua amplitude correta, dessa forma, perdeu-se alguma informação do sinal original. Com  $f_a = 13,33\text{Hz}$  ( $f_a = 4f_s/3$ ) o sinal reconstruído tem frequência de 0,33Hz (período de 0,3s), o que é completamente diferente de 10Hz. Com  $f_a = 7,5\text{Hz}$  ( $f_a = 3f_s/4$ ) o sinal reconstruído tem frequência de 2,5Hz (período de 0,4s), que também é diferente de 10Hz, que é a frequência do sinal original.

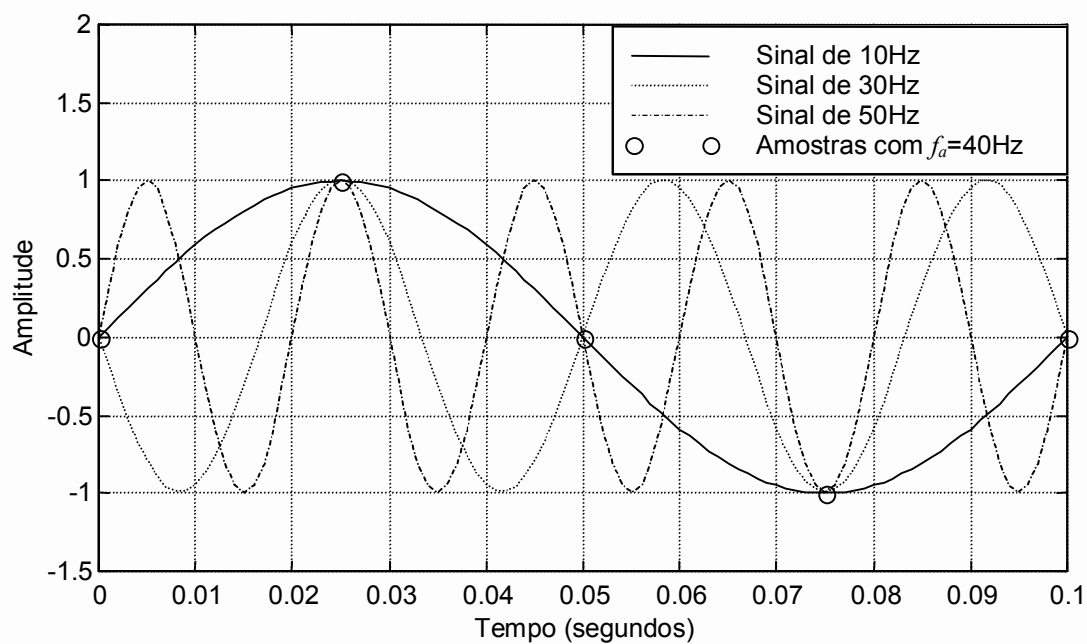
Portanto, as seguintes conclusões podem ser feitas a partir da Figura 1:

- (1) Algumas frequências de amostragem distorcem o sinal, isto é, o sinal original é perdido;
- (2) A frequência de amostragem a ser utilizada para que não ocorra distorção do sinal, depende da frequência do sinal;
- (3) A frequência de amostragem para que não distorção do sinal deve ser maior do 2 vezes a frequência do sinal.



**Figura 1:** Amostragem da função seno de 10Hz com diversas frequências de amostragem

A Figura 2 apresenta três sinais sendo amostrados com o mesmo período de amostragem.



**Figura 2:** Amostragem de três sinais de frequências diferentes com a mesma frequência de amostragem ( $f_a = 40\text{Hz}$ , ou  $T_a = 0,025\text{s}$ ).

As seguintes conclusões podem ser feitas a partir da Figura 2:

- (1) Não existe uma função única que gera um determinado conjunto de amostras;
- (2) Existem infinitas funções que geram o mesmo conjunto de amostras;
- (3) Sem a adoção de algumas hipóteses não é possível saber que sinal gerou as amostras obtidas, ou seja, conhecer o sinal original;
- (4) De todas as curvas senoidais possíveis existe somente uma com frequência abaixo de  $20\text{Hz}$  ou  $f_a/2$ , que gera este conjunto de amostras.

A frequência  $f_a/2$  ou  $\pi/T_a$  é chamada frequência de Nyquist e tem um papel importante da teoria de amostragem, como será visto adiante.

### Matemática da amostragem

Um amostrador pode ser modelado como um trem de pulsos uniformemente espaçados no tempo, com período igual a  $T_a$  (período de amostragem), como mostra a Figura 3.

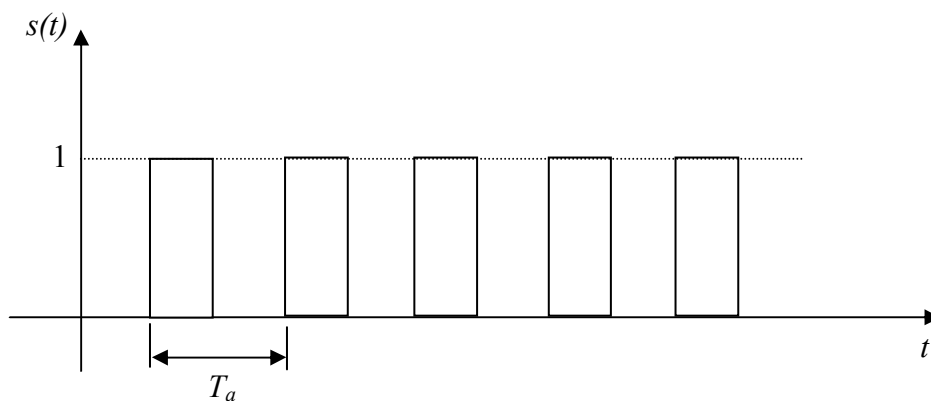


Figura 3: Amostrador modelado por um trem de pulsos.

A amostragem pode ser vista como um fenômeno de modulação (multiplicação), como representado pela equação abaixo:

$$f^*(t) = f(t)s(t); \quad (3)$$

onde  $f(t)$  é a função original,  $s(t)$  é o amostrador e  $f^*(t)$  é a função amostrada. A Figura 4 mostra uma função qualquer modulada pelo amostrador.

Um amostrador ideal é aquele em que os pulsos ocorrem em um instante de tempo infinitesimal e tem área unitária, ou seja, são impulsos formados pela função Delta de Dirac. Assim, um amostrador ideal pode ser representado pela seguinte equação:

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \delta(t - nT_a). \quad (4)$$

Na expressão (4)  $n$  é um número inteiro que varia de  $-\infty$  a  $+\infty$  e  $nT_a$  é a escala de tempo discreto, ou seja, os instantes onde ocorrem as amostragens, ou ainda, os instantes de amostragem. A Figura 5 apresenta um gráfico do amostrador ideal.

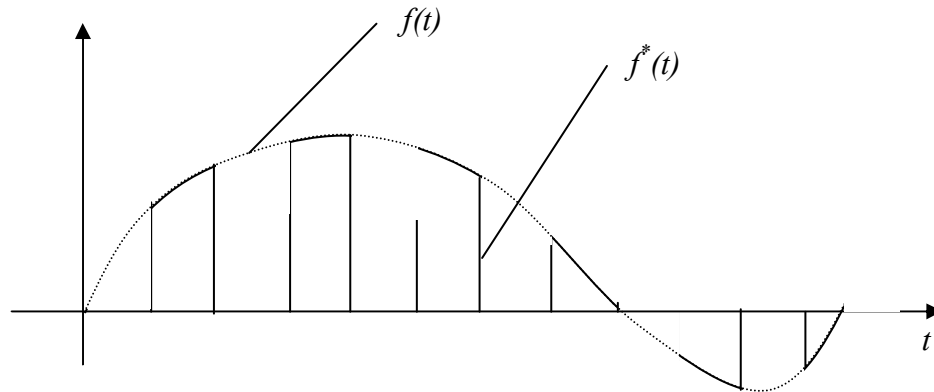


Figura 4: Função qualquer modulada pelo amostrador.

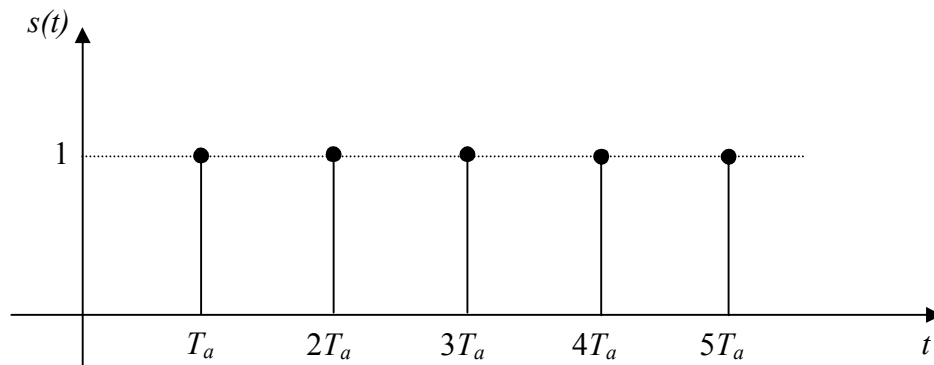


Figura 5: Amostrador ideal.

Somente para fins de recordação, a definição e as principais propriedades da função Delta de Dirac (função impulso) são as seguintes:

Definição:

$$\delta(t - t_1) = \begin{cases} 0, & \text{para } t \neq t_1; \\ \infty, & \text{para } t = t_1; \end{cases} \quad (5)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t - t_1) dt = 1. \quad (6)$$

Propriedade do deslocamento:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\delta(t-t_1)dt = f(t_1). \quad (7)$$

Na medida em o amostrador ideal é uma função periódica, pode ser representada por uma série de Fourier, assim, tem-se:

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} C_n e^{jnw_a t}, \quad (8)$$

onde os coeficientes  $C_n$  são iguais a:

$$C_n = \frac{1}{T_a} \int_{-T_a/2}^{T_a/2} \delta(t) e^{-jnw_a t} dt = \frac{1}{T_a} e^0 = \frac{1}{T_a}. \quad (9)$$

Observa-se que a primeira passagem da expressão acima é realizada em consequência da propriedade de deslocamento da função Delta de Dirac.

Substituindo a equação (8) na equação (3), tem-se que o sinal amostrado é dado por:

$$f^*(t) = f(t) \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} C_n e^{jnw_a t}. \quad (10)$$

Calculando a Transformada de Fourier do sinal amostrado, tem-se:

$$F^*(j\omega) = \mathfrak{F}\{f^*(t)\} = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} C_n \mathfrak{F}\{f(t)e^{jnw_a t}\}. \quad (11)$$

Uma das propriedades da Transformada de Fourier é a propriedade da multiplicação por uma exponencial complexa no tempo, como se segue:

$$\mathfrak{F}\{f^*(t)e^{jat}\} = F\{j(\omega - a)\}. \quad (12)$$

Utilizando esta propriedade na equação (11), obtém-se a seguinte expressão:

$$F^*(j\omega) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} C_n F\{j(\omega - n\omega_a)\}. \quad (13)$$

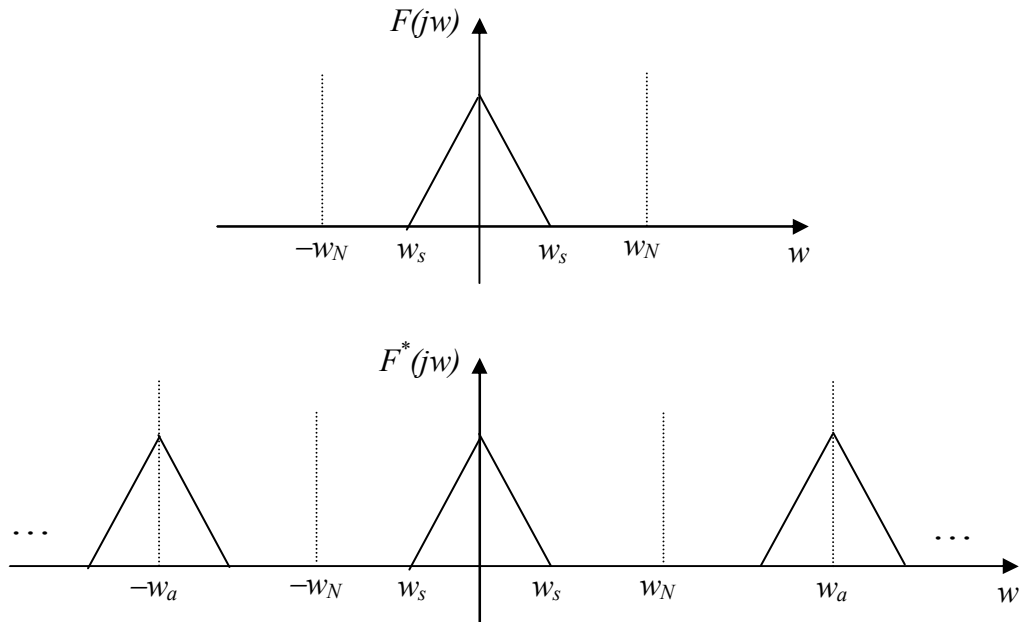
Para o caso do amostrador ideal  $C_n = 1/T_a$ , assim tem-se que:

$$F^*(j\omega) = \frac{1}{T_a} \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} F\{j(\omega - n\omega_a)\}. \quad (14)$$

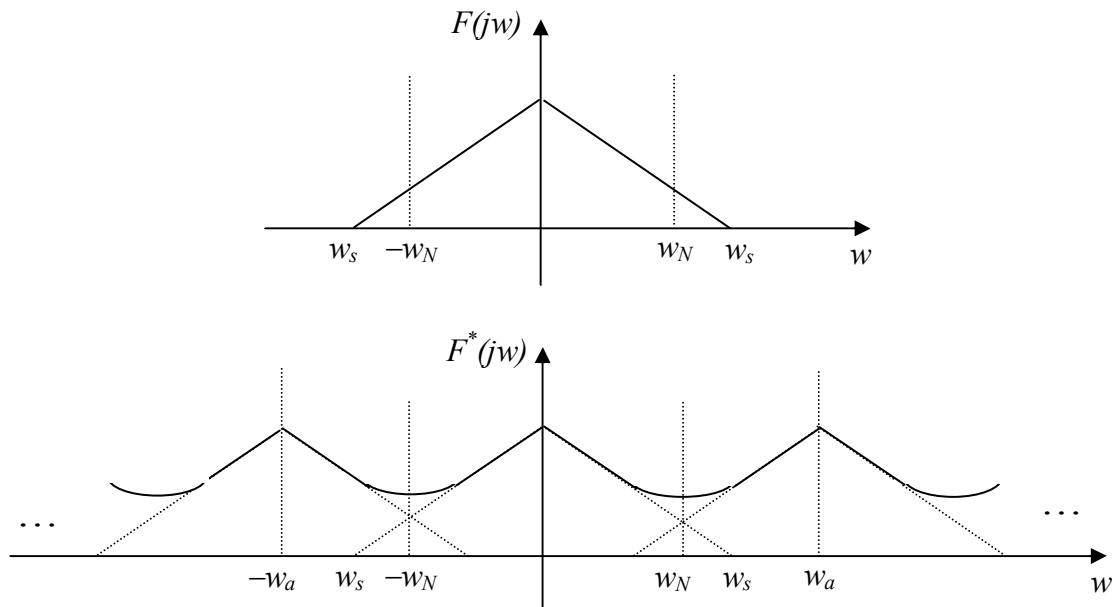
Da expressão acima observa-se que a Transformada de Fourier do sinal amostrado, ou o seu espectro de frequências, é dada pela Transformada de Fourier, ou pelo espectro de frequências, do sinal original multiplicado pelo inverso do período de amostragem e replicado infinitas vezes em torno de múltiplos da frequência de amostragem. Dessa forma a

amostragem introduz novas componentes de frequência que consistem em translações do espectro do sinal original. A Figura 6 ilustra este fenômeno.

Caso (a):



Caso (b):



**Figura 6:** Espectro de frequências de um sinal amostrado. Caso (a): frequência de amostragem maior do que 2 vezes a frequência máxima do sinal. Caso (b): frequência de amostragem menor do que 2 vezes a frequência máxima do sinal.

Observa-se que todos os picos do espectro de frequências do sinal amostrado tem a mesma amplitude.

Assim, dada uma frequência de amostragem  $w_a$ , quaisquer componentes senoidais com frequências,  $w$ , iguais a:

$$w = nw_a \pm w_0, \quad (15)$$

irão gerar as mesmas amostras. Observa-se que  $w_0$  representa a menor frequência que pode gerar o dado conjunto de amostras e  $n$  é qualquer número inteiro de 0 até  $\infty$ . A Figura 2 já ilustrou este fenômeno com três sinais de frequências 10Hz, 30Hz ( $w_a - 10\text{Hz}$ ) e 50Hz ( $w_a + 10\text{Hz}$ ), gerando as mesmas amostras.

A partir destes resultados pode-se concluir que se o sinal original,  $f(t)$ , pode ser obtido através de sua Transformada de Fourier,  $F(jw)$ , e se  $F(jw)$  pode ser obtida da Transformada Fourier do sinal amostrado,  $F^*(jw)$ , então usando a Transformada Inversa de Fourier, o sinal  $f(t)$  pode ser determinado a partir do sinal amostrado  $f^*(t)$ .

No caso (b) da Figura 6, observa-se claramente que a Transformada de Fourier do sinal amostrado,  $F^*(jw)$ , é distorcida, portanto, a partir de  $F^*(jw)$  não é possível obter  $F(jw)$ .

## Teorema de Amostragem

Seja um sinal  $f(t)$  cuja Transformada de Fourier é dada por  $F(jw)$ . A amostragem deste sinal com um período de amostragem igual a  $T_a$ , gera o sinal amostrado,  $f^*(t)$ , cuja Transformada de Fourier é  $F^*(jw)$ . Assim, se  $F(jw) = 0$ , para toda frequência,  $w \geq \pi/T_a = w_N = w_a/2$ , então

$$F(jw) = \begin{cases} T_a F^*(jw), & \text{para } -w_N \leq w \leq w_N; \\ 0, & \text{para } w \text{ fora deste intervalo.} \end{cases} \quad (16)$$

Desta forma o sinal  $f(t)$  pode ser reconstruído a partir de suas amostras.

A conclusão mais importante do Teorema de Amostragem é que um sinal para ser reconstruído sem erro, ou para se observado sem distorções, deve ser amostrado com uma frequência de amostragem,  $w_a$ , maior do que 2 vezes a frequência máxima do sinal,  $w_{s,\text{máximo}}$ , ou seja:

$$w_a > 2w_{s,\text{máximo}}. \quad (17)$$

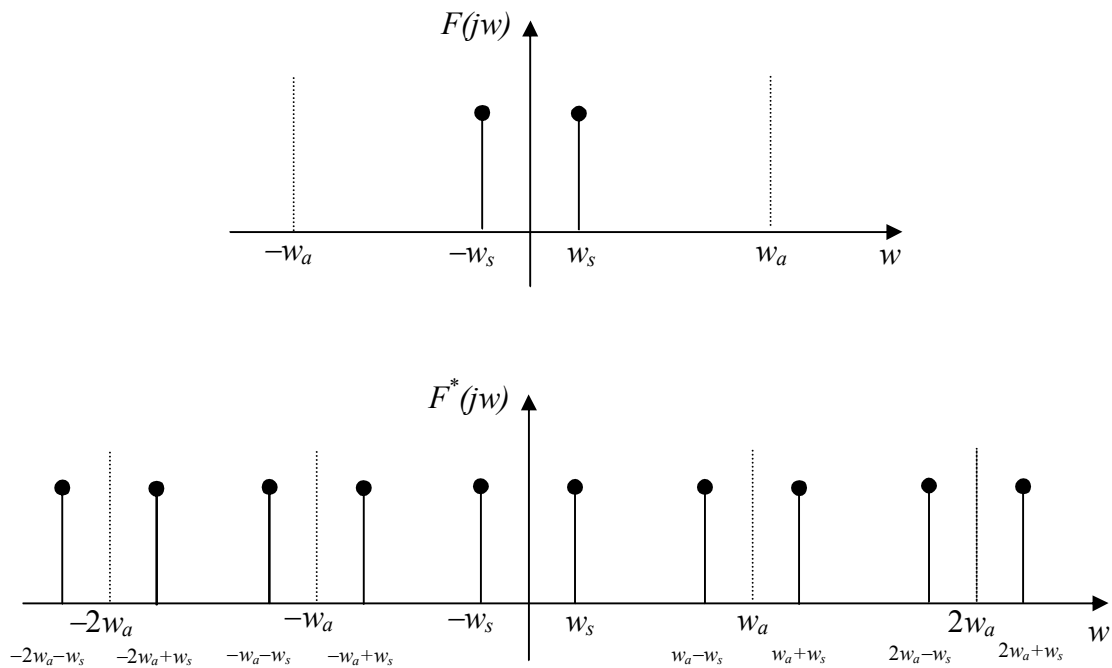
Na prática o que se faz é amostrar um sinal com frequência 5 a 20 vezes maior do que a máxima frequência do sinal.

Quando não for possível amostrar mais rápido do que duas vezes a frequência máxima do sinal, deve-se utilizar um filtro analógico passa baixo com frequência de corte igual a  $w_N$ . Este filtro deve implementado antes da amostragem do sinal, de forma a eliminar as frequências maiores do que  $w_N$  e assim evitar distorção do sinal. Este filtro é conhecido como filtro "anti-aliasing".

## 2.2. Aliasing ou Distorção do Espectro de Freqüências

O fenômeno de superposição dos espectros de freqüência do sinal amostrado, ou de distorção do sinal amostrado, é chamado de *aliasing*. Nas amostragens onde ocorre *aliasing* não é possível obter o sinal a partir das amostras, ou seja, não é possível reconstruir o sinal.

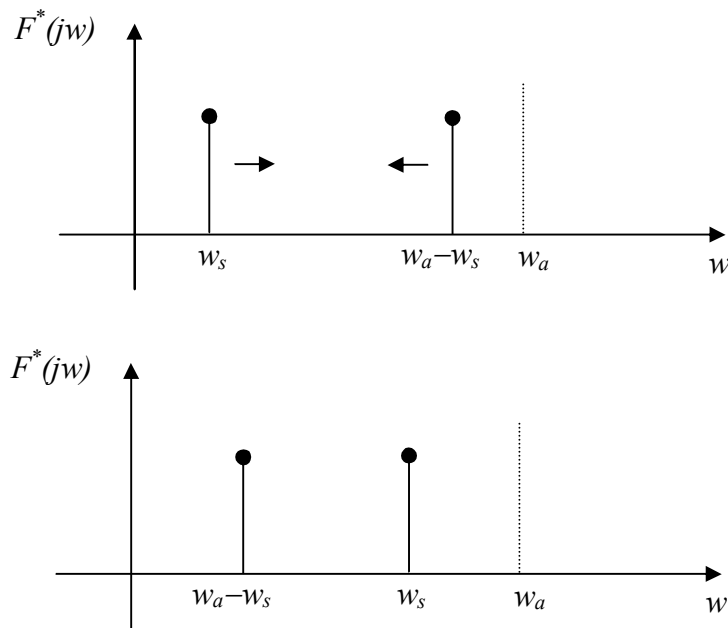
A Figura 7 apresenta o espectro de freqüência de um sinal senoidal, com freqüência  $w_s$ , amostrado com freqüência  $w_a$ .



**Figura 7:** Espectro de freqüências de um sinal senoidal amostrado.

Admitindo-se que  $w_s$  aumenta e que  $w_a$  é mantida fixa, com a Figura 8 pode-se observar o que ocorre com o espectro de freqüência do sinal no intervalo de freqüência de 0 a  $w_a$ . Assim, a partir da Figura 8 conclui-se que o fenômeno de *aliasing* transforma componentes de alta freqüência em componentes de baixa freqüência e vice versa.

Observa-se que um sinal reconstruído a partir de amostras sempre será o sinal de menor freqüência, dentro do intervalo de 0 a  $w_a/2$ . Este fenômeno será visto na seção 2.4 Reconstrução de sinais. Assim, se ocorrer *aliasing* o sinal original será inevitavelmente perdido.



**Figura 8:** Variação do espectro de frequências de um sinal senoidal amostrado no intervalo de frequência de 0 a  $\omega_a$  a medida que  $\omega_s$  aumenta.

## 2.3. Transformada Discreta de Fourier

A Transformada Fourier Discreta de um sinal,  $f(t)$ , é a transformada de Fourier do sinal amostrado,  $f^*(t)$ . A importância da Transformada Fourier Discreta reside no fato de que através dela pode-se calcular a Transformada Fourier de um sinal amostrado. Por sinal esta é a única forma de se calcular a Transformada Fourier de um sinal amostrado.

Utilizando a definição da Transformada de Fourier, tem-se que:

$$F^*(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f^*(t) e^{-j\omega t} dt. \quad (18)$$

Substituindo  $f^*(t)$  pela expressão (10), tem-se:

$$F^*(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \delta(t - nT_a) e^{-j\omega t} dt. \quad (19)$$

Como as variáveis  $t$  e  $n$  são independentes pode-se rearranjar a equação acima da seguinte forma:

$$F^*(j\omega) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \delta(t - nT_a) e^{-j\omega t} dt. \quad (20)$$

Pela propriedade do deslocamento da função Delta de Dirac, o valor da integral na expressão acima é igual ao valor da função no instante  $nT_a$ , assim,

$$F^*(j\omega) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} f(nT_a) e^{-j\omega nT_a} . \quad (21)$$

A expressão acima é conhecida como a Transformada Fourier Discreta do sinal  $f(t)$  amostrado. Observa-se que, esta transformada é calculada somente a partir das amostras do sinal, obtidas nos instantes de amostragem.

## 2.4. Reconstrução de Sinais

A reconstrução de um sinal consiste em obter o sinal original no tempo contínuo, ou seja, em qualquer instante de tempo, a partir de suas amostras. O objetivo da reconstrução é que o sinal reconstruído seja o mais próximo possível do sinal original. Para que o sinal original seja reconstruído sem erros, deve-se amostrar o sinal de acordo com as condições impostas pelo Teorema de Amostragem, ou seja, amostrar o sinal com uma frequência de pelo menos 2 vezes a frequência máxima do sinal.

A reconstrução de um sinal baseia-se no Teorema de Amostragem, ou seja, a partir do espectro de frequências do sinal amostrado no intervalo de  $-\omega_N \leq \omega \leq +\omega_N$ , calcula-se a Transformada Fourier Inversa e obtém-se o sinal reconstruído. Portanto, se o espectro de frequências do sinal original for distorcido, ou seja, se ocorreu *aliasing*, o sinal reconstruído será diferente do sinal original. Os reprodutores são na verdade filtros passa baixa com frequência de corte igual a  $\omega_N$ .

Nesta apostilha somente três reprodutores serão estudados: (1) o reprodutor ideal, ou de Shannon, ou ainda Cardinal; (2) o reprodutor de ordem zero; e (3) o interpolador linear.

### Reprodutor Ideal (ou de Shannon, ou Cardinal)

O reprodutor ideal é obtido diretamente através das equações utilizadas para introduzir o Teorema de Amostragem. Este reprodutor é o único que teoricamente reconstrói o sinal original sem nenhum erro. Porém, este reprodutor, como será visto, não serve para ser utilizado em malhas de controle, as quais devem operar tempo real.

Segundo o Teorema de Amostragem o sinal original,  $f(t)$ , pode ser obtido através do cálculo da Transformada Fourier Inversa de  $F^*(j\omega)$ , na região de frequências  $\omega_a/2 \leq \omega \leq \omega_a/2$ . Assim, calculando a Transformada Inversa de Fourier (equação 15), tem-se:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(j\omega) e^{j\omega t} d\omega . \quad (22)$$

Assumindo que o Teorema de amostragem é válido, então, substituindo-se  $F(j\omega)$  pela equação (16), obtém-se:

$$f(t) = \frac{T_a}{2\pi} \int_{-W_a/2}^{W_a/2} F^*(j\omega) e^{j\omega t} d\omega. \quad (23)$$

A equação (21) fornece a Transformada Fourier Discreta do sinal  $f(t)$ , que substituindo na expressão anterior, resulta em:

$$f(t) = \frac{T_a}{2\pi} \int_{-W_a/2}^{W_a/2} \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} (f(nT_a) e^{-j\omega n T_a}) e^{j\omega t} d\omega. \quad (24)$$

Na medida em que  $n$  e  $t$  são variáveis independentes, a somatória pode ser colocada fora da integral, assim:

$$f(t) = \frac{T_a}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} f(nT_a) \int_{-W_N}^{W_N} e^{j\omega(t-nT_a)} d\omega. \quad (25)$$

Realizando a integral e lembrando que  $\pi/T_a$  é a frequência de Nyquist,  $w_N$ , resulta em:

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} f(nT_a) \frac{e^{jw_N(t-nT_a)} - e^{-jw_N(t-nT_a)}}{2jw_N(t-nT_a)}. \quad (26)$$

ou,

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} f(nT_a) \frac{\sin(w_N(t-nT_a))}{w_N(t-nT_a)}. \quad (27)$$

Esta equação representa a fórmula do reconstrutor ideal. Algumas observações sobre este reconstrutor são necessárias:

- (1) Tendo-se as amostras do sinal,  $f(nT_a)$ , para todos os instantes de tempo, é possível reconstruir o sinal original sem erro, a qualquer instante de tempo;
- (2) A fórmula obtida indica que esta reconstrução é não causal, ou seja, depende de valores futuros das amostras, portanto na prática não é implementável;
- (3) Na prática para reconstruir um sinal não são necessárias todas as suas amostras, a precisão da reconstrução é função do número de termos utilizados;
- (4) Na prática se não existir preocupação de tempo real na reconstrução, então é possível reconstruir o sinal admitindo um atraso.

A função  $\sin(x)/x$ , que aparece na fórmula do reconstrutor ideal, é também conhecida como  $\text{sinc}(x)$ . Um gráfico desta função é apresentado na Figura 9.

A Figura 10 apresenta um trecho de um sinal senoidal reconstruído a partir da fórmula do reconstrutor ideal. Nesta figura, o sinal original tem frequência de 4Hz e a frequência de amostragem é de 10Hz. Observa-se que para reconstruir este sinal no intervalo de 0 a 1 segundo, foram utilizadas somente 20 amostras do sinal.

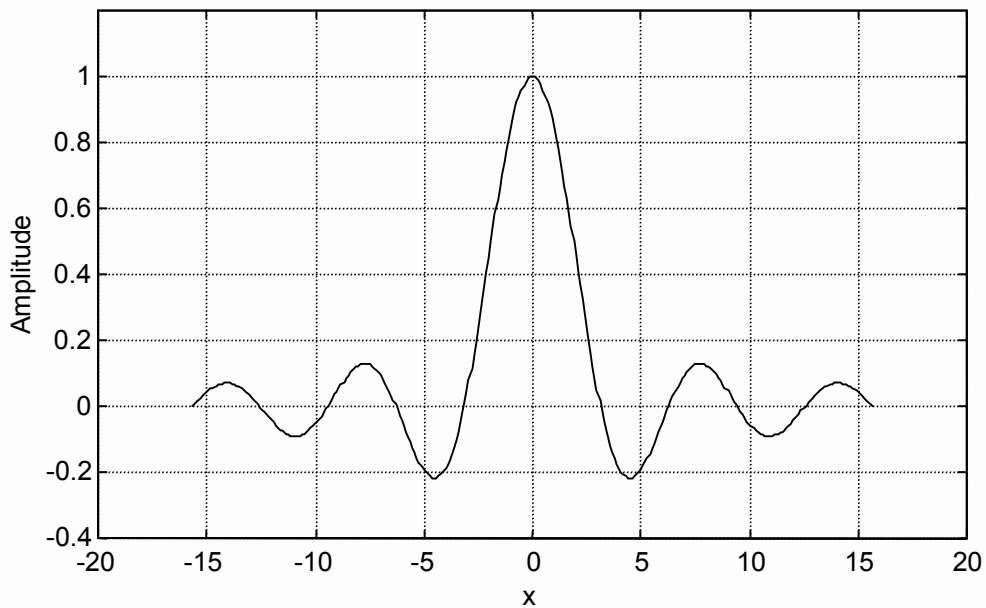


Figura 9: Gráfico da função  $\text{sinc}(x)$ .

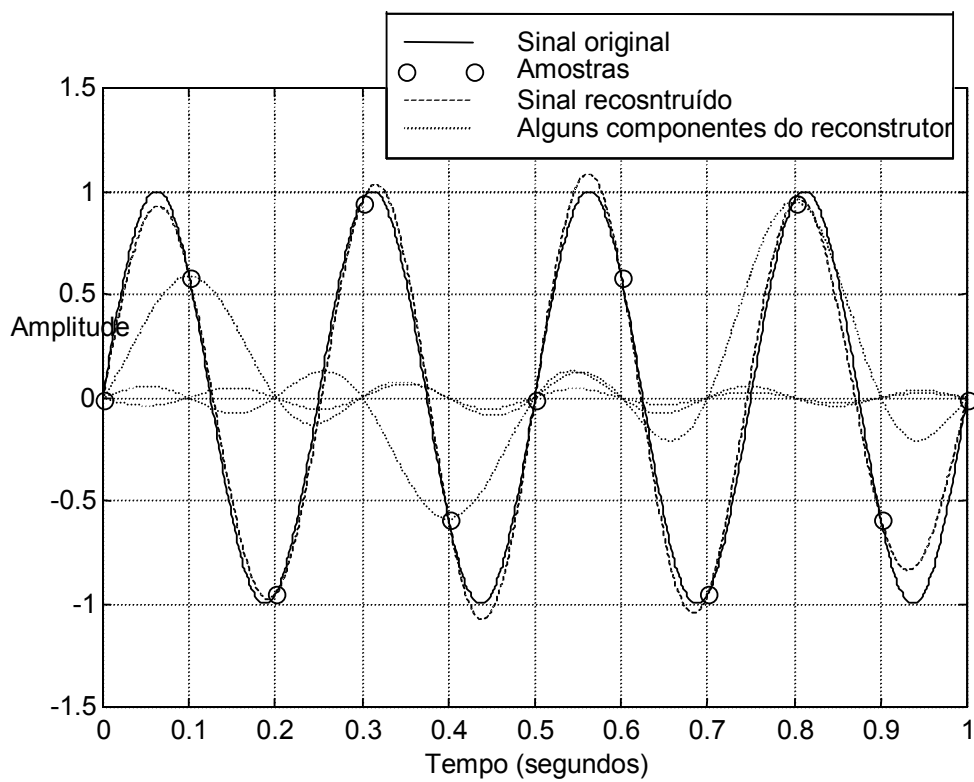


Figura 10: Exemplo de um sinal reconstruído com o reconstrutor ideal.

## Reconstrutor de Ordem Zero

O reconstrutor de ordem zero simplesmente mantém o valor do sinal constante e igual à última amostra durante um intervalo de amostragem. A Figura 11 apresenta um exemplo de um sinal senoidal reconstruído com um reconstrutor de ordem zero.

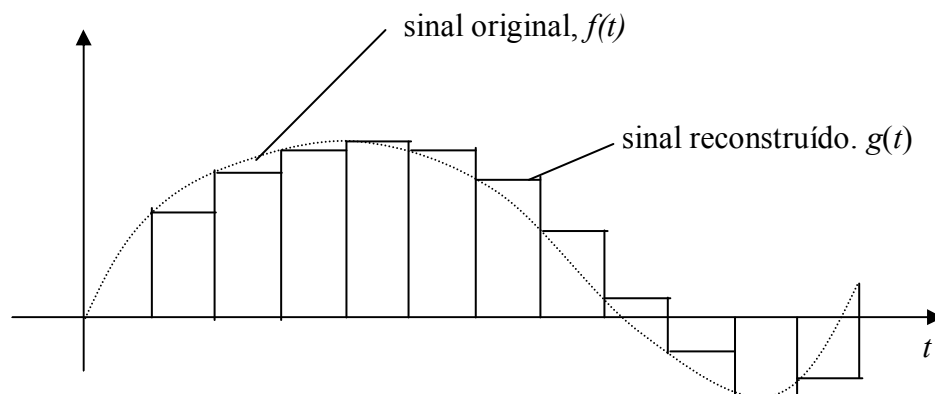


Figura 11: Exemplo de um sinal reconstruído com o reconstrutor de ordem zero.

A equação que reconstrói o sinal amostrado segundo o reconstrutor de ordem zero é a seguinte:

$$g(t) = f(nT_a), \quad \text{para } nT_a \leq t < (n+1)T_a, \quad (28)$$

onde  $g(t)$  é o sinal reconstruído. Observa-se que neste caso o sinal reconstruído é em geral diferente do sinal original  $f(t)$ .

O conversor D/A (Digital para Analógico) é o melhor exemplo de um reconstrutor de ordem zero.

Em sistemas de controle o reconstrutor de ordem zero (D/A) é praticamente o único utilizado em virtude de operar em tempo real.

## Interpolador Linear

O reconstrutor interpolador de primeira ordem simplesmente conecta duas amostras consecutivas do sinal com uma reta. Contudo, para fazer isso é necessário conhecer as duas amostras consecutivas, assim, este reconstrutor gera um atraso igual a um período de amostragem. A Figura 12 apresenta um exemplo de um sinal senoidal reconstruído com um interpolador de primeira ordem.

A equação que reconstrói o sinal amostrado segundo o interpolador de primeira ordem é a seguinte:

$$g(t) = f((n-1)T_a) + \frac{1}{T_a} [f(nT_a) - f((n-1)T_a)](t - nT_a), \quad \text{para } nT_a \leq t < (n+1)T_a, \quad (29)$$

onde  $g(t)$  é o sinal reconstruído. Observa-se que também neste caso o sinal reconstruído é em geral diferente do sinal original  $f(t)$ .

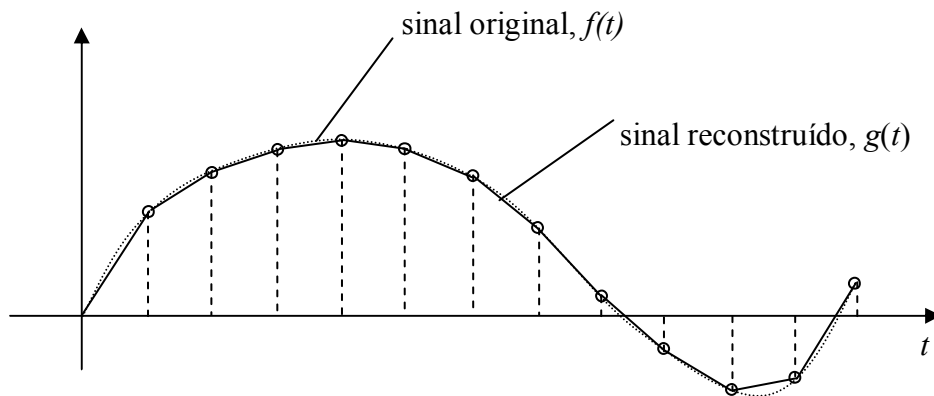


Figura 12: Exemplo de um sinal reconstruído com o interpolador de primeira ordem.

Atrasos em sistemas de controle em malha fechada causam sérios problemas. Dessa forma este reconstrutor não é muito utilizado em sistemas de controle. Porém, devido à sua simplicidade e ótima qualidade de reconstrução ele é muito o em geral reconstrutor de ordem zero (D/A) é praticamente o único utilizado em virtude de operar em tempo real.