Lista 1. Distribuição Condicional Caso Discreto. (sexta 11/09/2020)

Exercício 1. A distribuição conjunta de duas variáveis discretas X, Y é dada pela seguinte esquema: valores de X são $0, 1, 2$ e valores de Y são 0 e 1. Sabemos que X dado que $Y = 0$ tem a distribuição binomial $B(2, p)$ (escrevemos isso assim: $X \mid Y = 0 \sim B(2, p)$) e $X \mid Y = 1 \sim B(2, 1 - p)$, em que p é algum número em intervalo $(0, 1)$.

1. Supondo que a distribuição marginal do Y é uniforme: $\mathbb{P}(Y = 0) = \mathbb{P}(Y = 1) = 0.5$, preencher a tabela da distribuição conjunta

$Y \setminus X$	0	1	2
0			
1			

2. Achar a distribuição de $Z = 2X + Y$.

3. Achar as distribuições marginais de X e Y. As variáveis X e Y são independentes?

4. Achar a distribuição de $\mathbb{E}(Y \mid X)$.

5. Achar a distribuição de $\mathbb{V}ar(Y \mid X)$.

Exercício 2. X_1, X_2 têm distribuição geométrica com parâmetro p e $1 - p$ respectivamente, $X_1 \sim Geom(p), X_2 \sim Geom(1 - p)$. X_1, X_2 são variáveis aleatórias independentes. Achar distribuição $\mathbb{P}(X_1 = k \mid X_1 + X_2 = n)$ e esperança $\mathbb{E}(X_1 \mid X_1 + X_2 = n)$.

Exercício 3. X_1, X_2 têm distribuição uniforme. X_1 é uniforme em conjunto $\{0, 1, \ldots, n\}$, quando X_2 possua valores $\{0, 1, \ldots, m\}$. Supomos, por exemplo, que $n < m$. Usando a fórmula condicional ($\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(X \mid Y))$) achar a probabilidade $\mathbb{P}(X_1 < X_2)$. (Dica: usar seguinte representação para a probabilidade $\mathbb{P}(X_1 < X_2) = \mathbb{E}(\mathbb{I}_{(X_1 < X_2)})$, em que $\mathbb{I}_{(X_1 < X_2)}$ indicador do evento $(X_1 < X_2)$: $\mathbb{I}_{(X_1 < X_2)} = 1$, se $X_1 < X_2$, e $\mathbb{I}_{(X_1 < X_2)} = 0$ caso contrário)

Exercício 4. A distribuição conjunta de $X, Y \in \{0, 1, \ldots, n\}$ é dada pela fórmula

$$p(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{se } x < y \\ a, & \text{se } x \geq y \end{cases}$$

1. achar a

2. X, Y são variáveis independentes?

3. qual é a distribuição de $\mathbb{E}(X \mid Y)$?

Referências

[1] S.M.Ross *Introduction to probability models.* Ninth Edition, Elsevier, 2007.