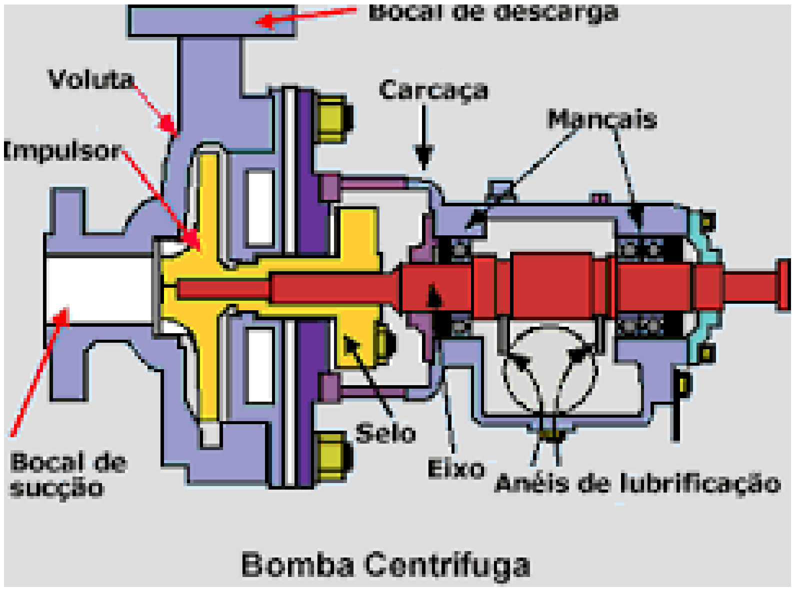
PME 3230

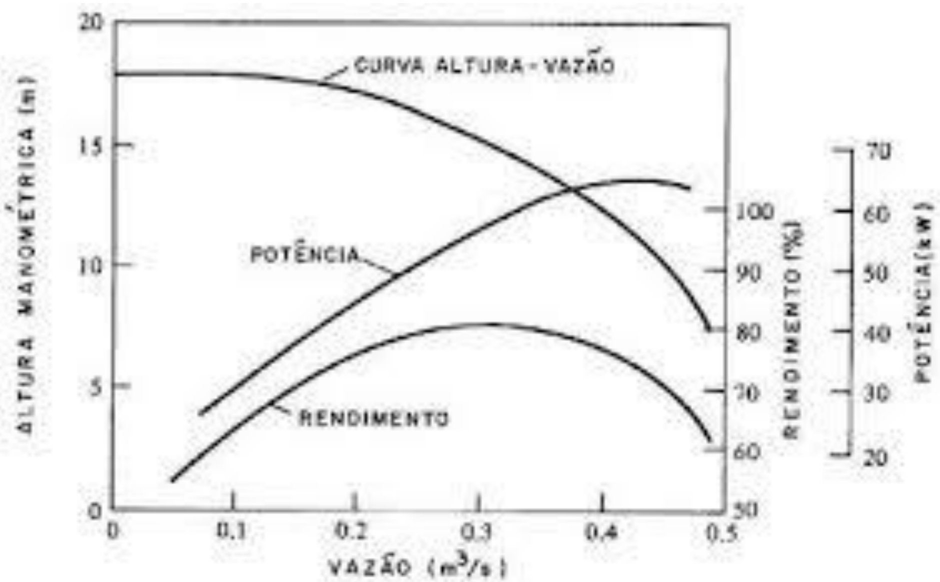
Análise Dimensional, Semelhança e Modelos
Exercícios extras

Alberto Hernandez Neto

Exercício 5

Análise da operação de uma bomba centrífuga





Exercício 5

Parâmetros principais:

h = altura manométrica ou de carga [J/kg];
P = potência consumida pela bomba [W];
Q = vazão volumétrica [m^3/s];
ω = rotação [1/s];
D = diâmetro do rotor [m];
ρ = massa específica [kg/m^3];
μ = viscosidade [N.s/m^2];

$$h = g_1\left(Q, \rho, \omega, D, \mu\right)$$

$$P = g_2\left(Q, \rho, \omega, D, \mu\right)$$

Exercício 5

Aplicando o teorema ∏ ao problema :

$$\frac{h}{\omega^2 D^2} = g_1\left(\frac{Q}{\omega D^3}, \frac{\rho\omega D^2}{\mu}\right)$$

$$\frac{P}{\rho\omega^3 D^5} = g_2\left(\frac{Q}{\omega D^3}, \frac{\rho\omega D^2}{\mu}\right)$$

Exercício 5

Pode-se verificar que efeitos viscoso podem ser desprezados para máquinas geometricamente semelhantes e em condições de operação semelhantes:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{Q_1}{\omega_1 D_1^3} &= \frac{Q_2}{\omega_2 D_2^3} \\[2em]
\frac{h_1}{\omega_1^2 D_1^2} &= \frac{h_2}{\omega_2^2 D_2^2} \\[2em]
\frac{P_1}{\rho_1 \omega_1^3 D_1^5} &= \frac{P_2}{\rho_2 \omega_2^3 D_2^5}
\end{aligned}\right\}$$

Lei das Bombas ou Ventiladores

Exercício 6

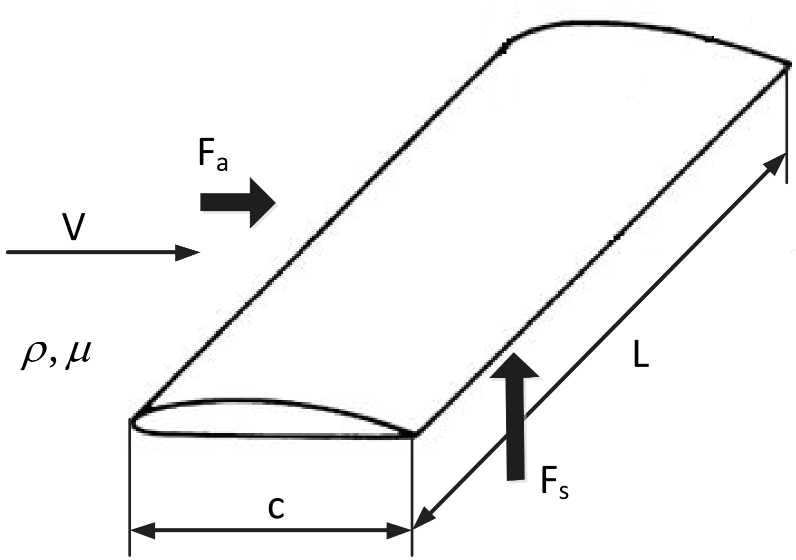
Considerando um ventilador D_1=200 mm fornece Q_1=0,4 m^3/s; w_1=2500 rpm. Qual deve ser o diâmetro do ventilador para que ele forneça uma vazão Q_2=2,38 m^3/s a uma rotação w_2=1800 rpm

$$\frac{Q_1}{\omega_1 D_1^3} = \frac{Q_2}{\omega_2 D_2^3}$$

$$\frac{0,4}{2.500 * \left(0,2\right)^3} = \frac{2,38}{1.800 * D_2^3} \Rightarrow D_2 = 0,404m = 404mm$$

Exercício 7

Uma asa de avião com corda igual 1,5 m e 9 m de envergadura é projetada para voar a uma velocidade de 7,5 m/s no ar. Um modelo em escala 1/10 deve ser testado em um túnel em água. Qual deve ser a velocidade no túnel necessária para termos semelhança completa? Qual é a relação entre as forças medidas no modelo e no protótipo?



$$F_a = f_1(c, V, \mu, \rho)$$

$$F_s = f_2(L, V, \rho, \mu)$$

L=envergadura

c = corda

A = área da asa = L*c

Exercício 7

Em condição de semelhança completa:

$$\frac{F_{a,m}}{\rho_m V_m^2 c_m^2} = \frac{F_{a,p}}{\rho_p V_p^2 c_p^2}$$

$$\mathrm{Re}_m = \mathrm{Re}_p \Rightarrow \frac{\rho_m V_m L_m}{\mu_m} = \frac{\rho_p V_p L_p}{\mu_p} \Rightarrow \frac{\rho_m}{\rho_p}\frac{V_m}{V_p}\frac{L_m}{L_p}\frac{\mu_p}{\mu_m} = 1 \Rightarrow \lambda_\rho \lambda_V \lambda_L \frac{1}{\lambda_\mu} = 1$$

$$\frac{F_{a,m}}{F_{a,p}}\frac{\rho_p}{\rho_m}\frac{V_p^2}{V_m^2}\frac{c_p^2}{c_m^2} = 1 \Rightarrow \lambda_F \frac{1}{\lambda_\rho}\lambda_V^2 \lambda_c^2 = 1$$

Exercício 7

Assumindo a mesma temperatura de operação do modelo e do protótipo e igual a 20°C:

$$\left.\begin{array}{l} \rho_{ar}\left(20°C\right)=1,204\,m^3/kg \\ \\ \rho_{água}\left(20°C\right)=998,2\,m^3/kg \end{array}\right\} \lambda_\rho=\frac{\rho_m}{\rho_p}=\frac{998,2}{1,204}=829,07$$

$$\left.\begin{array}{l} \mu_{ar}\left(20°C\right)=0,00001825\,kg/m.s \\ \\ \mu_{água}\left(20°C\right)=0,001002\,kg/m.s \end{array}\right\} \lambda_\mu=\frac{\mu_m}{\mu_p}=\frac{0,001002}{0,00001825}=54,9$$

Exercício 7

$$\lambda_L = \frac{L_m}{L_p} = 0,1$$

Logo:

$$\lambda_\rho \lambda_V \lambda_L \frac{1}{\lambda_\mu} = 1 \Rightarrow 829,07 * \lambda_V * 0,1 * \frac{1}{54,9} = 1 \Rightarrow \lambda_V = \frac{V_m}{V_p} = 0,662$$

$$V_m = 0,662 * 7,5 = 4,97\, m/s$$

Exercício 7

$$\lambda_F \frac{1}{\lambda_\rho} \lambda_V^2 \lambda_c^2 = 1 \Rightarrow \lambda_F \frac{1}{829,07} (0,662)^2 (0,1)^2 = 1 \Rightarrow \lambda_F = 5,29x10^{-6}$$

Exercício 8

Deseja-se analisar o comportamento aerodinâmico de um inseto com as seguintes características:

- Modelo em escala 1:8
- Frequência do batimento de asas do inseto (ω): 60 vezes/s
- Velocidade de voo (V): 1,5 m/s

Determine a velocidade do ar no túnel de vento e a frequência de oscilação da asa para ter-se semelhança dinâmica (Fp=Fm).

$$F_a = f\left(\omega, L, V, \mu, \rho\right)$$

Exercício 8

Aplicando a o teorema ∏da análise dimensional:

$$\frac{F_a \omega^2}{V^4 \rho} = f\left(\frac{\rho V L}{\mu}\right)$$

Logo:

$$\mathrm{Re}_m = \mathrm{Re}_p \Rightarrow \frac{\rho_m V_m L_m}{\mu_m} = \frac{\rho_p V_p L_p}{\mu_p} \Rightarrow \frac{\rho_m}{\rho_p}\frac{V_m}{V_p}\frac{L_m}{L_p}\frac{\mu_p}{\mu_m} = 1 \Rightarrow \lambda_\rho \lambda_V \lambda_L \frac{1}{\lambda_\mu} = 1$$

Se os testes são feitos com o mesmo fluido e na mesma temperatura e pressão:

$$\lambda_\rho = \lambda_\mu = 1 \Rightarrow 1\lambda_V \lambda_L \frac{1}{1} = 1 \Rightarrow \lambda_V = \frac{1}{\lambda_L} \Rightarrow \frac{V_m}{V_p} = \frac{L_p}{L_m} = \frac{1}{8} = 0{,}125$$

Exercício 8

Da mesma forma:

$$\frac{F_m \omega_m^2}{V_m^4 \rho_m} = \frac{F_p \omega_p^2}{V_p^4 \rho_p} \Rightarrow \frac{F_m}{F_p} \frac{\omega_m^2}{\omega_p^2} \frac{V_p^4}{V_m^4} \frac{\rho_p}{\rho_m} = 1 \Rightarrow \lambda_F \lambda_\omega^2 \frac{1}{\lambda_V^4} \frac{1}{\lambda_\rho} = 1$$

Para se ter semelhança dinâmica (Fm=Fp):

$$\lambda_F \lambda_\omega^2 \frac{1}{\lambda_V^4} \frac{1}{\lambda_\rho} = 1 \Rightarrow 1 * \lambda_\omega^2 * (8)^4 * 1 = 1 \Rightarrow \lambda_\omega = \frac{1}{64}$$

Logo:

$$\left.\begin{aligned} V_m &= 0{,}125 * V_p = 0{,}125 * 1{,}5 = 0{,}1875\, m/s \\ \omega_m &= \frac{1}{64} * \omega_p = \frac{1}{64} * 60 = 0{,}94 \text{ batimentos/s} \end{aligned}\right\}$$

Condições de ensaio difíceis de obter!!!

Exercício 8

Alternativas:

1) Aumento da temperatura do ar no ensaio

$$\left.\begin{array}{l}\rho_{ar}\left(20°C\right)=1,204\,m^3/kg \\ \rho_{ar}\left(100°C\right)=0,946\,m^3/kg \\ \mu_{ar}\left(20°C\right)=0,00001825\,kg/m.s \\ \mu_{ar}\left(100°C\right)=0,00002181\,kg/m.s\end{array}\right\} \begin{array}{l}V_m=0,29\,m/s \\ \omega_m=1,06\text{ batimentos/s}\end{array}$$

Exercício 8

Alternativas:

2) Mudança de fluido

$$\rho_{ar}\left(20°C\right) = 1,204\, m^3/kg$$

$$\rho_{água}\left(20°C\right) = 998,2\, m^3/kg$$

$$\mu_{ar}\left(20°C\right) = 0,00001825\, kg/m.s$$

$$\mu_{água}\left(20°C\right) = 0,001002\, kg/m.s$$

$$V_m = 0,795\, m/s$$

$$\omega_m = 0,03 \text{ batimentos/s}$$

PME 3230

Estática dos Fluidos

Alberto Hernandez Neto

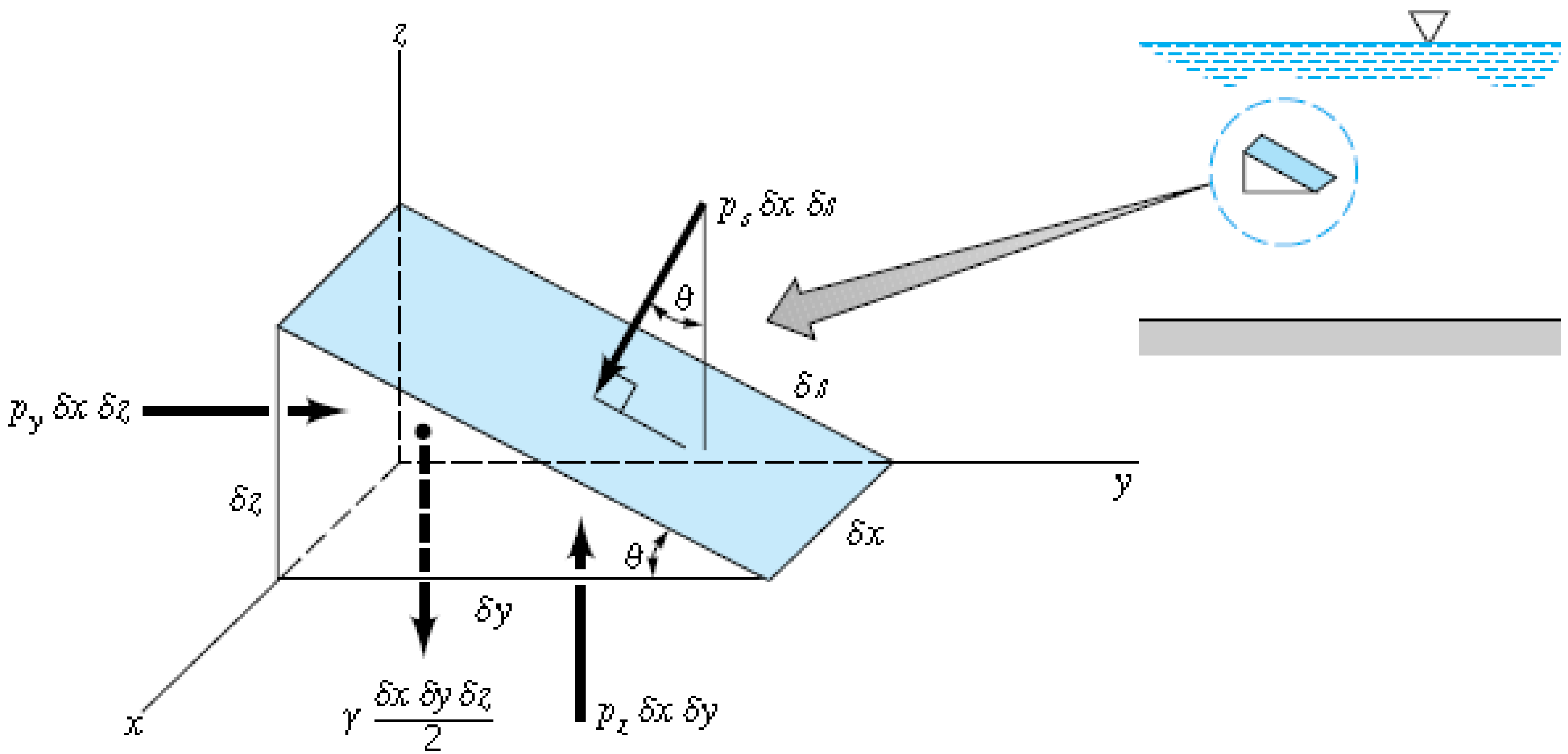
Processos com fluido estático:

- Tensões de cisalhamento são nulas
- Forças de superfície: apenas forças de pressão

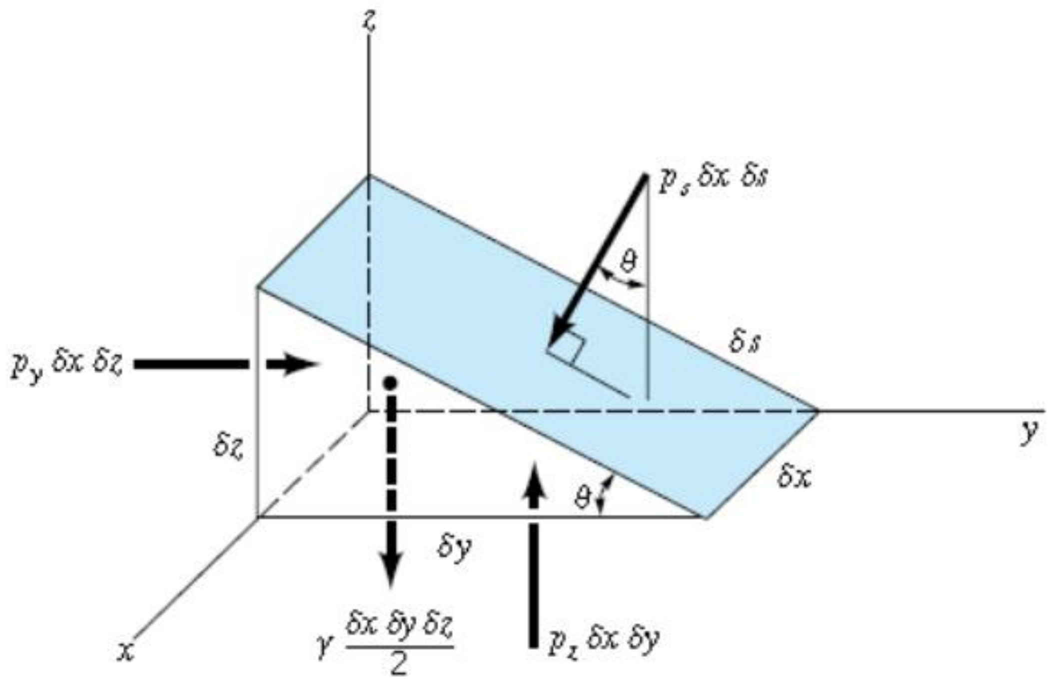
Estudo da pressão: sua variação no meio fluido e seu efeito sobre superfícies imersas

Pressão: força normal por unidade que atua sobre um ponto fluido em um dado plano

Considerando um elemento fluido na forma de cunha, com profundidade δx e peso específico ϒ:



Realizando o balanço de forças na direção y e z tem-se:



$$\sum F_y = p_y \delta x \delta z - p_s \delta x \delta sen\theta = \rho \frac{\delta x \delta y \delta z}{2} a_y$$

$$\sum F_z = p_z \delta x \delta y - p_s \delta x \delta s \cos\theta - \gamma \frac{\delta x \delta y \delta z}{2} = \rho \frac{\delta x \delta y \delta z}{2} a_z$$

Sendo que: $\delta_y = \delta s \cos\theta$ $\delta_z = \delta s sen\theta$

Tem-se que: $p_y - p_s = \rho \dfrac{\delta y}{2} a_y$ $p_z - p_s = \left(\gamma + \rho a_z\right)\dfrac{\delta z}{2}$

Para um ponto: $\delta x \to 0, \delta y \to 0, \delta z \to 0$

$$\therefore p_y = p_s ; p_z = p_s$$

Como θ é arbitrário, tem-se que:

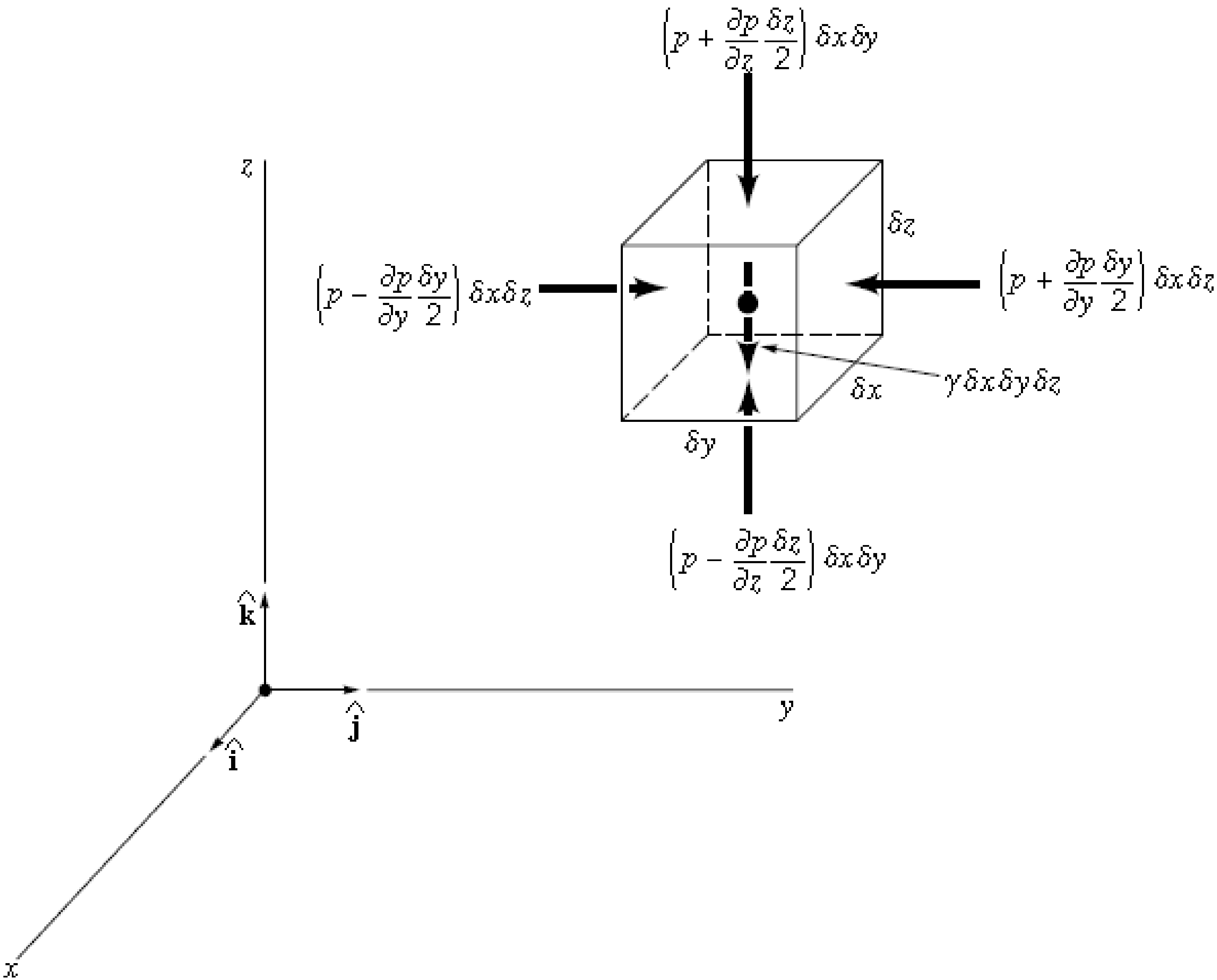
Quando τ=0 (sem tensão de cisalhamento) → O valor da pressão em um ponto do fluido independe da direção

Equação básica do campo de pressão

Definindo-se um elemento hexaédrico em um fluido qualquer onde:

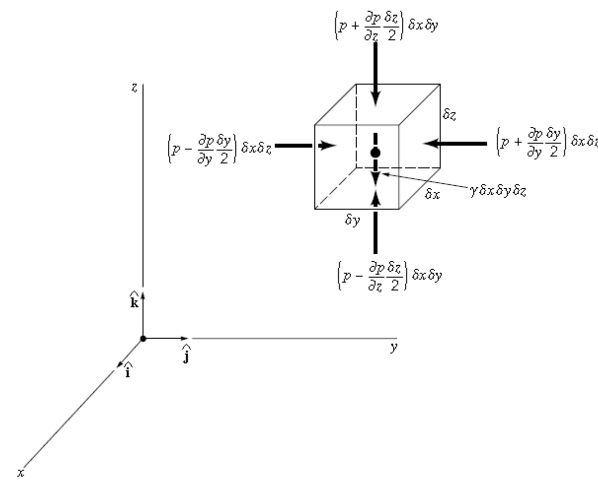
- Dimensões elementares δx, δy e δz;
- Pressão no seu centro geométrico igual a p;
- Propriedades fixas e iguais a
  - ρ = massa específica;
  - $\Upsilon = \rho g$ = peso específico;
  - Variações da pressão no elemento aproximada por séries de Taylor de ordem 1

Equação básica do campo de pressão



Equação básica do campo de pressão

Balanço de forças



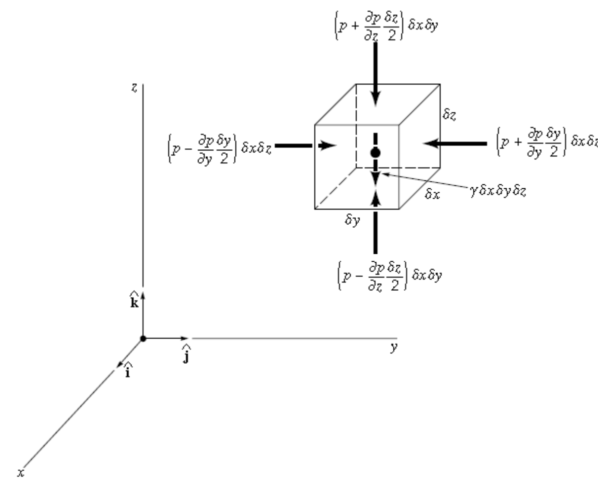
Direção x:

$$\delta F_y = \left(p - \frac{\partial p}{\partial y}\frac{\partial y}{2} \right)\delta x \delta z - \left(p + \frac{\partial p}{\partial y}\frac{\partial y}{2} \right)\delta x \delta = -\frac{\partial p}{\partial y}\delta x \delta y \delta z \quad (1)$$

$$\delta F_x = -\frac{\partial p}{\partial x}\delta x \delta y \delta z \quad (2)$$

$$\delta F_z = -\frac{\partial p}{\partial z}\delta x \delta y \delta z \quad (3)$$

Equação básica do campo de pressão



Na forma vetorial:

$$\delta\vec{F}_S = \delta F_x\hat{i} + \delta F_y\hat{j} + \delta F_z\hat{k} \qquad (4)$$

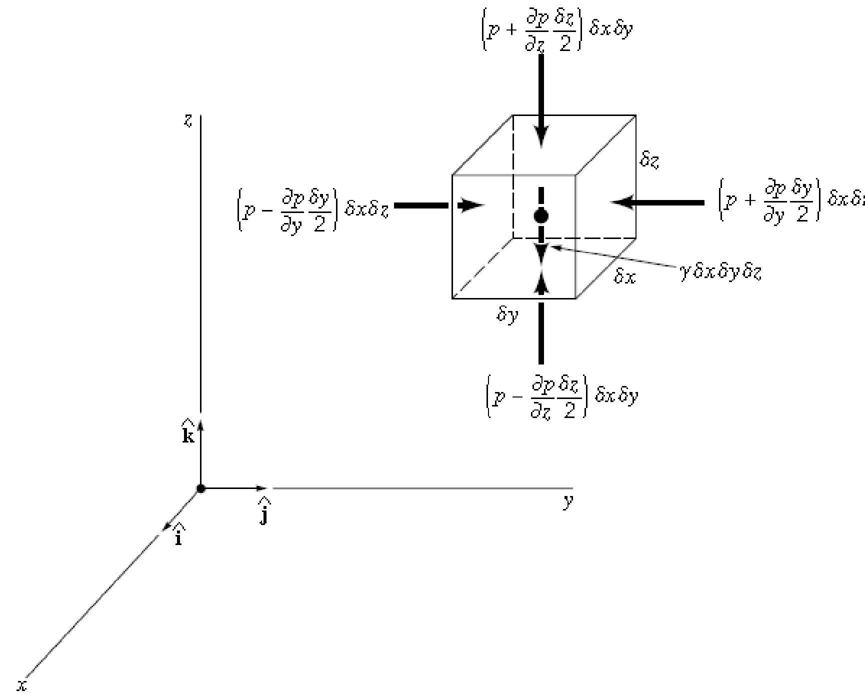
Substituindo as equações (1), (2) e (3) na equação (4) tem-se:

$$\delta\vec{F}_S = -\left(\frac{\partial p}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial p}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial p}{\partial z}\hat{k}\right)\delta x\delta y\delta z$$

Equação básica do campo de pressão

$$\delta \vec{F}_S = -\underbrace{\left(\frac{\partial p}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial p}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial p}{\partial z}\hat{k} \right)}_{\nabla p} \delta x \delta y \delta z$$

$$\frac{\delta \vec{F}_S}{\delta x \delta y \delta z} = \nabla p$$



Pode-se descrever as forças de campos gravitacionais (a influência dos demais campos é desprezada) como :

$$\delta \vec{F}_B = \rho \delta x \delta y \delta z \vec{g}$$

Pela segunda lei de Newton tem-se que:

$$\sum \delta \vec{F} = \delta m \vec{a}$$

$$\delta \vec{F}_S + \delta \vec{F}_B = \delta m \vec{a}$$

$$-\nabla p \delta x \delta y \delta z + \rho \delta x \delta y \delta z \vec{g} = \rho \delta x \delta y \delta z \vec{a}$$

Dividindo por δx δy δz:

$$-\nabla p + \rho \vec{g} = \rho \vec{a}$$ Equação básica do campo de pressão

Adotando as seguintes simplificações:

(1) Se: $\vec{g} = -g\hat{k} \quad \rightarrow \quad -\nabla p + \gamma \hat{k} = \rho \vec{a}$

(2) Se o fluido está em repouso: $\vec{a} = 0 \quad \rightarrow \quad -\nabla p + \gamma \hat{k} = 0$

(3) Se:
$$\frac{\partial p}{\partial x} = 0$$
$$\frac{\partial p}{\partial y} = 0 \quad \rightarrow \quad p = p(z) \rightarrow \frac{dp}{dz} = -\gamma$$
$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\gamma$$

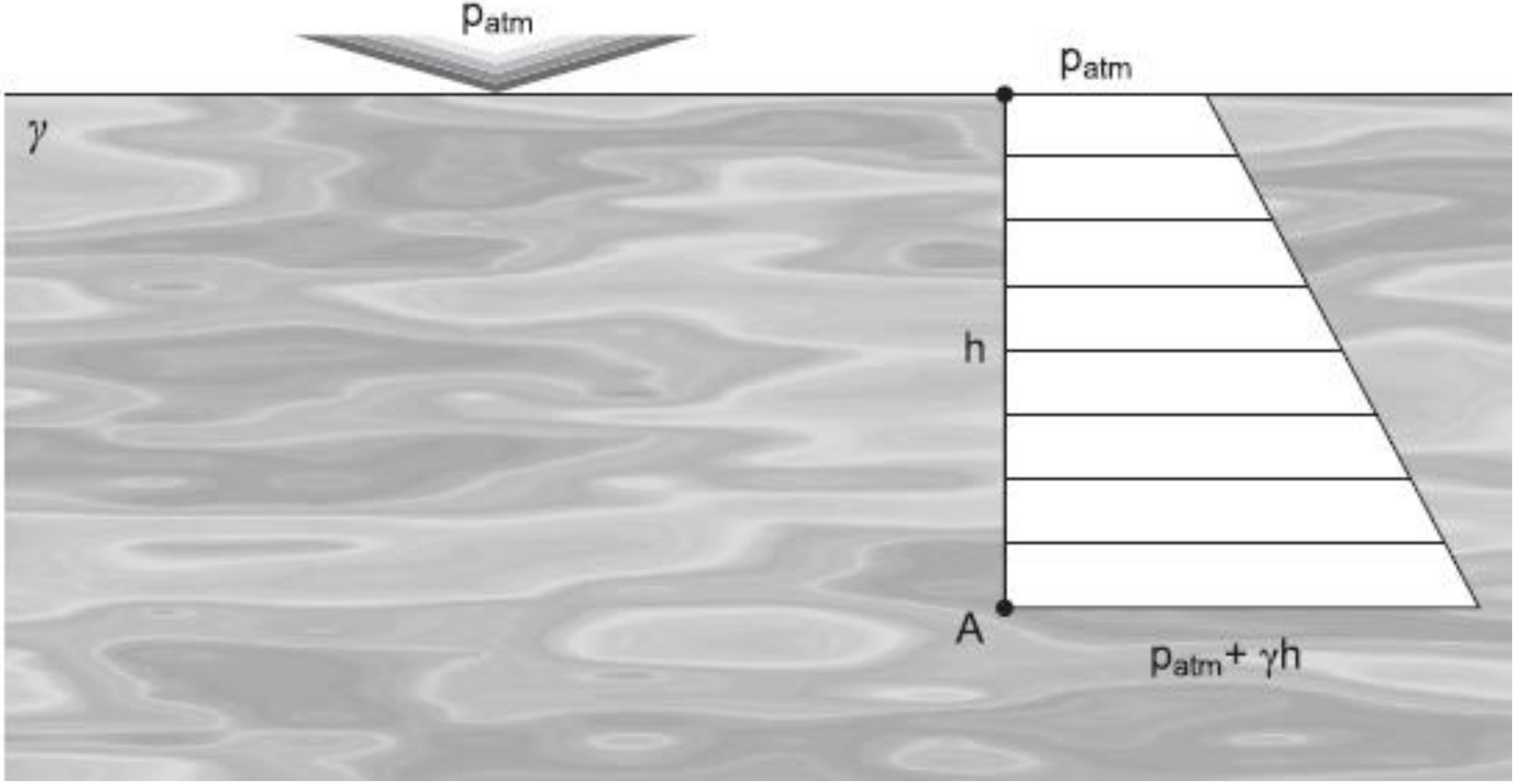
(4) Se o fluido for incompressível (ρ constante) e g constante:

$$\int_{p_1}^{p_2} dp = -\gamma \int_{z_1}^{z_2} dz$$

Sendo: $h = \left(z_2 - z_1\right)$

$$p_1 = p_2 + \gamma h$$ Lei de Stevin

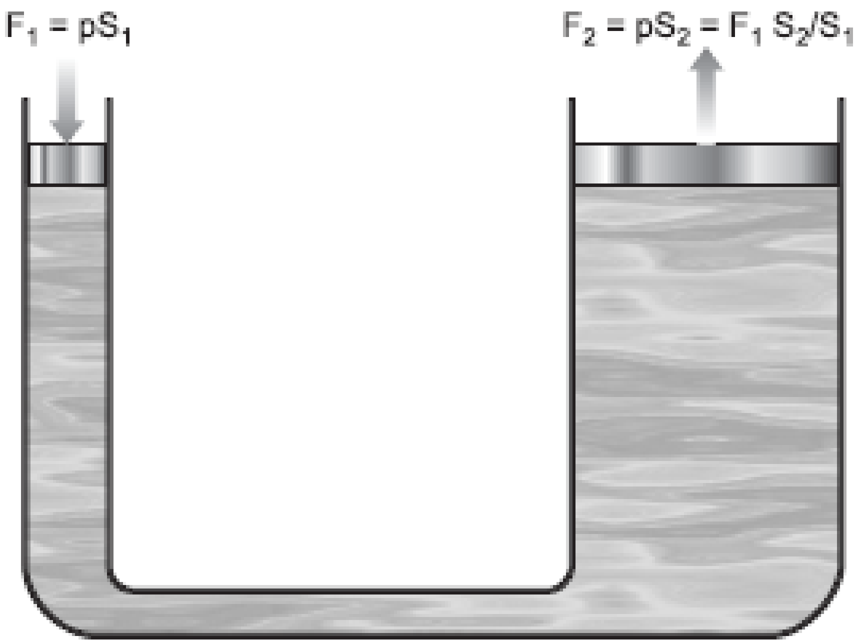
$$p_2 - p_1 = \gamma\left(z_2 - z_1\right)$$



Pressão em um fluido estático:

- Variação linear com h
- Dependência com p_1, h e ϒ
- Independência com a forma do recipiente

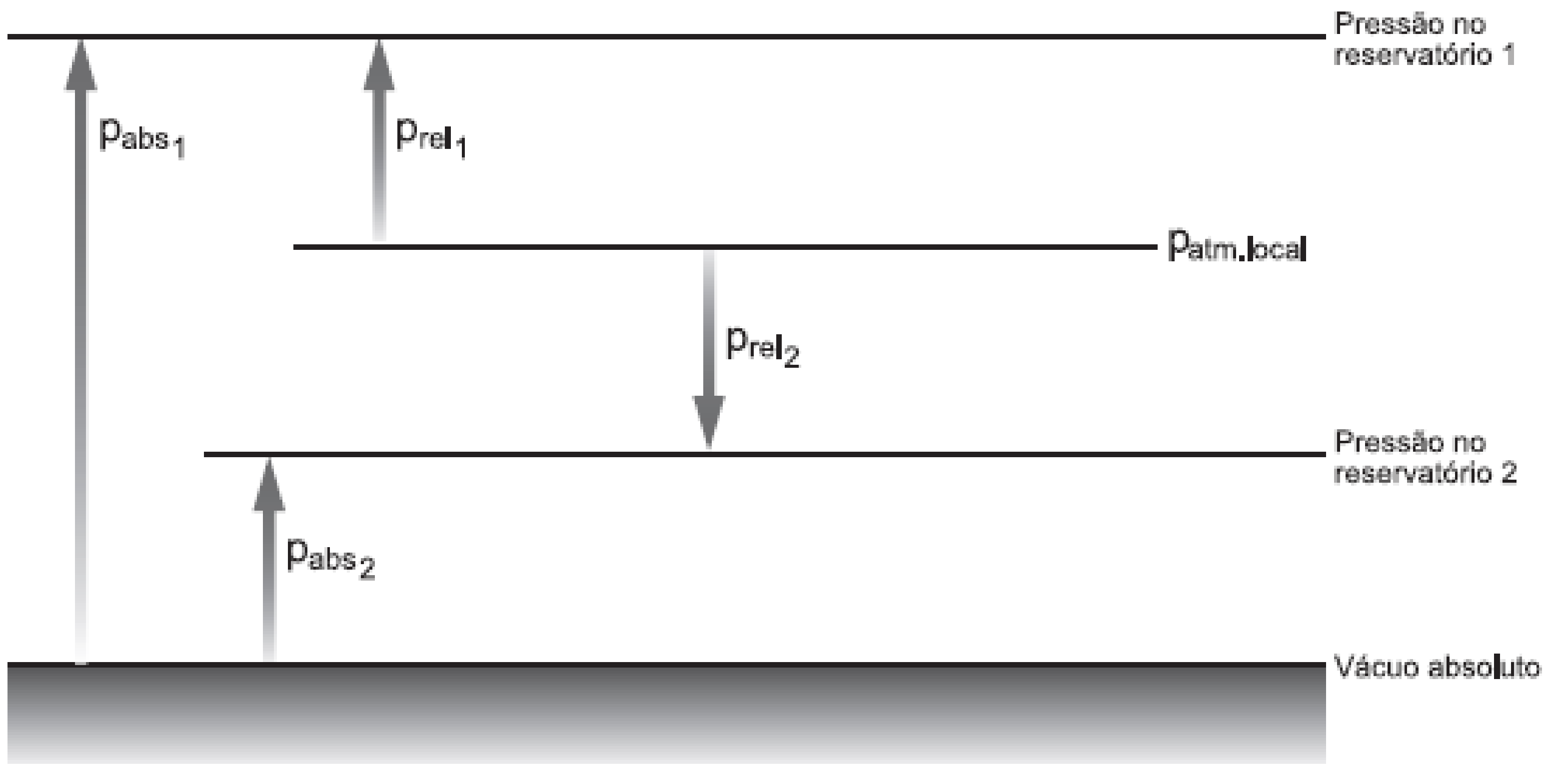
Uso: multiplicação de forças em dispositivos hidráulicos



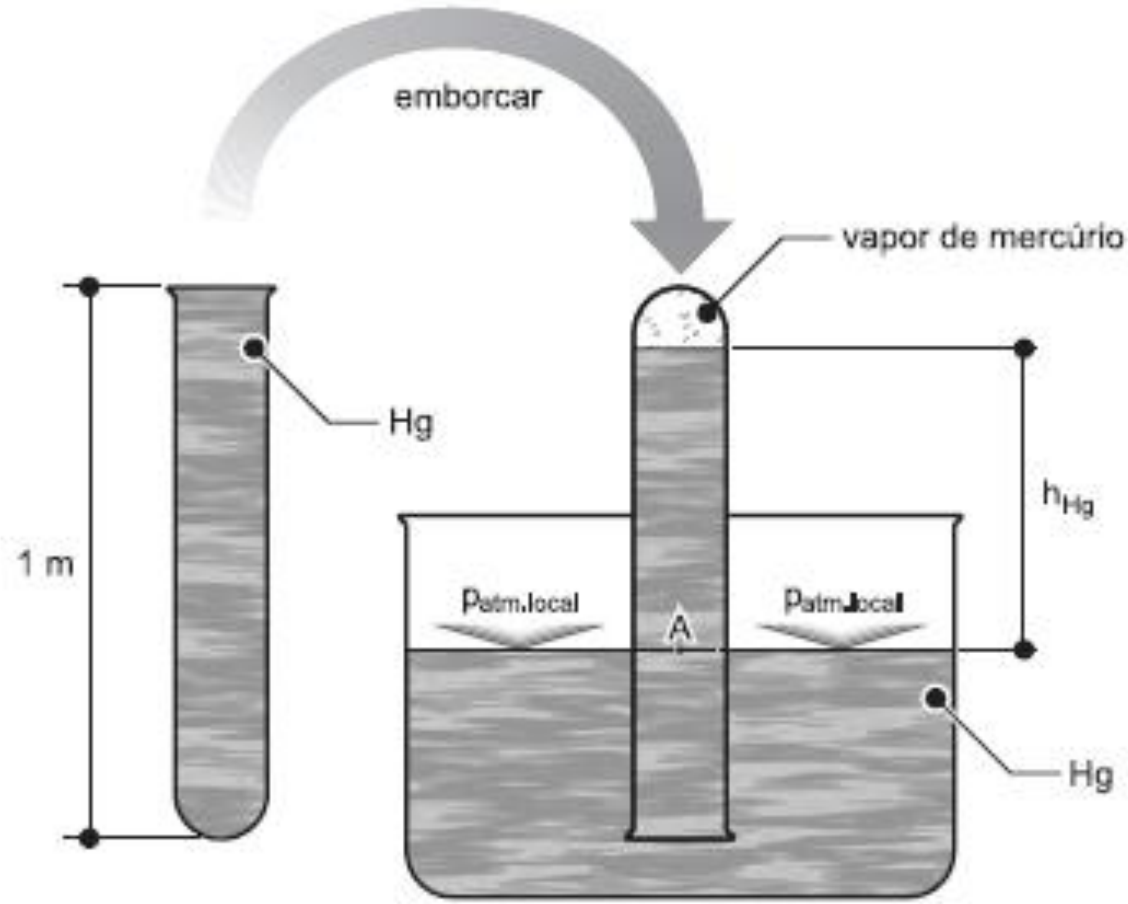
Medição de pressão:

Valores estabelecidos em relação a um nível de referência

Unidades: Pa = N/m2 (SI), psi, bar, altura de coluna de líquido (m.c.a., mmHg), etc.



Medição da pressão atmosférica – barômetro de Mercúrio



$$p_{atm} = \underbrace{p_{vapor}}_{desprezível} + \gamma_{Hg} h$$

$$p_{atm} = \gamma_{Hg} h$$

Ao nível do mar: p_{atm}=760 mmHg=10,36 m.c.a

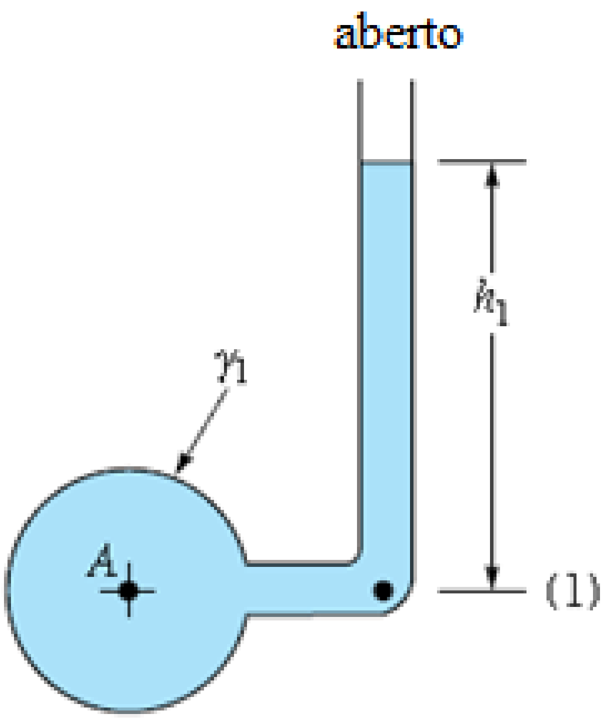
Manometria

Manômetro: medição de pressão relativa

Tubo piezométrico

$$p_A = p_O + \gamma_1 h_1 \left(\text{pressão absoluta}\right)$$

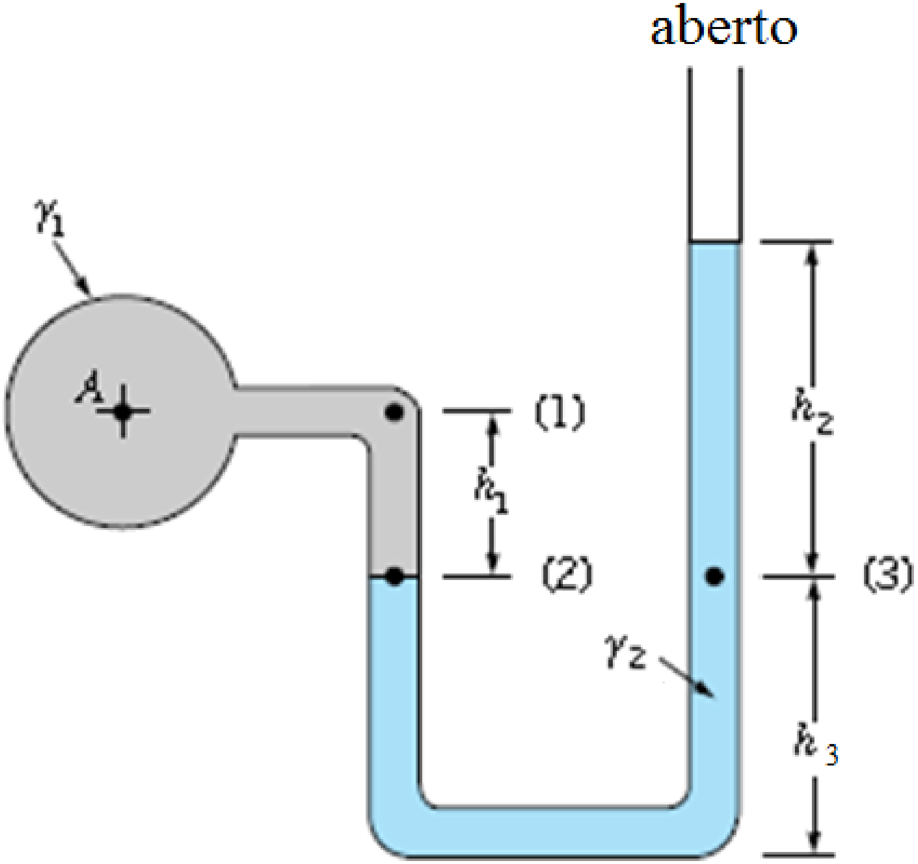
$$p_A = \gamma_1 h_1 \left(\text{pressão relativa}\right)$$



Restrições:

- $p_A > p_{atm}$
- p_A não pode ser muito grande
- Fluido do recipiente tem que ser líquido

Manômetro com tubo em U



$$p_A = p_1$$

$$p_1 = p_2 - \gamma_1 h_1$$

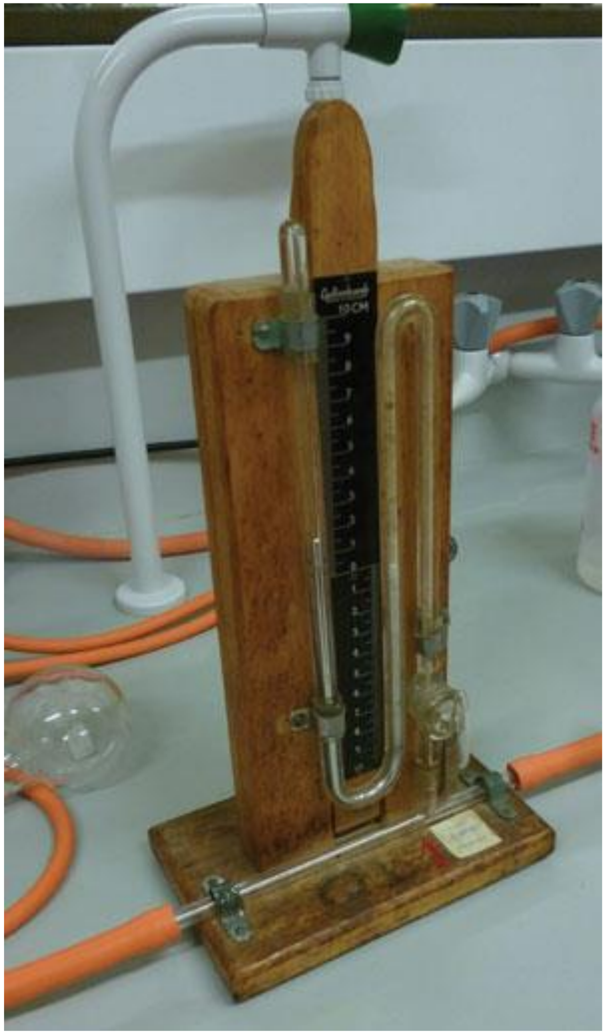
$$p_2 = p_3$$

$$p_3 = p_{atm} + \gamma_2 h_2$$

$$p_A = -\gamma_1 h_1 + \gamma_2 h_2 + p_{atm}$$

- Fluido manométrico pode ser diferente do fluido do recipiente
- Se o fluido do recipiente for um gás, o seu peso específico pode ser desprezado

Manômetro com tubo em U



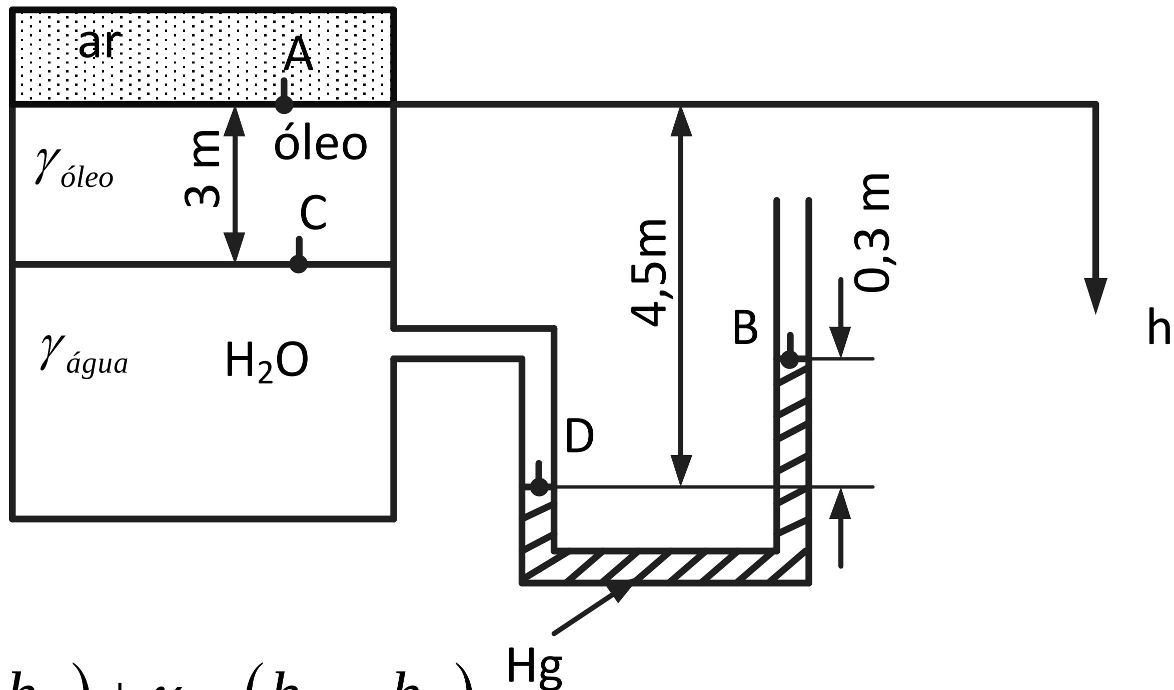
Exercício 1

Calcular a pressão efetiva em A, kgf/cm²

$$\gamma_{óleo} = 800\, kgf/m^3$$

$$\gamma_{água} = 1.000\, kgf/m^3$$

$$\gamma_{Hg} = 13.600\, kgf/m^3$$



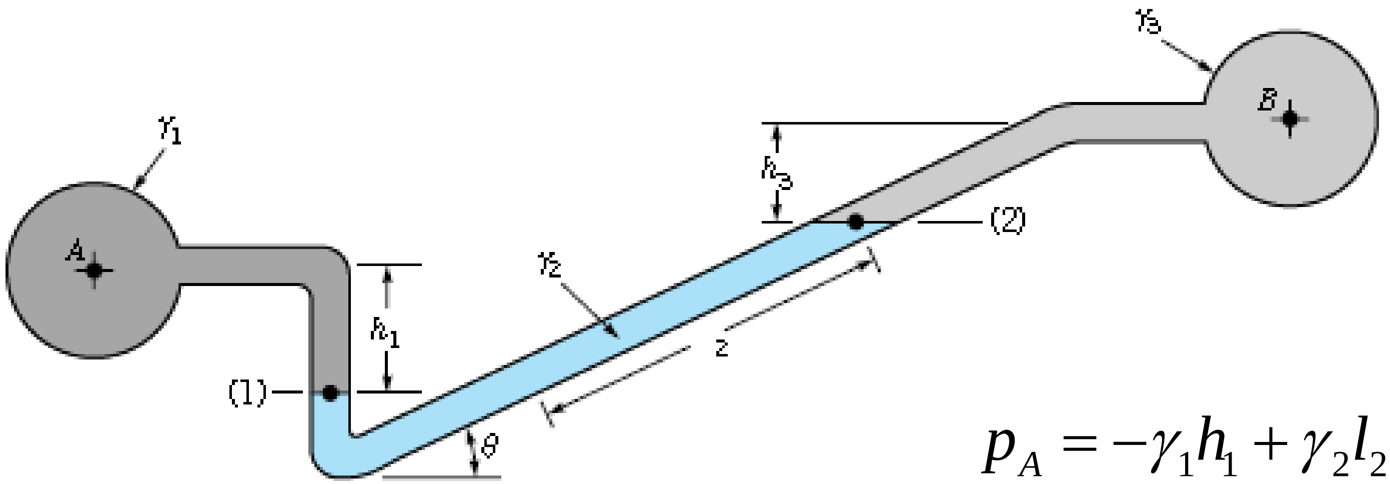
$$p_A = -\gamma_{óleo} h_C - \gamma_{água}\left(h_D - h_C\right) + \gamma_{Hg}\left(h_D - h_B\right)$$

$$p_A = -800x3 - 1.000\left(4,5-3\right) + 13.600\left(0,3\right) = 180\, kgf/m^2$$

$$p_A = 0,018\, kgf/cm^2$$

Exercício 2

Avaliação da pressão em manômetro inclinado



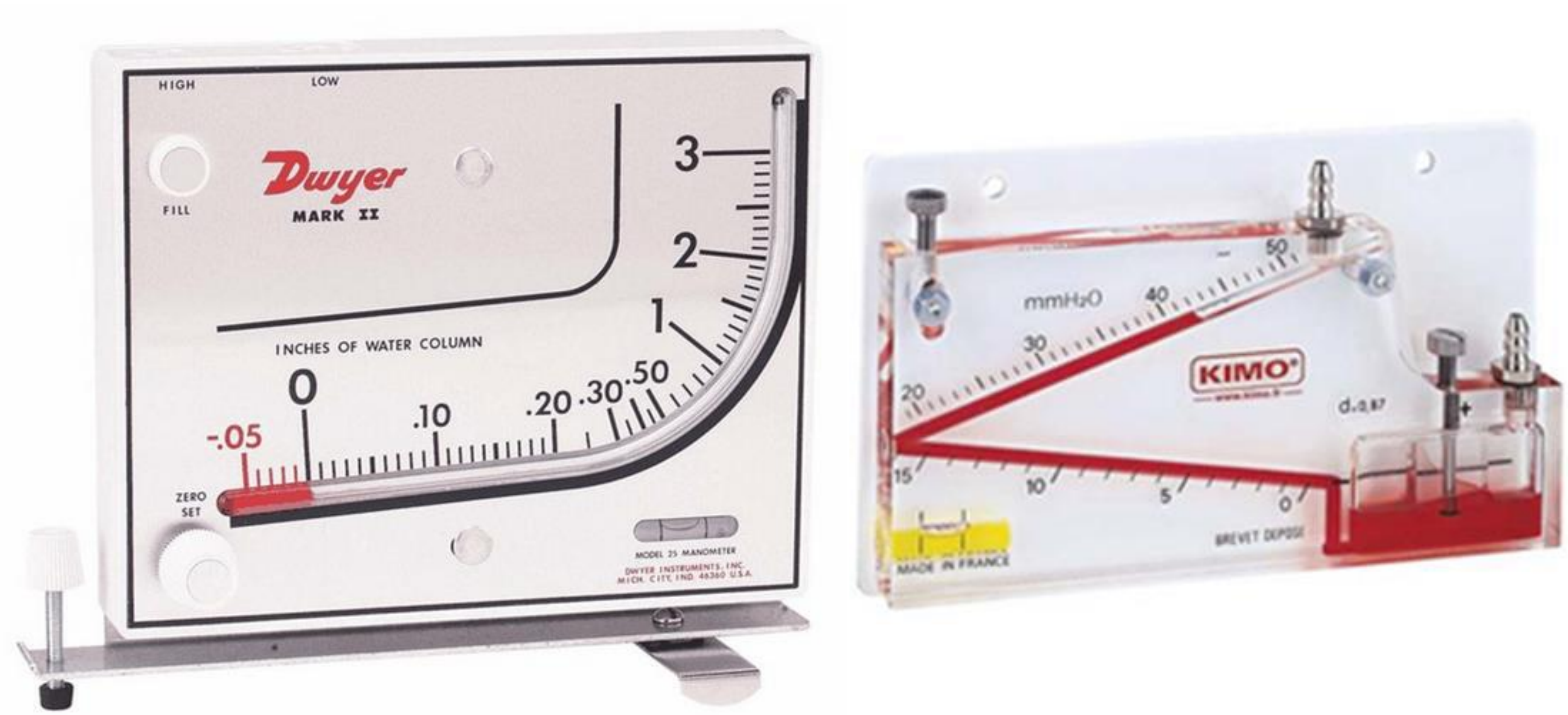
$$p_A = -\gamma_1 h_1 + \gamma_2 l_2 sen\theta + \gamma_3 h_3 + p_B$$

$$p_A - p_B = \gamma_2 l_2 sen\theta - \gamma_1 h_1 + \gamma_3 h_3$$

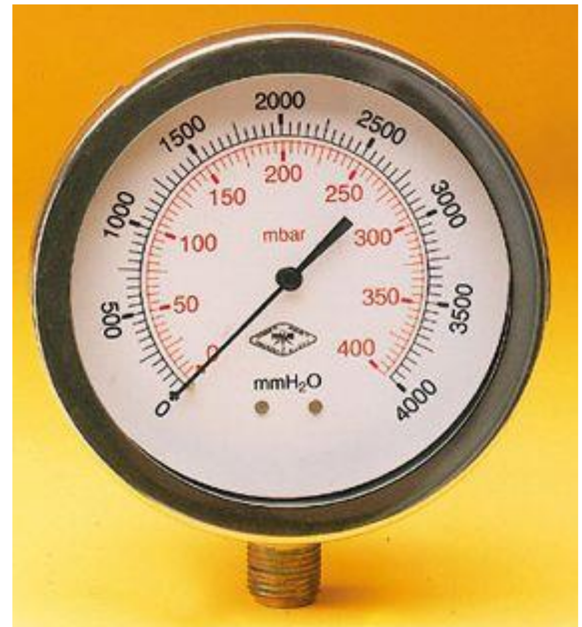
Se os fluidos em 1 e 3 forem gases: $\gamma_1 h_1 = \gamma_3 h_3 = 0$

$$p_A - p_B = \gamma_2 l_2 sen\theta \Rightarrow l_2 = \frac{p_A - p_B}{\gamma_2 sen\theta}$$

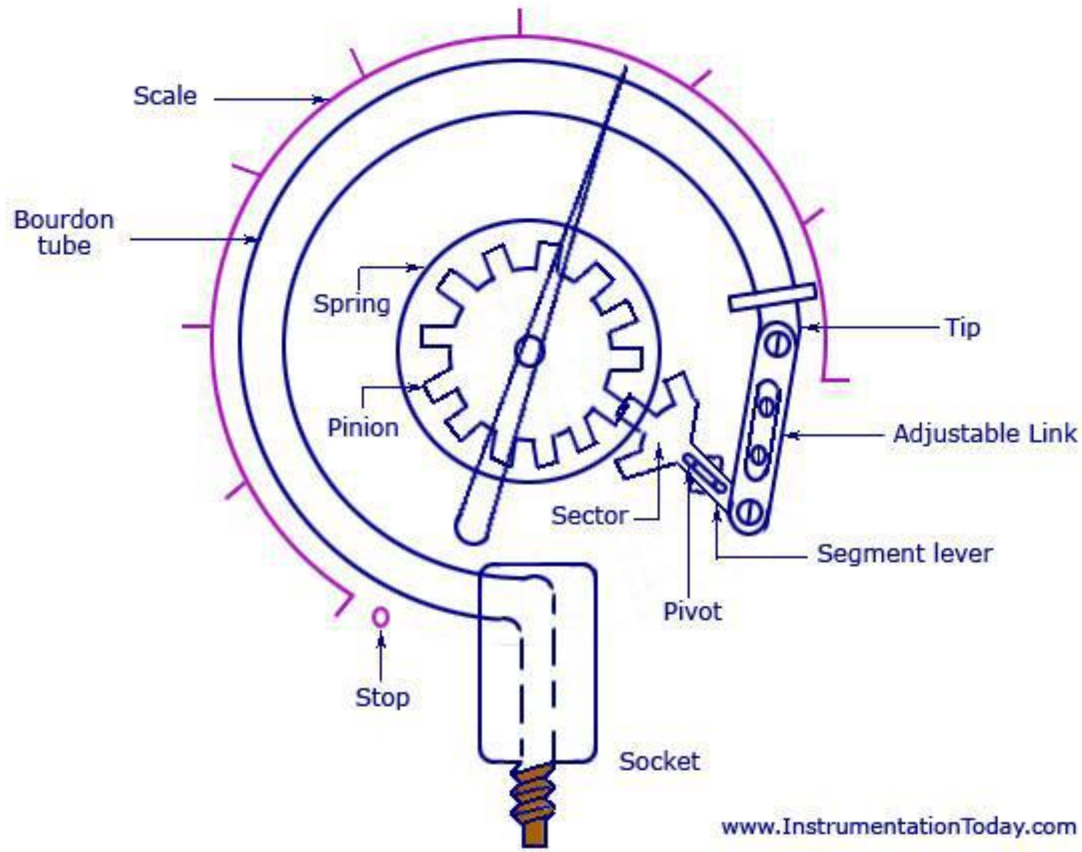
Manômetro inclinado



Manômetro de Bourdon



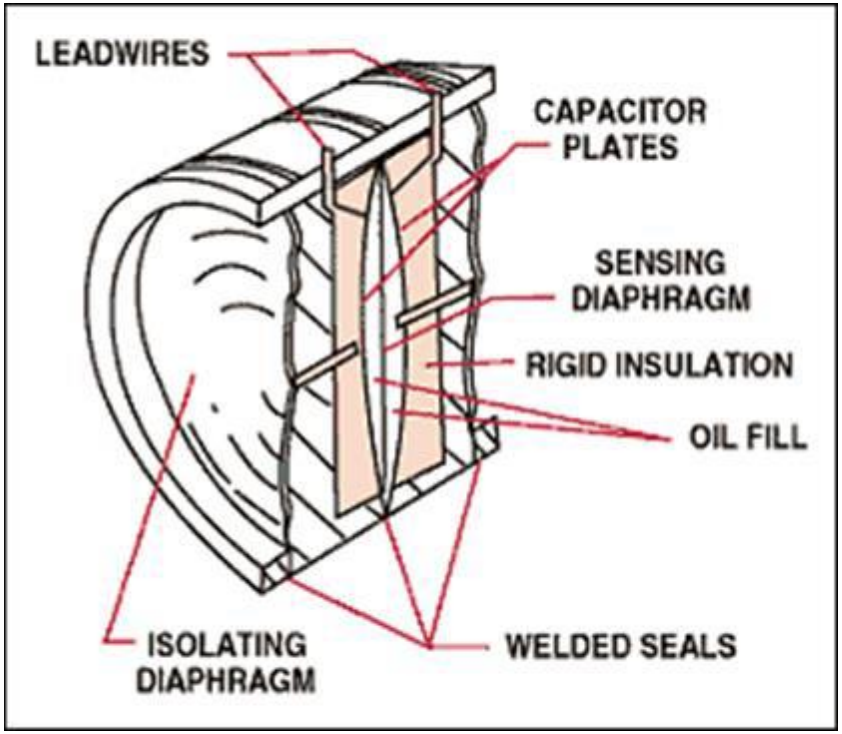
Manômetro de Bourdon



Bourdon Tube Pressure Gauge

Manômetro digitais

Manômetro digitais



Transdutores de pressão