

MAT 0147: Cálculo II (T21-FEA-USP)

Espaços Euclidianos, Retas e Planos

Guia resumido

Agosto 2020

Alerta: Este é apenas um guia resumido de parte das transparências das aulas. Ele não substitui as aulas (onde existem discussões, resoluções de exercícios, figuras, etc) e não substitui a leitura da bibliografia recomendada.

Motivação: Estabelecer ferramentas necessárias para entender vetores consumo, descrever vínculos orçamentários e outros objetos.

Espaços Euclidianos e vetores

$$\mathbb{R}^2 := \{(x_1, x_2) = x, |x_i \in \mathbb{R}\}$$

$$\mathbb{R}^3 := \{(x_1, x_2, x_3) = x, |x_i \in \mathbb{R}\}$$

$$\mathbb{R}^m := \{(x_1, x_2, \dots, x_m) = x, |x_i \in \mathbb{R}\}$$

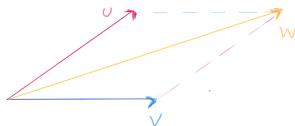
Sejam $u, v \in \mathbb{R}^m$ e $\lambda \in \mathbb{R}$.

Multiplicação por escalar

$$\lambda u = (\lambda u_1, \dots, \lambda u_m)$$

Soma de vetores

$$w = u + v := (u_1 + v_1, \dots, u_m + v_m)$$



Obs: Qualquer vetor $v \in \mathbb{R}^m$ podem ser descrito como **combinação linear** da base canônicas $\{e_i = (0, 0, \dots, 1, 0, \dots, 0)\}$, ou seja $v = \sum_i v_i e_i$ com $v_i \in \mathbb{R}$.

Ex:

$$\begin{bmatrix} 7 \\ -1 \end{bmatrix} = 7 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} - 1 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Problema

Escreva o vetor $(7, -1)$ como soma de dois vetores, um paralelo ao vetor $u = (1, 1)$ e outro paralelo ao vetor $v = (1, -1)$.

Obs: O vetor $(7, -1)$ não pode ser descrito **somente** em termos de $u = (1, 0)$ e $v = (2, 0)$

Obs: O vetor $(7, -1)$ não é **unicamente** descrito como combinações dos vetores $u = (1, 0)$ e $v = (0, 1)$ e $w = (1, 1)$. (u, v, w são linearmente dependentes).

Observe que: **qualquer** vetor em $\mathbb{R}^2$ pode ser descrito **unicamente** pela base $\{u, v\}$

Ex 1 $\{u = (1, 0), v = (0, 1)\}$

ou

Ex 2 $\{u = (1, 1), v = (1, -1)\}$.

Def: um conjunto de vetores $\{u, v\}$ em $\mathbb{R}^2$ é chamado **base** de $\mathbb{R}^2$ se

- ▶ suas combinações lineares **geram qualquer vetor** em $\mathbb{R}^2$
- ▶ de uma **única** forma (i.e, são **linearmente independentes**) .

Problema

Descreva $c = (5, -2, 9)$ em termos de combinação linear de $\{u = (2, 4, -2), v = (1, -6, 7), w = (1, 0, 2)\}$

$$x_1 \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ -2 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -6 \\ 7 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -2 \\ 9 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & -6 & 0 \\ -2 & 7 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -2 \\ 9 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{rrcr} 2x_1 & +1x_2 & +1x_3 & = 5 \\ 4x_1 & -6x_2 & +0x_3 & = -2 \\ -2x_1 & +7x_2 & +2x_3 & = 9 \end{array}$$

Seja A a matriz com colunas u , v , w . Aplicando a **eliminação de Gauss** temos que a solução do sistema $Ax = c$ se torna equivalente a solução de um sistema $Ux = \tilde{c}$. onde:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & -6 & 0 \\ -2 & 7 & 2 \end{bmatrix} \text{ e } \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & -8 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = U$$

Proposição

*Um conjunto de vetores $\{u, v, w\}$ forma uma **base de** $\mathbb{R}^3$ se e somente se a eliminação de Gauss aplicada a matriz A (que tem colunas u , v , w) der uma matriz U diagonal superior, cujos elementos da diagonal são todos diferentes de zero.*

Produto interno

Def: O **produto interno** (canônico) é a aplicação $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ definida como $\langle u, v \rangle = \sum_i u_i v_i$

No caso $\mathbb{R}^2$

$$\langle u, v \rangle = u_1 v_1 + u_2 v_2$$

No caso $\mathbb{R}^3$

$$\langle u, v \rangle = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3$$

Proposição

Sejam $u, v, w \in \mathbb{R}^m$ e $\lambda \in \mathbb{R}$. O produto interno canônico em $\mathbb{R}^m$ atende as seguintes propriedades:

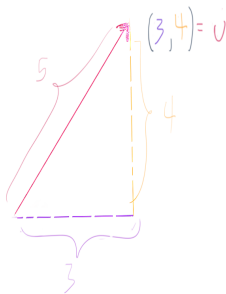
1. $\langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle$
2. $\langle u + w, v \rangle = \langle u, v \rangle + \langle w, v \rangle$
3. $\langle \lambda u, v \rangle = \lambda \langle u, v \rangle$
4. $\langle u, u \rangle \geq 0$
5. $\langle u, u \rangle = 0$ se e somente se $u = 0$

Def: Seja $u \in \mathbb{R}^m$. A **norma** de u é definida como
 $\|u\| = \sqrt{\langle u, u \rangle}$

Motivação: Lembre do triângulo retângulo com catetos de comprimentos 3 e 4 e hipotenusa com comprimento 5.

Seja $u = (3, 4)$

$$\begin{aligned}\|u\| &= \sqrt{\langle u, u \rangle} \\ &= \sqrt{v_1^2 + v_2^2} \\ &= \sqrt{3^2 + 4^2} \\ &= \sqrt{9 + 16} \\ &= \sqrt{25} \\ &= 5\end{aligned}$$



Problema

Seja $\mathbf{u} = (1, 1)$. Calcule:

(a) $\|\mathbf{u}\|$

(b) $\| -3\mathbf{u} \|$

(c) $\frac{\mathbf{u}}{\|\mathbf{u}\|}$

(d) $\left\| \frac{\mathbf{u}}{\|\mathbf{u}\|} \right\|$

Obs: Mais geralmente, $\|\lambda\mathbf{u}\| = |\lambda|\|\mathbf{u}\|$. Em particular se $\lambda = \frac{1}{\|\mathbf{u}\|}$ temos

$$\left\| \frac{\mathbf{u}}{\|\mathbf{u}\|} \right\| = \frac{1}{\|\mathbf{u}\|} \|\mathbf{u}\| = 1$$

Considere os vetores $u, v \in \mathbb{R}^m$ O **ângulo** entre estes vetores é

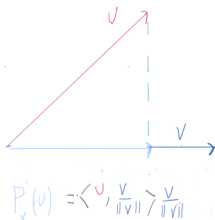
$$\cos(\theta) = \frac{\langle u, v \rangle}{\|u\| \|v\|}$$

u, v são **ortogonais** se $\langle u, v \rangle = 0$

Def: Sejam u, v vetores em $\mathbb{R}^m$.

A **projeção** de u ao longo de v é definida como

$$P_v(u) = \left\langle u, \frac{v}{\|v\|} \right\rangle \frac{v}{\|v\|}$$



Ex Seja $(3, 5)$ e $(2, 0)$.

$$\begin{aligned} P_v(u) &= \left\langle u, \frac{v}{\|v\|} \right\rangle \frac{v}{\|v\|} \\ &= \left\langle (3, 5), \frac{(2, 0)}{2} \right\rangle \frac{(2, 0)}{2} \\ &= \left\langle (3, 5), (1, 0) \right\rangle (1, 0) \\ &= 3(1, 0) \\ &= (3, 0) \end{aligned}$$

Equação da reta em $\mathbb{R}^2$

Definição (Reta contendo zero)

$$\begin{aligned} R &= \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid N_1 x_1 + N_2 x_2 = 0\} \\ &= \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid \langle (N_1, N_2), (x_1, x_2) \rangle = 0\} \end{aligned}$$

Obs: $N = (N_1, N_2)$ é um **vetor normal** a reta.

Obs: A distância de um ponto u a uma reta

$N_1 x_1 + N_2 x_2 = 0$ é calculada como a projeção, i.e.,

$$d = |P_N(u)|$$

Problema

Calcule a distância de $u = (1, 3)$ a reta descrita pela equação da reta $2x_1 + 2x_2 = 0$

Definição (Reta passando por $p = (p_1, p_2)$)

$$\begin{aligned} R &= \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid N_1(x_1 - p_1) + N_2(x_2 - p_2) = 0\} \\ &= \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid \langle (N_1, N_2), ((x_1, x_2) - (p_1, p_2)) \rangle = 0\} \\ &= \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid N_1x_1 + N_2x_2 = c\} \end{aligned}$$

onde $c = \langle N, p \rangle$.

Obs: $N = (N_1, N_2)$ é um **vetor normal** a reta.

Obs: A distância de um ponto q a reta, R é calculada com a projeção, i.e., $d = |P_N(u)|$ onde $u = q - p$

Problema

Sejam x_1 , x_2 o número de unidades das mercadorias A e B consumidas por uma pessoa. Sejam \$ 2,00 e \$ 3,00 os preços unitários de A e B respectivamente. Descreva em coordenadas euclidianas o espaço dos números de unidades das mercadorias, quando a despesas para mercadorias é \$ 10,00 e esboce tal conjunto.

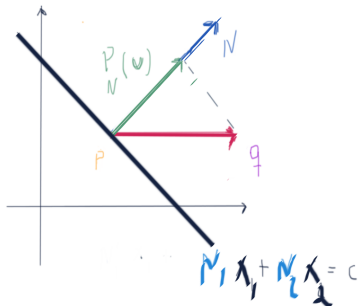
A **distância** de um ponto $q \in \mathbb{R}^2$ a reta

$$R = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid N_1 x_1 + N_2 x_2 = c\}$$

é $d = \|P_N(u)\|$ onde $u = q - p$ e $p \in R$. Ou seja:

$$\begin{aligned} d &= \|P_N(u)\| \\ &= \left| \left\langle u, \frac{N}{\|N\|} \right\rangle \right| \\ &= \left| \left\langle q - p, \frac{N}{\|N\|} \right\rangle \right| \\ &= \frac{1}{\|N\|} \left| \langle q, N \rangle - \langle p, N \rangle \right| \end{aligned}$$

$$d = \frac{|N_1 q_1 + N_2 q_2 - c|}{\sqrt{N_1^2 + N_2^2}}$$



Equação do plano em $\mathbb{R}^3$

Definição (Plano contendo zero)

$$\begin{aligned} P &= \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid N_1 x_1 + N_2 x_2 + N_3 x_3 = 0\} \\ &= \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid \langle (N_1, N_2, N_3), (x_1, x_2, x_3) \rangle = 0\} \end{aligned}$$

$N = (N_1, N_2, N_3)$ é um **vetor normal** a reta.

A distância de um ponto u ao plano

$N_1 x_1 + N_2 x_2 + N_3 x_3 = 0$ é calculada com a projeção, i.e.,

$$d = \|P_N(u)\| = \left\| \left\langle u, \frac{N}{\|N\|} \right\rangle \frac{N}{\|N\|} \right\| = \left| \left\langle u, \frac{N}{\|N\|} \right\rangle \right|$$

Definição (Plano passando por $p = (p_1, p_2, p_3)$)

$$\begin{aligned} P &= \{x \in \mathbb{R}^3 \mid N_1(x_1 - p_1) + N_2(x_2 - p_2) + N_3(x_3 - p_3) = 0\} \\ &= \{x \in \mathbb{R}^3 \mid \langle (N_1, N_2, N_3), ((x_1, x_2, x_3) - (p_1, p_2, p_3)) \rangle = 0\} \\ &= \{x \in \mathbb{R}^3 \mid N_1x_1 + N_2x_2 + N_3x_3 = c\} \end{aligned}$$

onde $c = \langle N, p \rangle$.

Obs: $N = (N_1, N_2, N_3)$ é um **vetor normal** a reta.

Problema

Sejam x_1 , x_2 , x_3 o número de unidades das mercadorias A, B e C consumidas por uma pessoa. Sejam \$ 2,00 e \$ 3,00 e \$ 4,00 os preços unitários de A, B e C respectivamente. Descreva em coordenadas euclidianas o espaço dos números de unidades das mercadorias, quando a despesas para mercadorias é \$ 10,00 e esboce tal conjunto.

A **distância** de um ponto $q \in \mathbb{R}^3$ ao plano

$$P = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid N_1 x_1 + N_2 x_2 + N_3 x_3 = c\}$$

é $d = \|P_N(u)\|$ onde $u = q - p$ e $p \in P$. Ou seja:

$$\begin{aligned} d &= \|P_N(u)\| \\ &= \left| \left\langle u, \frac{N}{\|N\|} \right\rangle \right| \\ &= \left| \left\langle q - p, \frac{N}{\|N\|} \right\rangle \right| \\ &= \frac{1}{\|N\|} \left| \langle q, N \rangle - \langle p, N \rangle \right| \end{aligned}$$

$$d = \frac{|N_1 q_1 + N_2 q_2 + N_3 q_3 - c|}{\sqrt{N_1^2 + N_2^2 + N_3^2}}$$

Reta em $\mathbb{R}^3$

Considere 2 planos:

$$P = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid N_1 x_1 + N_2 x_2 + N_3 x_3 = c\}$$

$$\tilde{P} = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid \tilde{N}_1 x_1 + \tilde{N}_2 x_2 + \tilde{N}_3 x_3 = \tilde{c}\}$$

Suponha que $N \neq \lambda \tilde{N}$ (i.e., são linearmente independentes).
Então o conjunto $P \cap \tilde{P}$ é uma **reta** em $\mathbb{R}^3$.

Eq. do plano contendo zero e aplicação linear

Proposição

Sejam $u = (a_{11}, a_{21}, a_{31})$ e $v = (a_{12}, a_{22}, a_{32})$ vetores com $u \neq \lambda v$ (i.e, linearmente independentes). Considere $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ a aplicação linear $T(x) = Ax$ onde

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix}$$

Então a imagem de T é um plano contendo zero. Um vetor normal N a este plano atende $\langle N, u \rangle = 0 = \langle N, v \rangle$

$$\text{i.e., } \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Além disto os vetores u e v são uma base deste plano.

Prob Seja $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ e $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ a aplicação linear $T(x) = Ax$. Calcule um vetor normal N a imagem de T .

Obs: No caso particular $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ onde as colunas são linearmente independentes, é possível usar o **produto vetorial** (que só existe em dimensão 3) para calcular um vetor normal N .

Obs: Imagens de aplicações lineares $T : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^{m+k}$ (em particular retas e planos contendo zero) são **subespaços vetoriais** ou seja subconjunto $W \subset \mathbb{R}^{m+k}$ tal que

- ▶ u e $v \in W$ então $u + v \in W$
- ▶ $u \in W$ então $\lambda u \in W$ para qualquer $\lambda \in \mathbb{R}$.

Obs: Seja uma aplicação linear $T : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^{m+k}$ definida como $T(x) = Ax$. Então as colunas de A são **base** da imagem $W = \text{Im}(T)$ se uma das equivalências vale:

- ▶ T é injetora,
- ▶ as colunas de A são linearmente independentes,
- ▶ todas as colunas de U (obtidas no escalonamento de A) são pivôs, i.e., existem m pivôs.