Frequência complexa, Transformada de Laplace e Função de rede

* A frequência complexa → conceito unificador
* Conceito básico de freq. compl. e sua relevância para a análise de circuitos.
* Transformada de Laplace → circuitos alimentados por fontes variáveis no tempo mais gerais.

e^{7t} → 7 (Np/s)

unidade adimensional real

Frequência complexa

$$v(t) = V_m \, e^{\sigma t} \cos(\omega t + \theta) \qquad (1)$$

* σ (sigma) é uma grandeza real usualmente negativa (Np)
→ frequência neperiana

a) Tensão constante: $\sigma = \omega = 0$

$$v(t) = V_m \cos\theta = V_0 \qquad (2)$$

b) Tensão senoidal geral: $\sigma = 0$

$$v(t) = V_m \cos(\omega t + \theta) \qquad (3)$$

c) Tensão exponencial: $\omega = 0$

$$v(t) = \underbrace{V_m \cos\theta}_{V_0}\, e^{\sigma t} = V_0\, e^{\sigma t} \quad (4)$$

Comparando:

$$v(t) = V_0\, e^{\sigma t} \longrightarrow \underbrace{v(t) = V_0\, e^{j\omega t}}_{\text{representação complexa de uma função senoidal com ângulo de fase nulo!}}$$

* expoente real

* expoente imaginário

Frequência complexa e fasores generalizados

* Senoide não amortecida

$$v(t) = V_m \cos(\omega t + \theta)$$

$$v = Re\left(V_m e^{j\theta} \cdot e^{j\omega t}\right)$$

$$\dot{V} = V_m e^{j\theta} = V_m \angle \theta^\circ$$

$$\boxed{v = Re\left(\dot{V} e^{j\omega t}\right)}$$

* senoide amortecida

$$v = V_m e^{\sigma t} \cos(\omega t + \theta)$$

$$v = Re\left(V_m e^{\sigma t} \cdot e^{j\theta} \cdot e^{j\omega t}\right)$$

$$v = Re\left(\underbrace{V_m e^{j\theta}}_{\dot{V}} \cdot e^{(\sigma + j\omega)t}\right)$$

$$v = Re\left(\dot{V} e^{(\sigma + j\omega)t}\right)$$

$$S = \sigma + j\omega$$

$$\boxed{v = Re\left(\dot{V} e^{st}\right)}$$

$$\dot{V} = \dot{V}$$

$$\boxed{\dot{V} = V_m e^{j\theta} = V_m \angle \theta}$$

Conclusões

1) $\dot{V}$ é o mesmo p/ ambos

2) diferença: $j\omega$ e S

3) senoides amortecidas: $\dot{V}(S)$

" não " : $\dot{V}(j\omega)$

Exemplo:

$v(t) = 25\, e^{-t} \cos 2t \ (V)$

$\dot{V}(S) = 25 \angle 0^\circ \ (V)$

$S = \sigma + j\omega \quad \therefore \quad \boxed{S = -1 + j2}$

* $\dot{V}(S) \to$ fasor generalizado

* $S \to$ freq complexa
freq generalizada

$S = \sigma + j\omega \qquad \sigma = Re(S) \ (Np/s)$

$\omega = Im(S) \ (rad/s)$

Exemplo: Calcule s e $\dot{V}(s)$ se $v(t)$ for dada por:

a) $6\,(V)$

b) $6e^{-2t}\,(V)$

c) $6e^{-3t}\cos(4t+10°)\,(V)$

d) $6\cos(2t+10°)\,(V)$

$v(t) = V_m e^{\sigma t}\cos(\omega t + \theta)$

$s = \sigma + j\omega$

a) $\boxed{s = \sigma = \omega = 0}$ $\therefore$ $\boxed{\dot{V}(s) = 6\angle 0°\ (V)}$

b) $\boxed{s = -2}$ $\therefore$ $\sigma = -2$ e $\omega = 0$

$\boxed{\dot{V}(s) = 6\angle 0°\ (V)}$

c) $\boxed{s = -3 + j4}$ $\boxed{\dot{V}(s) = 6\angle 10°\ (V)}$

d) $\boxed{s = j2}$ $\boxed{\dot{V}(s) = 6\angle 10°\ (V)}$

Impedância e Admitância

$Z(S) \rightarrow$ impedância generalizada

$$\dot{V}(S) = Z(S)\,\dot{I}(S)$$

* Resistência: $Z_R(S) = R\ (\Omega)$

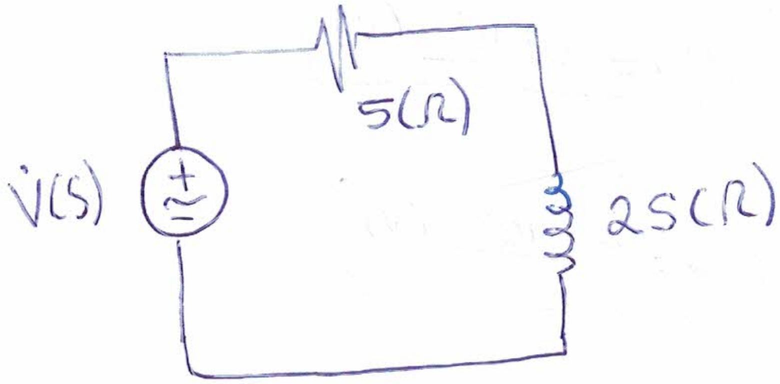
* Indutância: $Z_L(j\omega) = j\omega L\ (\Omega)$

$$Z_L(S) = SL\ (\Omega)$$

* Capacitância: $Z_C(j\omega) = \dfrac{1}{j\omega C}\ (\Omega)$

$$Z_C(S) = \frac{1}{SC}\ (\Omega)$$

Exemplo: $i(t) = ?$ $\therefore$ RPCA $\rightarrow$ resposta forçada!



$v(t) = 25e^{-t} \cos 2t \ (V)$

$s = -1 + j2$ $\qquad \dot{V}(s) = 25\angle 0° \ (V)$

$Z(s) = 5 + 2s \ (\Omega)$

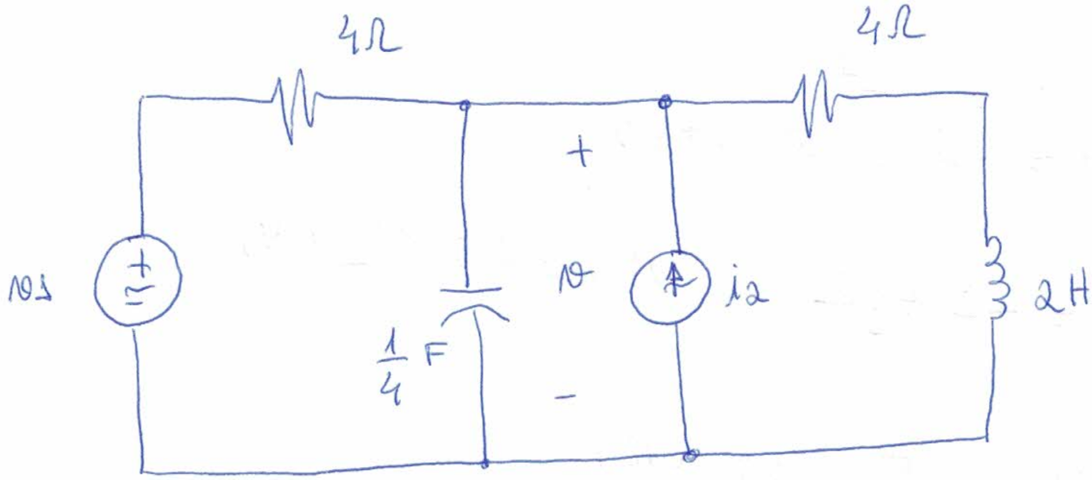
$\dot{V} = Z(s) \cdot I(s)$

$$\dot{I}(s) = \frac{\dot{V}(s)}{Z(s)} = \frac{25\angle 0°}{5+2s} = \frac{25\angle 0°}{2(-1+j2)+5}$$

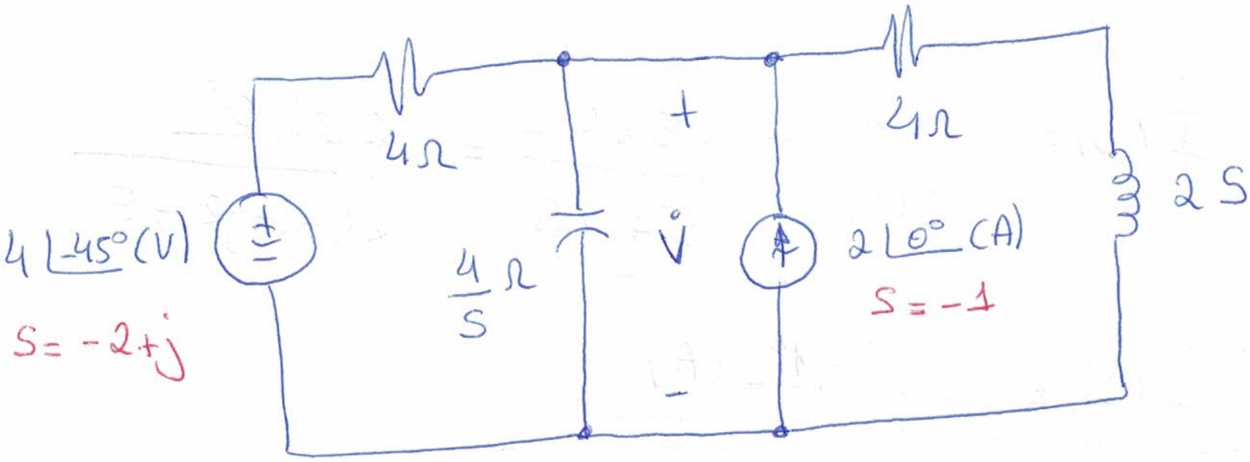
$$\boxed{\dot{I}(s) = 5\angle -53{,}1° \ (A)}$$

$$\boxed{i(t) = 5e^{-t} \cos(2t - 53{,}1°) \ (A)}$$

Exemplo: Calcule a resposta forçada $v(t)$ se $v_1 = 4e^{-2t} \cos(t - 45°) \ (V)$ e $i_1 = 2e^{-t} \ (A)$.



dom. tempo



dom. freq.

$$\dot{V} = \dot{V}_A + \dot{V}_B$$ SUPERposição

$\dot{V}_A$ ↳ vs1 ATIVA, i2 INATIVA

$\dot{V}_B$ ↳ i2 ATIVA, vs1 INATIVA

$$\dot{V}_A = 2\sqrt{2}\,\angle 90^\circ \text{ (V)} \quad \therefore \quad v_A(t) = 2\sqrt{2}\, e^{-2t} \cos(t + 90^\circ) \text{ (V)}$$

$$\dot{V}_B = 4\,\angle 0^\circ \text{ (V)} \quad \therefore \quad v_B(t) = 4 e^{-t} \text{ (V)}$$

$$v(t) = 2\sqrt{2}\, e^{-2t} \cos(t + 90^\circ) + 4e^{-t} \; (V)$$

Exemplos: 14.4 e 14.5

Exercícios: 14.3.1 / 3.3 e 3.4

Definição da Transformada de Laplace

* generalizar em maior profundidade o método fasorial, para analisar circuitos com entradas não senoidais.
* fornece de uma única vez tanto a resposta natural como a resposta forçada, para um dado conjunto de condições iniciais.

A TL bilateral

* Expandir uma função qualquer em uma soma de formas de ondas exponenciais, cada uma delas com sua própria frequência complexa.

$$\mathcal{L}[f(t)] = \mathbf{F}(s) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-st} f(t)\, dt \qquad (1)$$

$F(S)$ → transformada de Laplace de $f(t)$, e é uma função da freq. generalizada ($s = \sigma + j\omega$).

TL → converte a função $f(t)$ genérica no domínio do tempo em uma representação $F(S)$ no domínio da frequência.

A Transformada inversa de Laplace bilateral

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma_0 - j\infty}^{\sigma_0 + j\infty} e^{st} F(S)\, dS \qquad (2)$$

σ_0 → constante real incluída nos limites para assegurar a convergência dessa integral imprópria.

um ou ambos os limites estão no infinito

* (1) e (2) constituem o par de transformadas de Laplace bilaterais.

A TL unilateral

* $f(t)$ só tem interesse para $t \geq 0$

$$F(S) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-st} f(t)\, u(t)\, dt = \int_{0^-}^{\infty} e^{-st} f(t)\, dt$$

Par de transformadas de Laplace:

$$\boxed{F(S) = \int_{0^-}^{\infty} e^{-st} f(t)\, dt} \qquad (3)$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma_0 - j\infty}^{\sigma_0 + j\infty} e^{st} F(S)\, ds \qquad p/\ t>0$$

$$f(t) \Longleftrightarrow F(S)$$

$$F(S) = \mathcal{L}\{f(t)\} \quad e \quad f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(S)\}$$

Exemplo: Apresente a $F(S)$ para $f(t) = e^{-at} u(t)$.

$$F(S) = \int_0^{\infty} e^{-at} \cdot e^{-st}\, dt = \int_0^{\infty} e^{-(S+a)t}\, dt = \frac{-1}{S+a} e^{-(S+a)t} \Big|_0^{\infty}$$

$$F(S) = \frac{1}{S+a}$$

$$\boxed{\begin{gathered} \mathrm{Re}\, S = \sigma > -a \therefore \quad e^{-xt} \Big|_0^{\infty} \\ e^{-\infty} = 0 \end{gathered}}$$

$$\boxed{\mathcal{L}\left[e^{-at}u(t)\right] = \frac{1}{s+a}}$$

Exemplo: Apresente F(S) da função degrau.

$$\mathcal{L}\left[u(t)\right] = \int_0^\infty e^{-st}\,dt = \frac{1}{S} \quad \text{tal que } \mathrm{Re}\, S > 0$$

Exemplo: Determine a F(S) de $f(t) = 2u(t-3)$.

$$F(S) = \int_0^\infty e^{-st}\, 2u(t-3)\,dt = 2\int_3^\infty e^{-st}\,dt$$

$$F(S) = -\frac{2}{S} e^{-st}\Big|_3^\infty = -\frac{2}{S}\left(0 - e^{-3S}\right) \qquad \boxed{F(S) = \frac{2}{S} e^{-3S}}$$

Transformada de Laplace de funções temporais simples

* catálogo de transformadas de Laplace, assumindo que a função de interesse seja a tensão!

$$V(S) = \int_0^{\infty} e^{-st} v(t)\,dt = \mathcal{L}\{v(t)\}$$

$$v(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma_0 - j\infty}^{\sigma_0 + j\infty} e^{st} V(S)\,ds = \mathcal{L}^{-1}\{V(S)\}$$

* para cada $v(t)$ cuja transformada $V(S)$ existe, há uma única função $V(S)$.

A função degrau $u(t)$

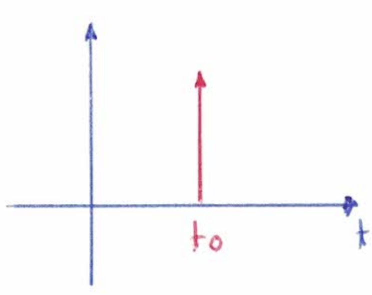
$$\mathcal{L}\{u(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-st} u(t)\,dt = \int_0^{\infty} e^{-st}\,dt = -\frac{1}{s} e^{-st}\Big|_0^{\infty} = \frac{1}{s}$$

p/ $Re\{s\} > 0$:

$$\boxed{u(t) \Longleftrightarrow \frac{1}{s}}$$

A função impulso unitário $\delta(t - t_0)$

$\delta \rightarrow$ delta



Por definição, a função impulso unitário tem área unitária.

$$\delta(t-t_0)=0 \qquad t \neq t_0$$

$$\int_{t_0-\varepsilon}^{t_0+\varepsilon} \delta(t-t_0)\,dt = 1$$

(epsilon)

* onde $\underline{\varepsilon}$ é uma constante com valor pequeno.

* a função tem um valor diferente de zero apenas no ponto t_0.

$$\mathcal{L}\{\delta(t-t_0)\} = \int_0^{\infty} e^{-st}\,\delta(t-t_0)\,dt = e^{-st_0}$$

$$\boxed{\delta(t-t_0) \Longleftrightarrow e^{-st_0}}$$

A função exponencial $e^{-\alpha t}$

$$\mathcal{L}\{e^{-\alpha t}u(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-\alpha t}\,e^{-st}\,dt = -\frac{1}{s+\alpha}\,e^{-(s+\alpha)t}\Big|_0^{\infty}$$

$$F(s) = \frac{1}{s+\alpha}$$

$$\boxed{e^{-\alpha t}u(t) \Longleftrightarrow \frac{1}{s+\alpha}}$$

A função rampa $t\,u(t)$

$$\mathcal{L}\{t\,u(t)\} = \int_0^{\infty} t\,e^{-st}\,dt = \frac{1}{s^2}$$

$$\boxed{t\,u(t) \Longleftrightarrow \frac{1}{s^2}}$$

ou por uma integração por partes ou a partir de uma tabela de integrais.

Exercícios: Determine $V(s)$ se $v(t)$ é igual a:

a) $4\delta(t) - 3u(t)$;

b) $4\delta(t-2) - 3t\,u(t)$; e

c) $[u(t)]\,[u(t-2)]$.

Respostas:

$\dfrac{(4s-3)}{s}$; $4e^{-2s} - (3/s^2)$;

$\dfrac{e^{-2s}}{s}$

Técnicas para Transformadas Inversas

a) O teorema da linearidade

$$\mathcal{L}\{f_1(t) + f_2(t)\} = F_1(s) + F_2(s)$$

$$v(t) = \mathcal{L}^{-1}\{V(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\{V_1(s) + V_2(s)\}$$

$$v(t) = \mathcal{L}^{-1}\{V_1(s)\} + \mathcal{L}^{-1}\{V_2(s)\} = v_1(t) + v_2(t)$$

$$\mathcal{L}\{\underline{\underline{k}}\, v(t)\} = \underline{\underline{k}}\, \mathcal{L}\{v(t)\}$$

$$\boxed{\underline{\underline{k}}\, v(t) \Longleftrightarrow \underline{\underline{k}}\, V(s)}$$

onde k é uma constante de proporcionalidade

Exemplo: Dada a função $G(s) = \dfrac{7}{s} - \dfrac{31}{s+17}$, determine $g(t)$.

$$g(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{7}{s}\right\} - \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{31}{s+17}\right\}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{7}{s}\right\} = 7\,\mathcal{L}^{-1}\underbrace{\left\{\frac{1}{s}\right\}}_{\text{tabelado}} = 7\,u(t)$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{31}{s+17}\right\} = 31\,\mathcal{L}^{-1}\underbrace{\left\{\frac{1}{s+17}\right\}}_{\text{tabelado}} = 31\,e^{-17t}\,u(t)$$

$$\boxed{g(t) = \left[7 - 31e^{-17t}\right] u(t)}$$

Exercício: Dada a função $H(S) = \dfrac{7}{S^2} + \dfrac{31}{(S+17)^2}$,

obtenha $h(t)$.

Resp.: $h(t) = [7 + 31e^{-17t}]\,t\,u(t)$

b) Envolvendo funções racionais

$$V(S) = \frac{N(S)}{D(S)}$$ ∴ resultante da análise de circuitos com múltiplos elementos armazenadores de energia

* onde $N(S)$ e $D(S)$ são polinômios em S.

* Os valores de S que levam a $N(S) = 0$ são chamados de zeros de $V(S)$, e os valores de S que levam $D(S) = 0$ são chamados de pólos de $V(S)$.

Objetivo: decompor a expressão $V(S)$ em termos mais simples cujas transformadas inversas já são conhecidas!

Requer que $V(S)$ seja uma função racional na qual o grau do numerador $N(S)$ deve ser menor do que o grau do denominador $D(S)$ ∴ se não o for, devemos primeiro realizar uma simples divisão!

Exemplo: obtenha a transformada inversa de

$$F(S) = 2\,\frac{S+2}{S} = 2\left(1 + \frac{2}{S}\right) = 2 + \frac{4}{S}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(S)\} = \mathcal{L}^{-1}\{2\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{4}{S}\right\} = 2\,\delta(t) + 4u(t)$$

Exercício: Dada a função $Q(S) = \dfrac{3S^2-4}{S^2}$, obtenha $q(t)$.

Resp.: $q(t) = 3\,\delta(t) - 4\,t\,u(t)$

Método dos resíduos: realizar a expansão de $V(S)$ em frações parciais, dando atenção nas raízes do denominador $D(S)$. Logo, primeiro é necessário fatorar o polinômio em S que descreve $D(S)$ em um produto de termos binomiais.

As raízes de $D(S)$ podem ser qq combinação de raízes distintas ou repetidas, reais ou complexas.

Obs: as raízes complexas sempre ocorrem em pares conjugados, desde que os coeficientes de $D(S)$ sejam reais.

* Que frações simples se somam para dar F(S)?

Exemplo: Calcule a antitransformada de:

$$F(S) = \frac{2\,(S+10)}{(S+1)(S+4)}$$ ∴ Pólos simples ou pólos de 1ª ordem

* Obter uma expansão em frações parciais é a operação oposta de se obter um denominador comum.

$$F(S) = \frac{2\,(S+10)}{(S+1)\,(S+4)} = \frac{A}{S+1} + \frac{B}{S+4}$$ observando que:

$$(S+1)\,F(S) = \frac{2\,(S+10)}{(S+4)} = A + \frac{B\,(S+1)}{S+4}$$

e

$$(S+4)\,F(S) = \frac{2\,(S+10)}{S+1} = \frac{A\,(S+4)}{S+1} + B$$

devem ser identidades para todos os valores de S

* Para $S = -1$ ∴ eliminamos B
* Para $S = -4$ ∴ " A

$$A = (S+1)\,F(S)\Big|_{S=-1} = \frac{2(9)}{3} = 6$$

$$B = (S+4)\,F(S)\Big|_{S=-4} = \frac{2(6)}{-3} = -4$$

Portanto: $$F(S) = \frac{6}{S+1} - \frac{4}{S+4}$$

$$\boxed{f(t) = 6e^{-t} - 4e^{-4t}}$$ ou melhor

$$\boxed{f(t) = [6e^{-t} - 4e^{-4t}]\,u(t)}$$

Exemplo: Obtenha a transformada inversa de

$$P(S) = \frac{7S+5}{S^2+S}$$

$$P(S) = \frac{7S+5}{S(S+1)} = \frac{A}{S} + \frac{B}{S+1}$$

$$A = S\,F(S)\Big|_{S=0} = \frac{7S+5}{S+1}\Big|_{S=0} \therefore \boxed{A = 5}$$

$$B = (S+1)\,F(S)\Big|_{S=-1} = \frac{7S+5}{S}\Big|_{S=-1} \therefore \boxed{B=2}$$

$$P(S) = \frac{5}{S} + \frac{2}{S+1}$$

$$\boxed{p(t) = [\,5 + 2e^{-t}\,]\,u(t)}$$

Exemplo: pólos complexos

Ocorrem em pares conjugados e seus coeficientes correspondentes na expansão são conjugados complexos.

* Se $F(S)$ tem polos complexos, $S = \alpha \pm j\beta$

$\boxed{\sigma = \alpha \Rightarrow \text{frequência Neperiana (Np/s)}}$

$$F(S) = \frac{A}{S-\sigma-j\beta} + \frac{B}{S-\sigma+j\beta}$$

$$\left.\begin{aligned} A &= (S-\sigma-j\beta)\,F(S)\Big|_{S=\sigma+j\beta} \\ &\text{e} \\ B &= (S-\sigma+j\beta)\,F(S)\Big|_{S=\sigma-j\beta} \end{aligned}\right\} B = A^*$$

* $B = A^*$, porque $F(S)$ é uma divisão de polinomiais em S com coeficientes reais.

$$f(t) = A e^{(\sigma + j\beta)t} + A^* e^{(\sigma - j\beta)t}$$

que é a soma de um nº complexo e seu conjugado.

$$f(t) = 2 \operatorname{Re}\left[A e^{(\sigma + j\beta)t} \right]$$

Se $A = |A| e^{j\theta}$, então temos:

$$f(t) = 2\operatorname{Re}\left[|A| e^{j\theta} \cdot e^{\sigma t} \cdot e^{j\beta t} \right]$$

$$f(t) = 2 \operatorname{Re}\left[|A| e^{\sigma t} \cdot e^{j(\theta + \beta t)} \right]$$

$$\boxed{f(t) = 2 |A| e^{\sigma t} \cdot \cos(\beta t + \theta)}$$

* $e^{jx} = \cos x + j \operatorname{sen} x \quad \therefore \quad \operatorname{Re}\left[e^{jx}\right] = \cos x$

* $\sigma = \alpha \Rightarrow$ freq. Neperiana (Np/s)

Exemplo: Seja $F(S) = \dfrac{S}{(S+1)(S^2+2S+2)}$, calcule $f(t)$.

$$F(S) = \frac{S}{(S+1)(S^2+2S+2)} = \frac{S}{(S+1)(S+1-j1)(S+1+j1)}$$

$$F(S) = \frac{S}{(S+1)(S^2+2S+2)} = \frac{A}{S+1} + \frac{B}{S+1-j1} + \frac{B^*}{S+1+j1}$$

* $(S+1)\,F(S)\Big|_{S=-1} = A \qquad A = \dfrac{S}{S^2+2S+2}\Big|_{S=-1}$

$$\boxed{A = -1}$$

* $(S+1-j1)\,F(S)\Big|_{S=\overset{\sigma}{-1}+j1} \qquad B = \dfrac{S}{(S+1)(S+1+j1)}\Big|_{S=\overset{\sigma}{-1}+j1}$

$$B = \frac{1-j1}{2} \qquad \boxed{B = \frac{1}{\sqrt{2}}\angle{-45^\circ}}$$

$$\boxed{B = |B|e^{j\theta}}$$

$$F(S) = \frac{-1}{S+1} + \frac{1/\sqrt{2}\,\angle{-45^\circ}}{S+1-j1} + \frac{1/\sqrt{2}\,\angle{45^\circ}}{S+1-j1}$$

$$\boxed{S = -1 + j1}$$

$$\boxed{S = \alpha + j\omega = \sigma + j\omega} = -1 + j1$$

$$\downarrow$$

$$f(t) = -e^{-t} + 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}\, e^{-t} \cos(t - 45^\circ)$$

$$\boxed{f(t) = -e^{-t} + \sqrt{2}\, e^{-t} \cos(t - 45^\circ)}$$

Exemplo: pólos repetidos (múltiplos)

Exemplo 18.18 pp 487 Johnso 4ª Ediç
14.6, pp 550 Hayt 7ª Ediç

$$F(S) = \frac{A_n}{(S+a)^n}^{A} + \frac{A_{n-1}}{(S+a)^{n-1}}^{B} + \dots + \frac{A_k}{(S+a)^k} + \dots +$$

$$+ \frac{A_1}{S+a} + F_1(S)^{C}$$

Onde $F_1(S)$ corresponde aos demais pólos de $F(S)$.

Exemplo: $F(S) = \dfrac{4}{\underbrace{(S+1)^2}(S+2)}$

pólos múltiplos: $(S+1).(S+1)$

$$F(S) = \frac{A}{(S+1)^2} + \frac{B}{S+1} + \frac{C}{S+2} \qquad (*)$$

?

$$A = (S+1)^2 F(S)\Big|_{S=-1} = \frac{4}{S+2}\Big|_{S=-1} \therefore \boxed{A=4}$$

e

$$C = (S+2)\,F(S)\Big|_{S=-2} = \frac{4}{(S+1)^2}\Big|_{S=-2} \therefore \boxed{C=4}$$

Para obter B, devemos eliminar as frações de $(*)$, obtendo:

$$\frac{4}{(S+1)^2(S+2)} = \frac{\overset{A}{4}(S+2) + B(S+1)(S+2) + \overset{C}{4}(S+1)^2}{(S+1)^2(S+2)}$$

$$4 = \overset{A}{4}(S+2) + B(S+1)(S+2) + \overset{C}{4}(S+1)^2$$

Igualando os coeficientes em s^2, obtemos:

$s^2(B+4)=0$

$$0 = B + 4$$

$$\boxed{B = -4}$$

$F_1(s)$

$$F(s) = \frac{4}{(s+1)^2} - \frac{4}{s+1} + \frac{4}{s+2}$$

Tabela 18.1, pp. 484 (Johnson)

$$\boxed{f(t) = 4te^{-t} - 4e^{-t} + 4e^{-2t}}$$

Exemplos: 18.17 pp. 487
18.18 pp. 487
18.19 pp 488 } Johnson, 4ª Edição

Exercícios: 18.3.1

18.4.1 / 4.2 e 4.3

William H. Hayt, Jr. 7ª edição pp 548-551

Teoremas básicos p/ a TL

* O teorema da diferenciação no tempo

$$\mathcal{L}\left\{\frac{dv}{dt}\right\} = \int_0^{\infty} e^{-st}\,\frac{dv}{dt}\,dt$$

que pode ser integrada por partes:

$$U = e^{-st} \qquad dV = \frac{dv}{dt}\,dt$$

com resultado

$$\mathcal{L}\left\{\frac{dv}{dt}\right\} = 0 - v(0) + s\,V(s)$$

$$\boxed{\frac{dv}{dt} \iff s.V(s) - v(0)}$$

$$i_C = C\,\frac{dv}{dt}$$

$$v_L = L\,\frac{di}{dt}$$

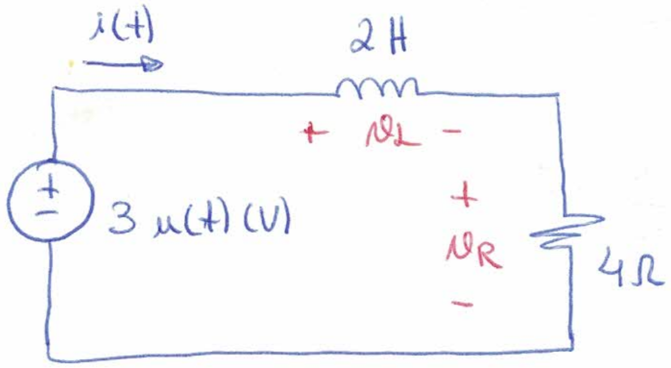
$$\frac{d^2v}{dt^2} \iff s^2V(s) - s\,v(0) - v'(0)$$

$$\frac{d^3v}{dt^3} \iff s^3V(s) - s^2v(0) - s\,v'(0) - v''(0)$$

* Quando todas as condições iniciais são nulas, o cálculo de uma derivada (domínio do tempo) é equivalente a uma multiplicação no domínio da frequência.

Exemplo: Dado o circuito RL, determine a corrente no resistor de 4Ω.

$\boxed{i(0^-) = 5\,A}$



$$\underbrace{2\frac{di}{dt} + 4i = 3\,u(t)}_{\text{dom. tempo}} \qquad \underbrace{2[sI(s) - i(0)] + 4I(s) = \frac{3}{s}}_{\text{dom. freq.}}$$

p/ $i(0^-) = i(0) = i(0^+) = 5\,(A)$

$$(2s + 4)\,I(s) = \frac{3}{s} + 10$$

$$I(S) = \underbrace{\frac{1{,}5}{S(S+2)}} + \frac{5}{S+2}$$

$$\left.\frac{1{,}5}{S+2}\right|_{S=0} = 0{,}75$$

$$\left.\frac{1{,}5}{S}\right|_{S=-2} = -0{,}75$$

$$I(S) = \frac{0{,}75}{S} - \frac{0{,}75}{(S+2)} + \frac{5}{(S+2)}$$

$$I(S) = \frac{0{,}75}{S} + \frac{4{,}25}{S+2}$$ dom. freq.

$\mathcal{L}^{-1}$

$$i(t) = 0{,}75u(t) + 4{,}25e^{-2t}u(t)$$ dom. tempo

$$\boxed{i(t) = (0{,}75 + 4{,}25e^{-2t})\,u(t) \ (A)}$$

$t \to \infty$

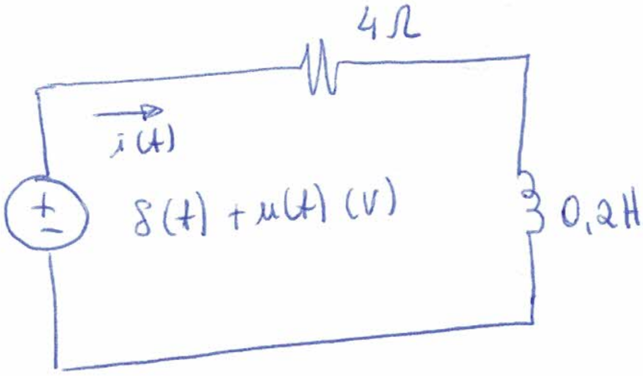
$$i(t) = i_n(t) + i_f(t)$$

$\hookrightarrow$ sem fontes

$$i_n(t) = I_0 e^{-\frac{R}{L}t}$$

e p/ $t = 0$ $\quad i(0) = 5\,(A)$

Exercício: Use métodos da TL para obter $i(t)$.



Resp.: $(0{,}25 + 4{,}75 e^{-20t}) u(t)$ (A)

O teorema da integração no tempo

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t v(x)\,dx\right\} = \int_0^\infty e^{-st}\left[\int_0^t v(x)\,dx\right] dt$$

Integrando por partes:

$$u = \int_0^t v(x)\,dx \qquad dv = e^{-st}\,dt$$

$$du = v(t)\,dt \qquad v = -\frac{1}{s} e^{-st}$$

Então:

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t v(x)\,dx\right\} = \left\{\left[\int_0^t v(x)\,dx\right]\left[-\frac{1}{s}e^{-st}\right]\right\}\Bigg|_{t=0}^{t=\infty}$$

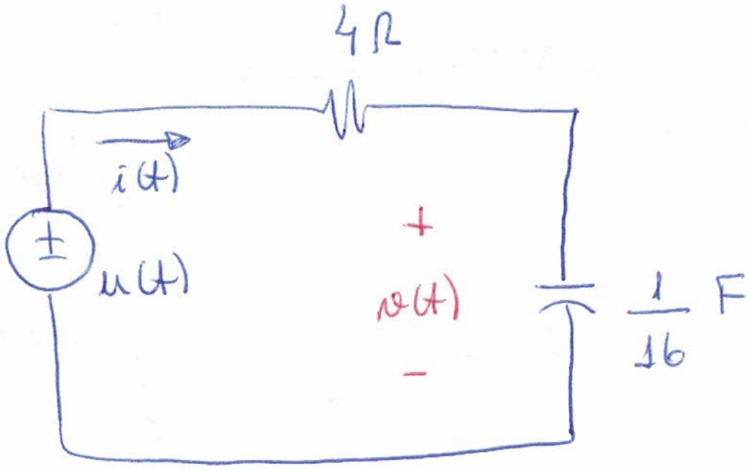
$$-\int_0^\infty -\frac{1}{s}e^{-st}\,v(t)\,dt = \left[-\frac{1}{s}e^{-st}\int_0^t v(x)\,dx\right]_0^\infty + \frac{1}{s}V(s)$$

e como $e^{-st} \to 0$ à medida que $t \to \infty$, o primeiro termo à direita desaparece no limite superior; e qdo $t \to \infty$, a integral desse termo também desaparece.

$$\boxed{\int_0^t v(x)\,dx \iff \frac{V(s)}{s}}$$

* A integração no domínio do tempo corresponde à divisão por s no domínio da frequência.

<u>Exemplo:</u> Determine $i(t)$ em $t>0$ para o circuito RC dado.



$$\boxed{v(0) = 9\,(V)}$$

$$i_C = C\frac{dv}{dt}$$

$$u(t) = 4\,i(t) + \underbrace{16\int_{-\infty}^{t} i(t)\,dt}$$

$$16\int_{-\infty}^{t} i(t)\,dt = 16\int_{-\infty}^{0^-} i(t)\,dt + 16\int_{0}^{t} i(t)\,dt$$

$$= v(0^-) + 16\int_{0}^{t} i(t)\,dt$$

$$u(t) = 4\,i(t) + v(0^-) + 16\int_{0}^{t} i(t)\,dt$$ dom. tempo

↓

Cuidado!

$$\frac{1}{s} = 4\,I(s) + \frac{9}{s} + \frac{16}{s}\,I(s)$$ dom. freq.

$$I(s) = \frac{-2}{s+4}$$ dom. freq.

$$\boxed{i(t) = -2e^{-4t}\,u(t)\ (A)}$$ dom. tempo

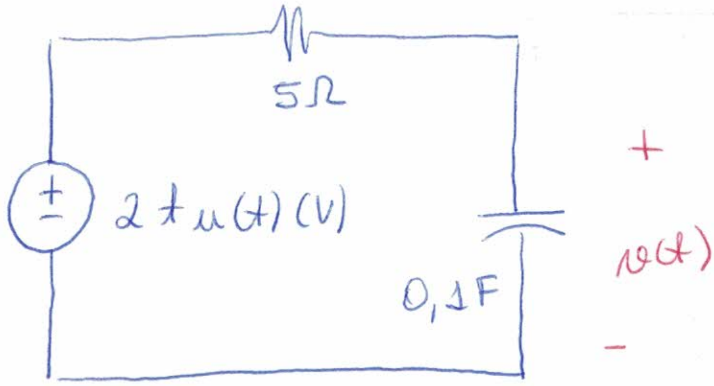
Exercício: Para o circuito anterior, obtenha $v(t)$.

Resp: $v(t) = (1+8e^{-4t})\,u(t)\ (V)$

(1 equação nodal)!!!

$$\frac{v(t) - u(t)}{4} + \frac{1}{16}\frac{dv}{dt} = 0$$

Exercício: Obtenha $v(t)$ em $t = 800ms$.



Resp: 802 (mV)

O Teorema do Deslocamento no tempo

$$\mathcal{L}[f(t-a)u(t-a)] = \int_0^\infty e^{-st} f(t-a)u(t-a)\,dt$$

$$= \int_a^\infty e^{-st} f(t-a)\,dt \quad p/\ t \geq a$$

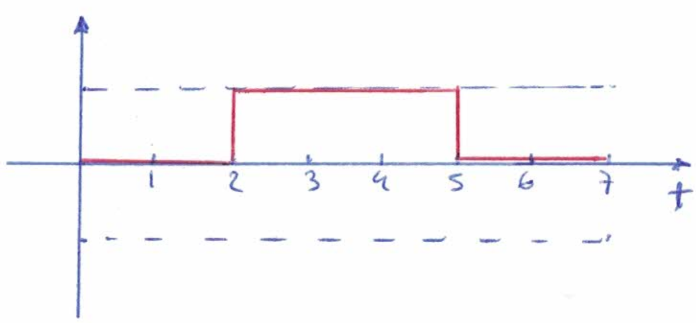
Escolhendo uma nova variável de integração, $\tau = t - a$, temos:

$$\mathcal{L}[f(t-a)u(t-a)] = \int_0^\infty e^{-s(\tau+a)} f(\tau)\,d\tau = e^{-as} F(s)$$

$$f(t-a)u(t-a) \Leftrightarrow e^{-as} F(s) \quad p/\ a \geq 0$$

Exemplo: Determine a TL do pulso retangular

$v(t) = u(t-2) - u(t-5)$.



$$\mathcal{L}\{u(t)\} = \frac{1}{s}$$

$$\mathcal{L}\{u(t-2)\} = e^{-2s} \cdot \frac{1}{s}$$

$$\mathcal{L}\{u(t-5)\} = e^{-5s} \frac{1}{s}$$

$$V(S) = \frac{e^{-2S}}{S} - \frac{e^{-5S}}{S} = \frac{e^{-2S} - e^{-5S}}{S}$$

O teorema do valor inicial e final

Permitem encontrar o valor inicial $f(0)$ e o valor final $f(\infty)$ de $f(t)$ diretamente a partir de $F(S)$

$$S F(S) - f(0) = \mathcal{L}\left\{\frac{df}{dt}\right\} = \int_{0^-}^{\infty} \frac{df}{dt} e^{-st} dt \quad (**)$$

Se fizermos $S \to \infty$, o integrando de $(**)$ desaparece em razão do fator exponencial de amortecimento e $(**)$ fica:

$$\lim_{S \to \infty} [S F(S) - f(0)] = 0 \qquad \lim_{S \to \infty} f(0) = \lim_{S \to \infty} SF(S)$$

Uma vez que $f(0)$ é independente de S, podemos escrever:

$$\boxed{f(0^+) = \lim_{S \to \infty} S F(S)}$$

Teorema do valor inicial

Exemplo: $f(0) = ?$

$$f(t) = e^{-2t}\cos 10t \iff F(S) = \frac{S+2}{(S+2)^2 + 10^2}$$

Usando o teorema do valor inicial:

$$f(0) = \lim_{S\to\infty} S\,F(S) = \lim_{S\to\infty} \frac{S^2+2S}{S^2+4S+104}$$

$$= \lim_{S\to\infty} \frac{1+\frac{2}{S}}{1+\frac{4}{S}+\frac{104}{S^2}}$$

$$\boxed{f(0) = 1}$$

Na equação (**), fazemos $S \to 0$, então:

$$\lim_{S\to 0}\left[S\,F(S) - f(0^-)\right] = \int_{0^-}^{\infty} \frac{df}{dt}\, e^{0t}\, dt = \int_{0^-}^{\infty} df = f(\infty) - f(0^-)$$

ou

$$\boxed{f(\infty) = \lim_{S \to 0} S\,F(S)}$$

Teorema do valor final

Obs: Ao aplicar esse teorema, é necessário saber que $f(\infty)$ existe, o limite de $f(t)$ com t tendendo a infinito, ou, o que quer dizer a mesma coisa, que todos os pólos de $F(S)$ estão localizados no semi plano esquerdo de S, exceto no caso (possível) de um pólo simples na origem.

O produto $S\,F(S)$ tem, portanto, todos os seus pólos localizados no semi plano esquerdo.

Exemplo: Determine os valores inicial e final da função cuja TL é:

$$H(S) = \frac{20}{(S+3)(S^2+8S+25)}$$

* Teorema do valor inicial:

$$h(0) = \lim_{S \to \infty} S\,H(S)$$

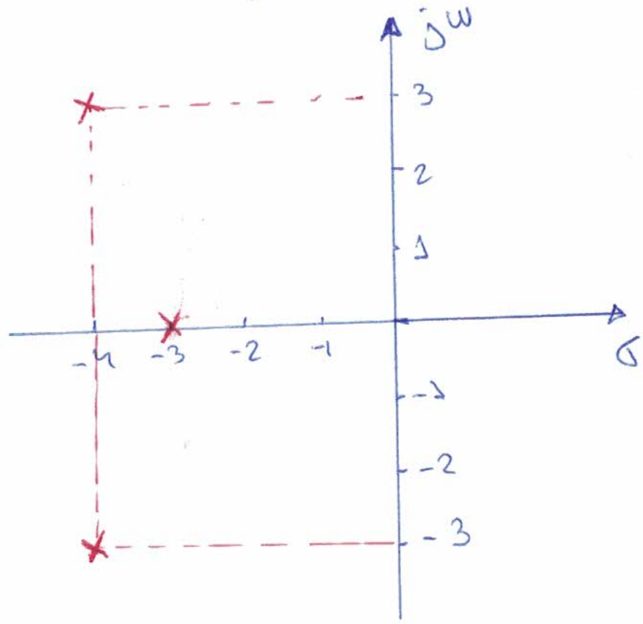
Verificar

$$h(0) = \lim_{s \to \infty} \frac{20/s}{(s+3)(s^2+8s+25)}$$

$$= \lim_{s \to \infty} \frac{20/s^2}{\left(1+\frac{3}{s}\right)\left(1+\frac{8}{s}+\frac{25}{s^2}\right)} = \frac{0}{(1+0)(1+0+0)}$$

$$\boxed{h(0) = 0}$$

Para certificar-se que o teorema do valor final é aplicável, verificamos onde os polos de $H(S)$ se localizam. Os polos de $H(S)$ são $s = -3$, $-4 \pm j3$, todos com partes reais negativas. Logo, o teorema do valor final se aplica, pois todos os polos se localizam na metade esquerda do plano S.



$$h(\infty) = \lim_{s \to 0} s\,H(s) = \lim_{s \to 0} \frac{20s}{(s+3)(s^2+8s+25)} = 0$$

$$\boxed{h(\infty) = 0}$$

Exercício: Obtenha os valores inicial e final de

$$G(s) = \frac{6s^3 + 2s + 5}{s(s+2)^2(s+3)}$$

Resp: 6; 0,4167

Exemplo: $f(t) = e^{-2t}\,\text{sen}\,5t\,u(t) \iff F(s) = \dfrac{5}{(s+2)^2 + 5^2}$

TVF

$$f(\infty) = \lim_{s \to 0} s\,F(s) = \lim_{s \to 0} \frac{5s}{s^2+4s+29} = 0$$

ok!

Exemplo: $f(t) = \text{sen}\,t\,u(t) \iff F(s) = \dfrac{1}{s^2+1}$

TVF

$$f(\infty) = \lim_{s \to 0} s\,F(s) = \lim_{s \to 0} \frac{s}{s^2+1} = 0$$

INCORRETO!

Pois $f(t) = \text{sen}\, t$ oscila entre $+1$ e -1 e não tem um limite, já que $t \to \infty$.

Portanto o TVF não pode ser usado para encontrar o valor final de $f(t) = \text{sen}\, t$, pois $F(S)$ tem polos em $S = \pm j$, que não se encontram na metade esquerda do plano S.

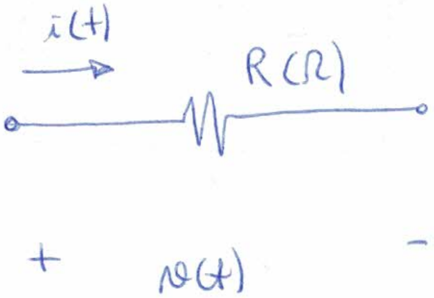
//

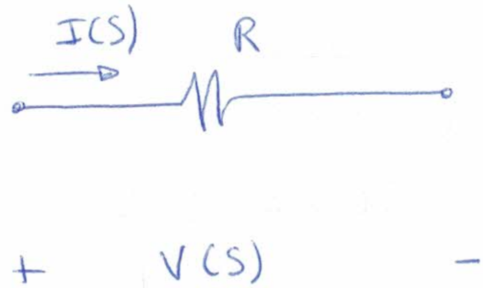
1º PROVA

Análise de circuitos no domínio S

* Com as TLs estamos aptos a lidar com funções mais gerais e obter a solução completa (as condições iniciais também são atendidas.

Resistores no Domínio S

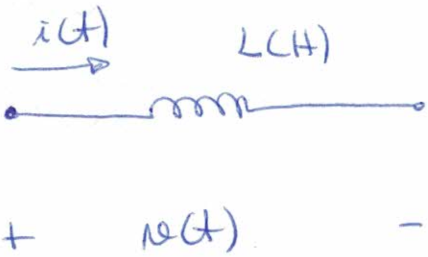


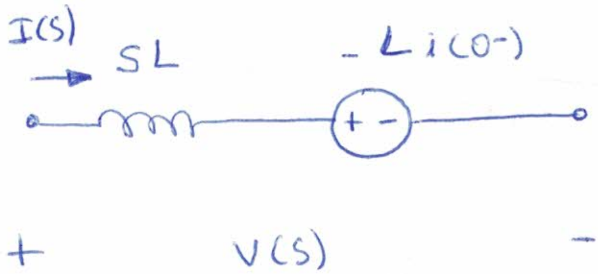


$v(t) = R \cdot i(t) \ (V)$

$V(S) = R \cdot I(S) \ (V)$

Indutores no domínio S



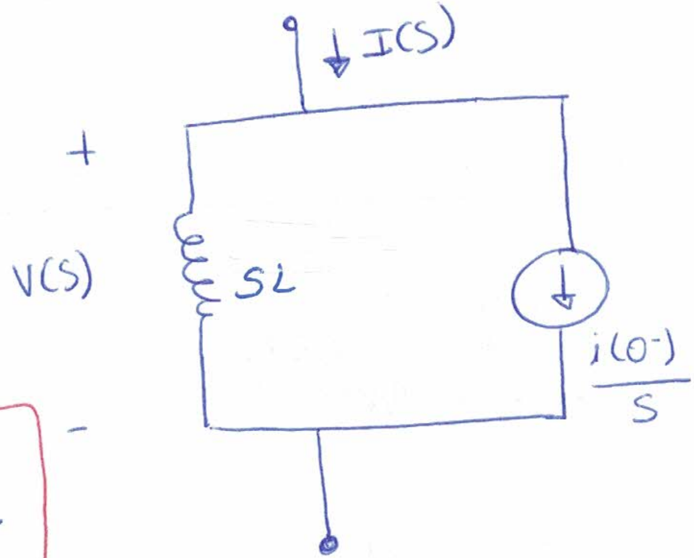


$$v(t) = L \frac{d\,i(t)}{dt}$$

$$\boxed{V(S) = L\left[S I(S) - i(0^-)\right]}$$

$$\boxed{V(S) = SLI(S) - L\,i(0^-) \ (V)}$$

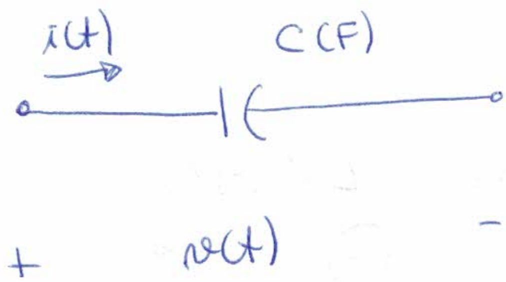
analise de malhas

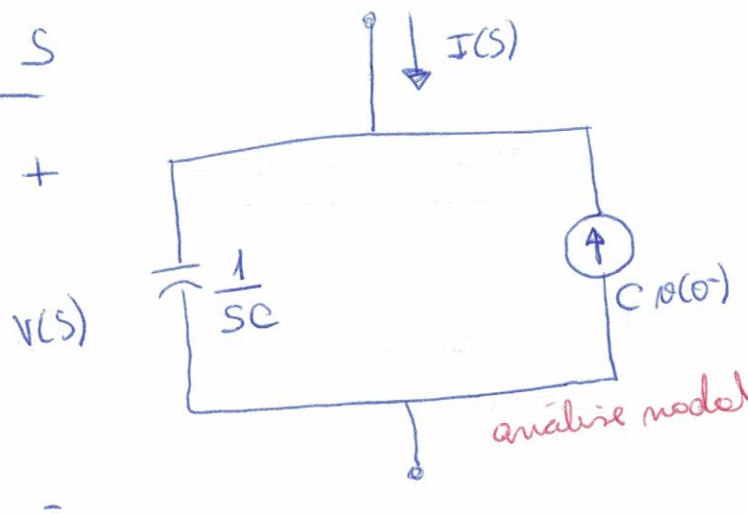


$$\boxed{I(S) = \frac{V(S)}{SL} + \frac{i(0^-)}{S}}$$

Análise nodal

Capacitores no domínio S





$$i(t) = C\frac{dv(t)}{dt}$$

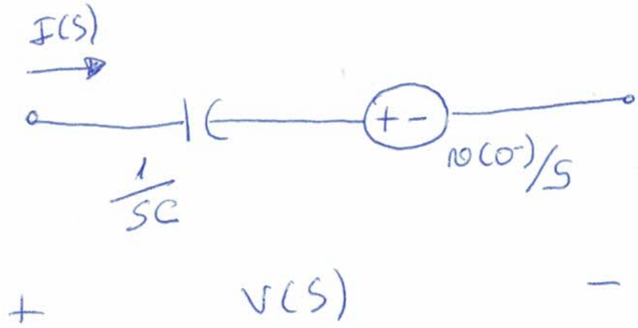
$$I(S) = C\left[S\,V(S) - v(0^-)\right]$$

$$\boxed{I(S) = SC \cdot V(S) - C\,v(0^-) \quad (V)}$$

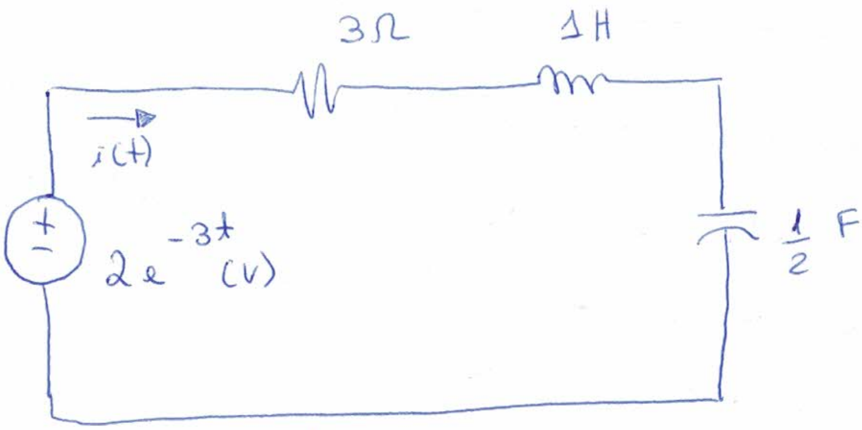
ou

$$\boxed{V(S) = \frac{I(S)}{SC} + \frac{v(0^-)}{S}}$$

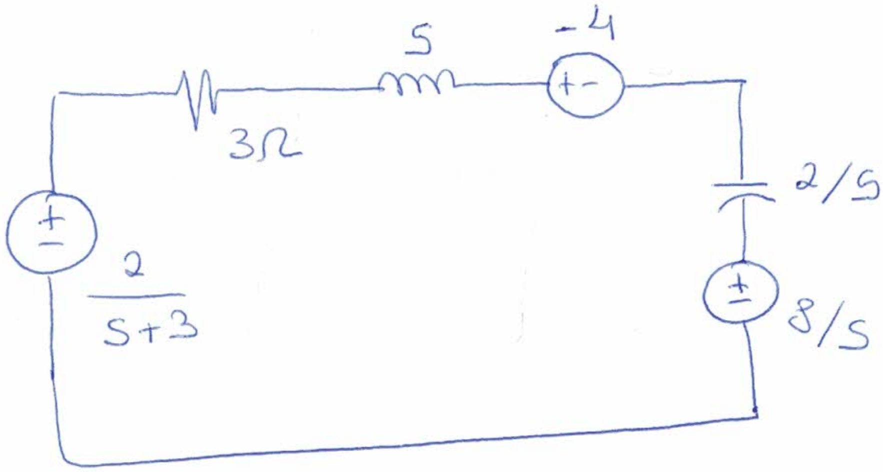
análise de malhas



Exemplo: Calcule $i(t)$, para $t \geq 0$, dado que $i(0) = 4$ (A) e $v(0) = 8$ (V).



dom. tempo



$$I(S) = \frac{\frac{2}{s+3} + 4 - \frac{8}{s}}{3 + s + \frac{2}{s}} = -\frac{13}{s+1} + \frac{20}{s+2} - \frac{3}{s+3}$$

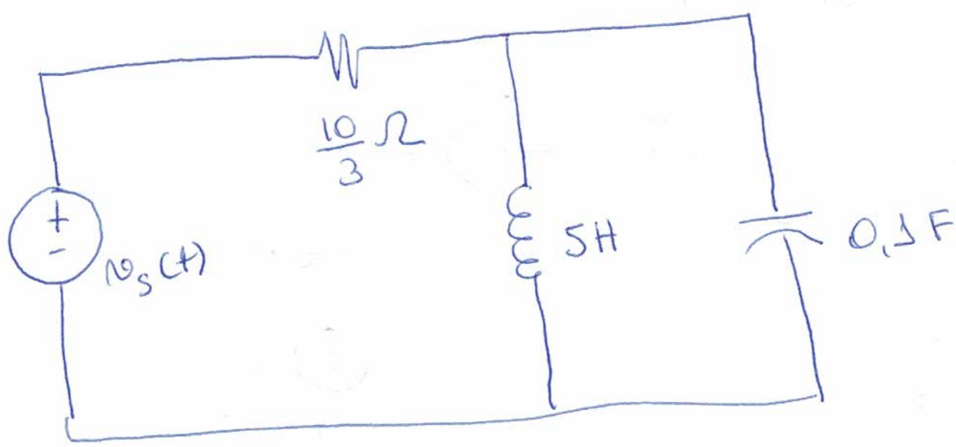
p/ $t \geq 0$

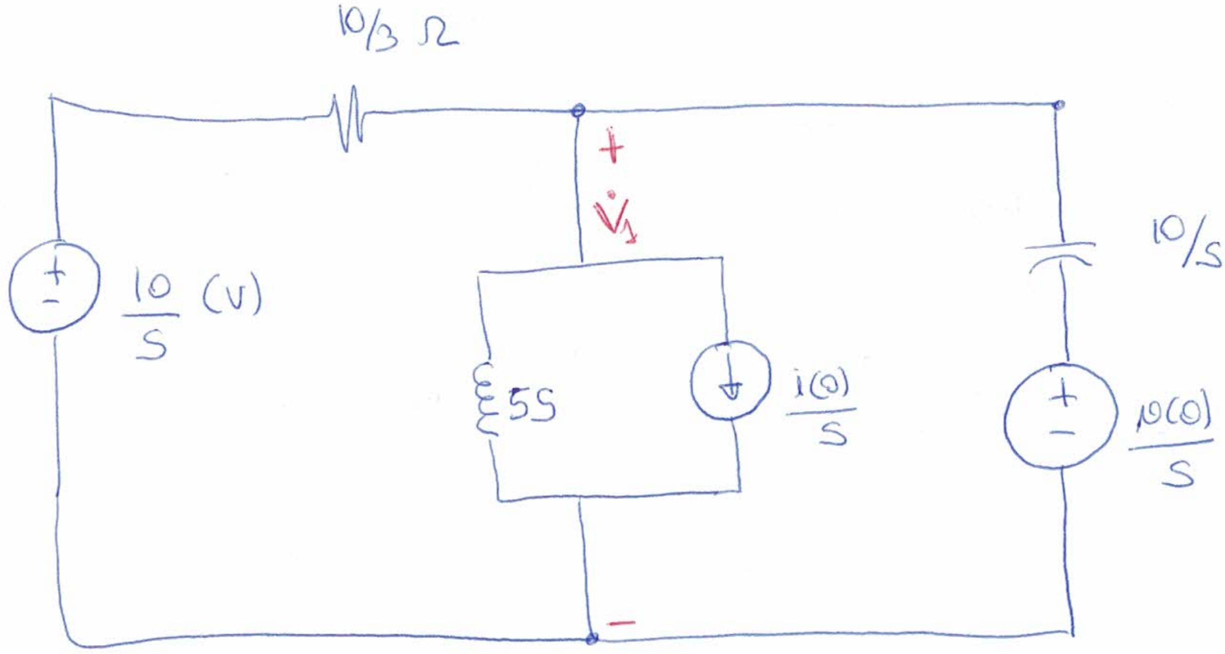
$$\boxed{i(t) = -13e^{-t} + 20e^{-2t} - 3e^{-3t} \ (A)}$$

Exercícios: 18.5.4 e 18.5.5
18.6.1 / 6.2 / 6.3 e 6.4

Exemplo 18.25 (Johnson, pp. 495 e 496)

Exemplo: Determine o valor da tensão no capacitor supondo o valor de $v_S(t) = 10\,u(t)$ (V) e que em $t=0$ flui uma corrente igual a -1 (A) através do indutor, e no capacitor tem uma tensão de $+5$ (V).





$$\frac{\dot{V}_1 - \frac{10}{s}}{10/3} + \frac{\dot{V}_1}{5s} + \frac{i(0)}{s} + \frac{\dot{V}_1 - v(0)/s}{1/0{,}1s} = 0$$

Onde $v(0) = 5(V)$ e $i(0) = -1(A)$.

⋮

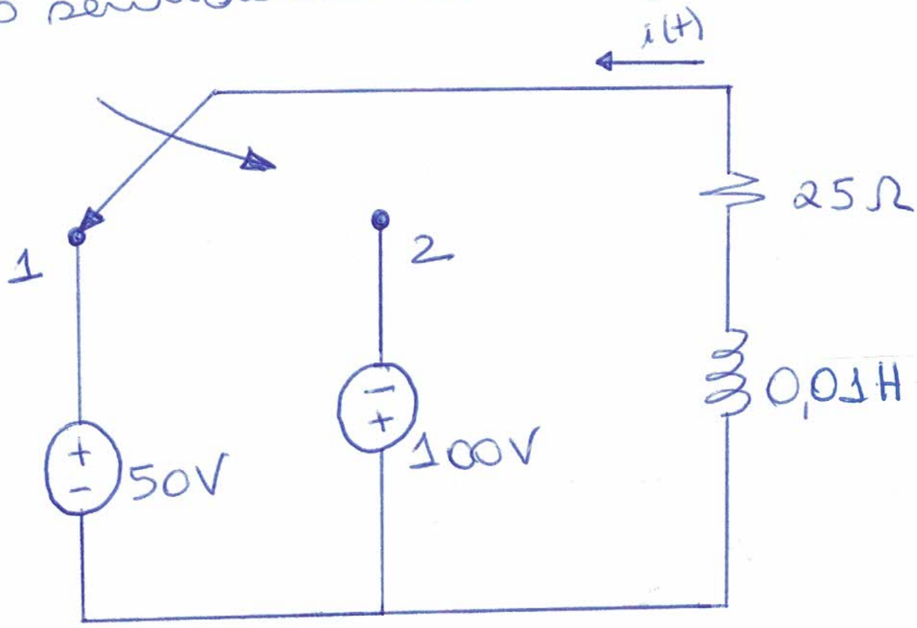
$$0{,}1\left(s + 3 + \frac{2}{s}\right)\dot{V}_1 = \frac{3}{s} + \frac{1}{s} + 0{,}5$$

$$(s^2 + 3s + 2)\dot{V}_1 = 40 + 5s$$

$$V_s = \frac{40+5s}{(s+1)(s+2)} = \frac{35}{s+1} - \frac{30}{s+2}$$

$$\boxed{v(t) = \left(35e^{-t} - 30e^{-2t}\right) u(t) \quad (V)}$$

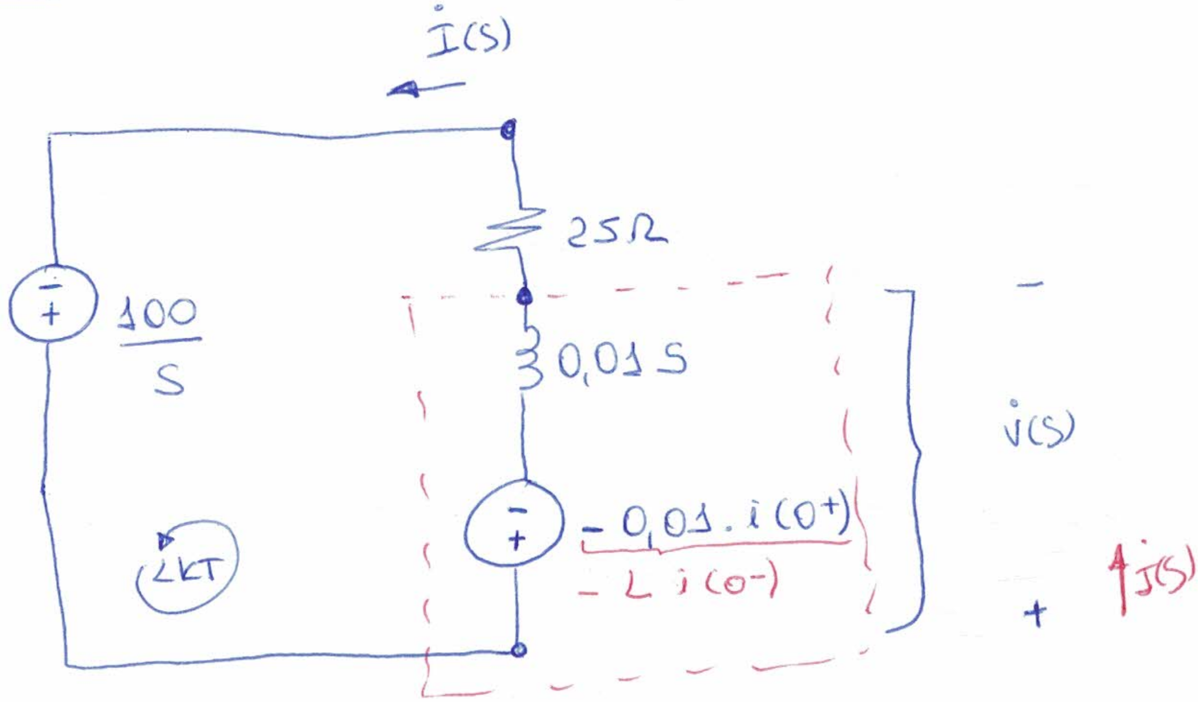
<u>Exemplo:</u> A chave do circuito RL é mantida na posição 1 durante tempo suficiente para que se estabeleçam as condições de regime permanente. Em $t=0$, a chave é deslocada para a posição 2, ficando nesta posição, para todo o restante da análise. Para esta última posição, determinar a corrente resultante $i(t)$ observando o sentido da corrente já estabelecido.



p/ $t < 0$

$$i(0^-) = i(0) = i(0^+) = -\frac{50}{25} = -2\,(A)$$

p/ $t \geq 0$



$$25\,\dot{I}(S) + 0{,}01\,S\,\dot{I}(S) + (-0{,}01 \cdot i(0^+)) = \frac{100}{S}$$

$$25\,\dot{I}(S) + 0{,}01\,S\,\dot{I}(S) + 0{,}01 \cdot 2 = \frac{100}{S}$$

$$\dot{I}(S) = \frac{100}{S(0{,}01S+25)} - \frac{0{,}02}{0{,}01S+25} = \frac{10^4}{s(S+2500)} - \frac{2}{S+2500}$$

* Desenvolvendo $\frac{10^4}{S(S+2500)}$ por frações parciais:

$$\frac{10^4}{s(s+2500)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+2500}$$

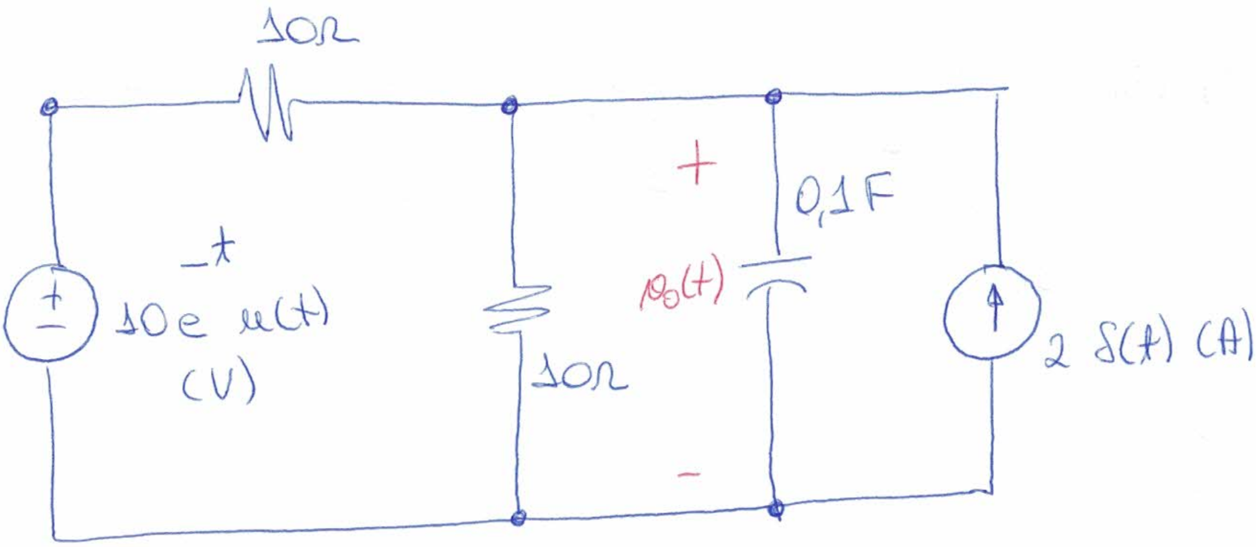
$$A = \left.\frac{10^4}{s+2500}\right|_{s=0} \therefore \boxed{A = 4}$$

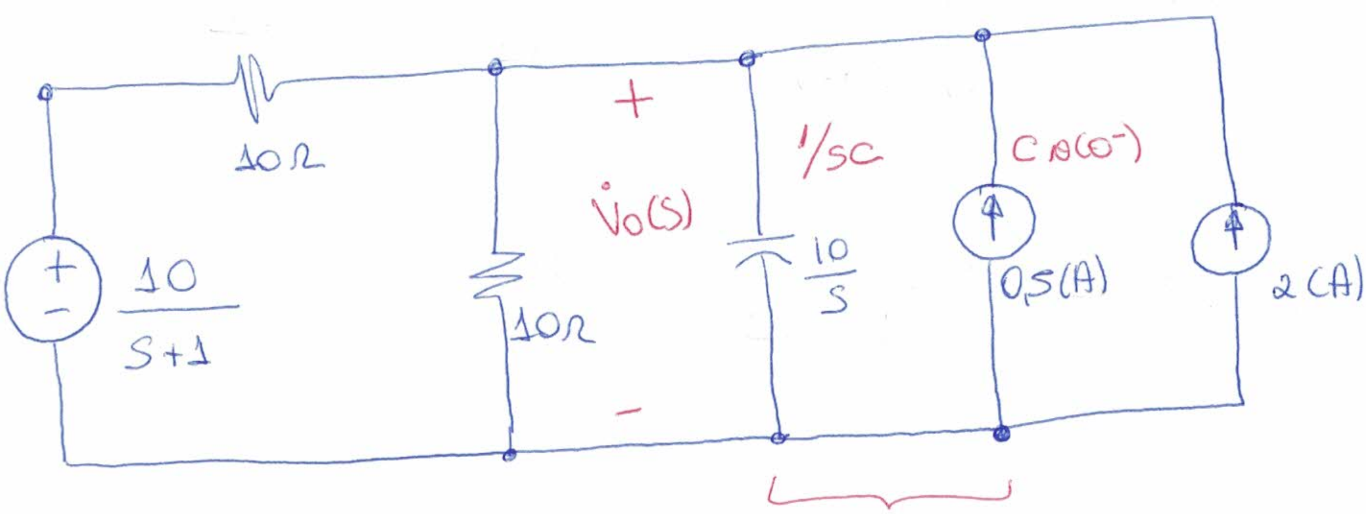
$$B = \left.\frac{10^4}{s}\right|_{s=-2500} \therefore \boxed{B = -4}$$

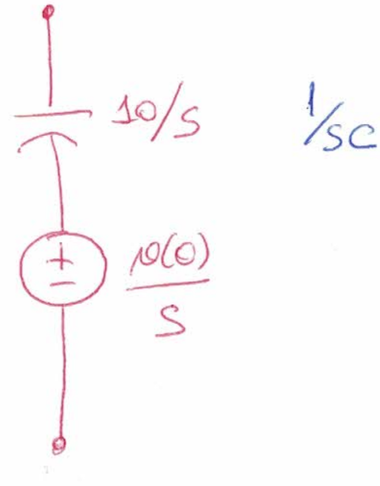
$$I(s) = \frac{4}{s} - \frac{4}{s+2500} - \frac{2}{s+2500} = \frac{4}{s} - \frac{6}{s+2500}$$

$$i(t) = \left[4 - 6e^{-2500t}\right]u(t) \ (A)$$

Exemplo: Utilizando a análise nodal, determine $v_o(t)$ supondo que $\boxed{v_o(0) = 5 (V)}$


10Ω
$10e^{-t}u(t)$
(V)
10Ω
+
$v_0(t)$
−
0,1F
2 δ(t) (A)


10Ω
$\frac{10}{s+1}$
10Ω
+
$V_0(s)$
−
1/sc
$\frac{10}{s}$
$Cv(0^-)$
0,5 (A)
2 (A)


10/s
1/sc
$\frac{v(0)}{s}$

$C v_0(0) = 0{,}1(5) = 0{,}5\ (A)$

* LKC

$$\frac{\dfrac{\dot{V}_o(S) - \dfrac{10}{S+1}}{10}} + \frac{\dot{V}_o(S)}{10} + \frac{\dot{V}_o(S)}{10/S} - 0,5 - 2 = 0$$

⋮

$$\dot{V}_o(S) = \frac{25S + 35}{(S+1)(S+2)} = \frac{A}{S+1} + \frac{B}{S+2}$$

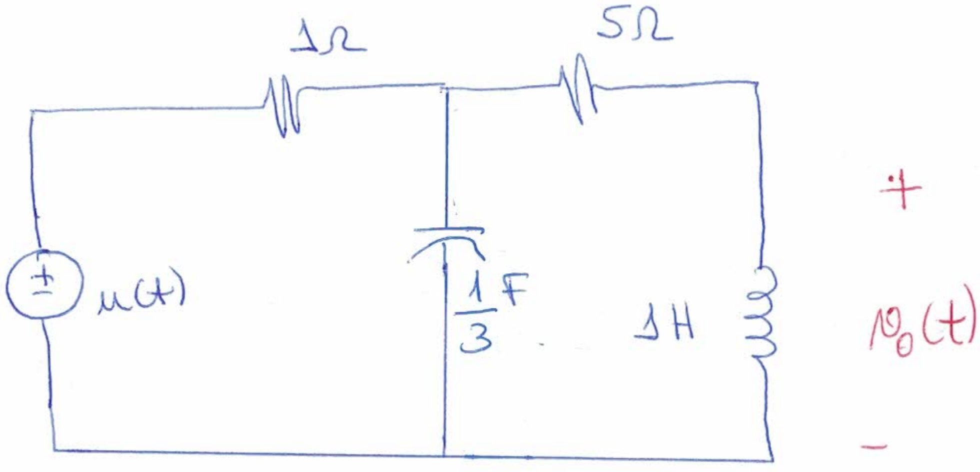
$$A = (S+1)\dot{V}_o(S)\Big|_{S=-1} \quad \therefore \boxed{A = 10}$$

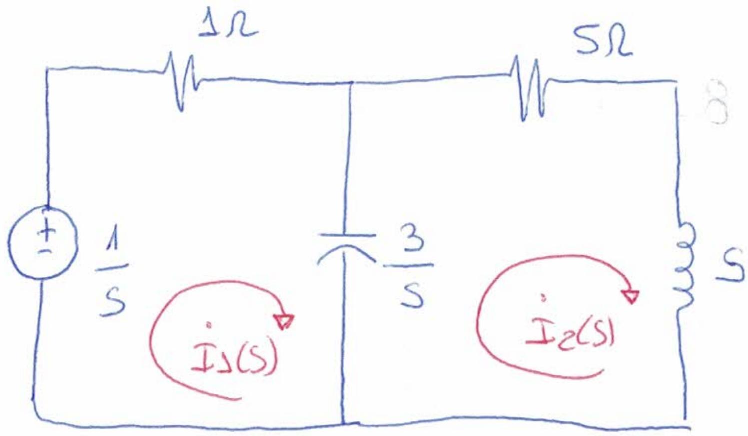
$$B = (S+2)\dot{V}_o(S)\Big|_{S=-2} \quad \therefore \boxed{B = 15}$$

$$\dot{V}_o(S) = \frac{10}{S+1} + \frac{15}{S+2}$$

$$\boxed{v_o(t) = (10e^{-t} + 15e^{-2t})\,u(t) \quad (V)}$$

Exemplo: Usando a TL, determine $v_0(t)$, supondo as condições iniciais nulas.





$+$

$\dot{V}_0(s) = s\,\dot{I}_2(s)$

$-$

LKT à M1: $\frac{1}{s} = \left(1 + \frac{3}{s}\right)\dot{I}_1 - \frac{3}{s}\dot{I}_2 \qquad (1)$

LKT à M2: $0 = -\frac{3}{s}\dot{I}_1 + \left(s + \frac{3}{s} + 5\right)\dot{I}_2 \qquad (2)$

ou

$$\dot{I}_1(s) = \frac{1}{3}\left(s^2 + 5s + 3\right)\dot{I}_2 \qquad (3)$$

* Substituindo (3) → (1)

$$\frac{1}{S} = \left(1+\frac{3}{S}\right)\frac{1}{3}(S^2+5S+3)I_2 - \frac{3}{S} I_2$$

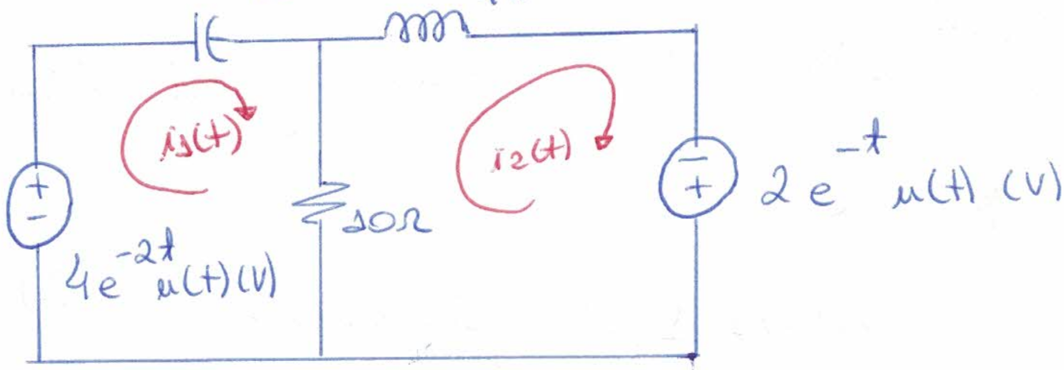
* Multiplicando por 3S:

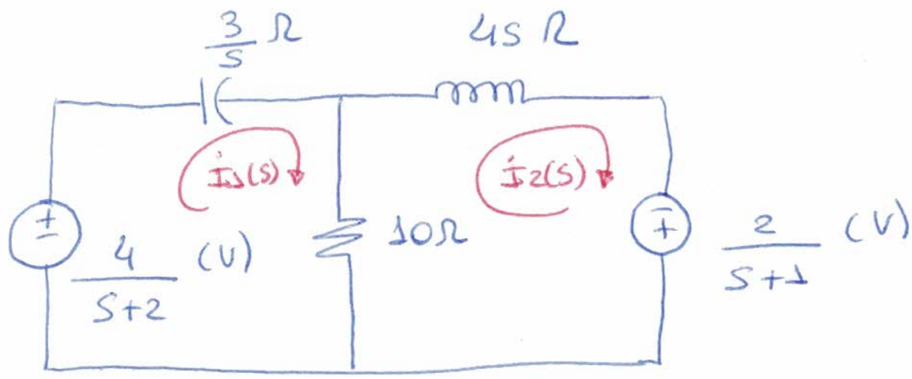
$$3 = (S^3+8S^2+18S)I_2 \quad \therefore \quad \boxed{I_2 = \frac{3}{S^3+8S^2+18S}}$$

$$V_0(S) = S I_2 = \frac{3}{S^2+8S+18} = \frac{3}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{(S+4)^2+(\sqrt{2})^2}$$

$$\boxed{v_0(t) = \frac{3}{\sqrt{2}} e^{-4t} \cdot \operatorname{sen} \sqrt{2}\,t \quad (V)} \quad p/ \ t \geq 0$$

<u>Exemplo:</u> Determine as duas correntes de malhas $i_1(t)$ e $i_2(t)$. Não há energia inicial armazenada no circuito.





LKT à M1

$$-\frac{4}{s+2}+\frac{3}{s}I_1+10(I_1-I_2)=0$$

ou

$$\left(\frac{3}{s}+10\right)I_1-10I_2=\frac{4}{s+2} \qquad (1)$$

LKT à M2

$$-\frac{2}{s+1}+10I_2-10I_1+4sI_2=0$$

ou

$$-10I_1+(4s+10)I_2=\frac{2}{s+1} \qquad (2)$$

Resolvendo p/ I_1 e I_2:

$$I_1=\frac{2s(4s^2+19s+20)}{(20s^4+66s^3+73s^2+57s+30)} \quad (A)$$

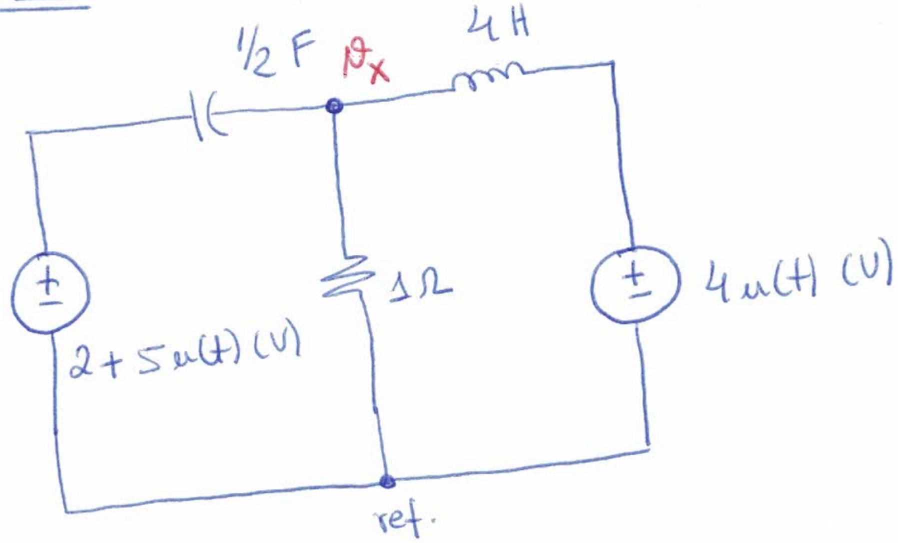
$$I_2=\frac{30s^2+43s+6}{(s+2)(20s^3+26s^2+21s+15)} \quad (A)$$

⋮

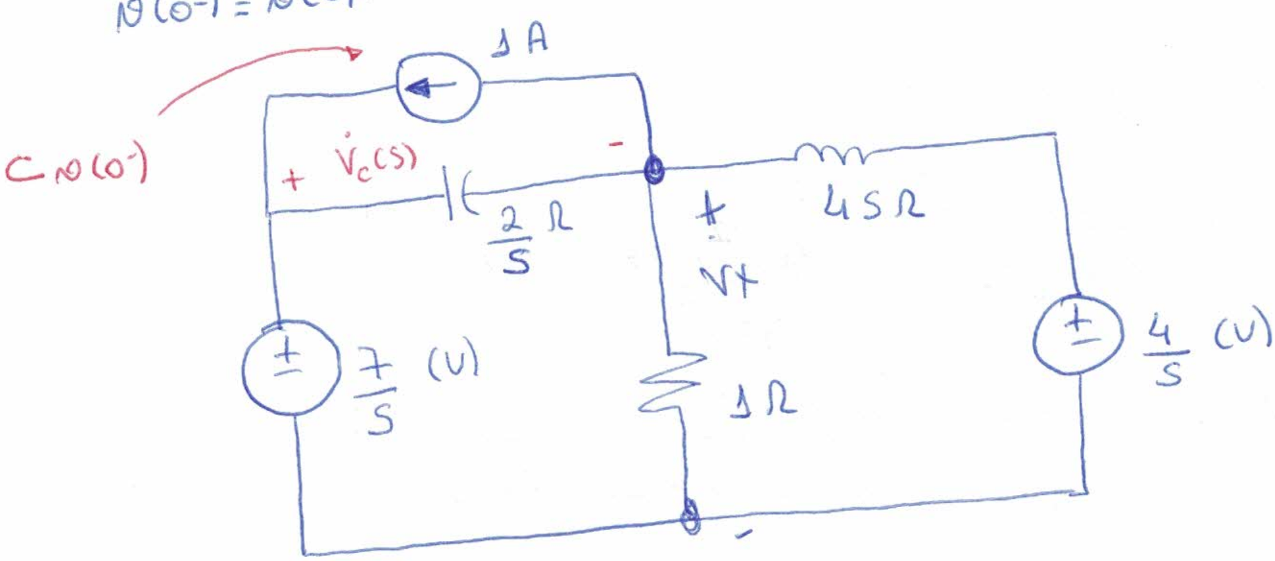
$$i_1(t) = -96{,}39\,e^{-2t} - 344{,}8\,e^{-t} + 841{,}2\,e^{-0{,}15t}\cos 0{,}8529t$$
$$+\,197{,}7\,e^{-0{,}15t}\,\text{sen}\,0{,}8529t \quad (mA)$$

$$i_2(t) = -481{,}9\,e^{-2t} - 241{,}4\,e^{-t} + 723{,}3\,e^{-0{,}15t}\cos 0{,}8529t$$
$$+\,472{,}8\,e^{-0{,}15t}\,\text{sen}\,0{,}8529t \quad (mA) \quad \boxed{p/\ t \geq 0}$$

<u>Exemplo:</u> Calcule a tensão v_x usando a análise nodal.



$v(0^-) = v(0) = v(0^+) = 2\ (V)$ $\qquad i(0^-) = i(0) = i(0^+) = 0\ (A)$



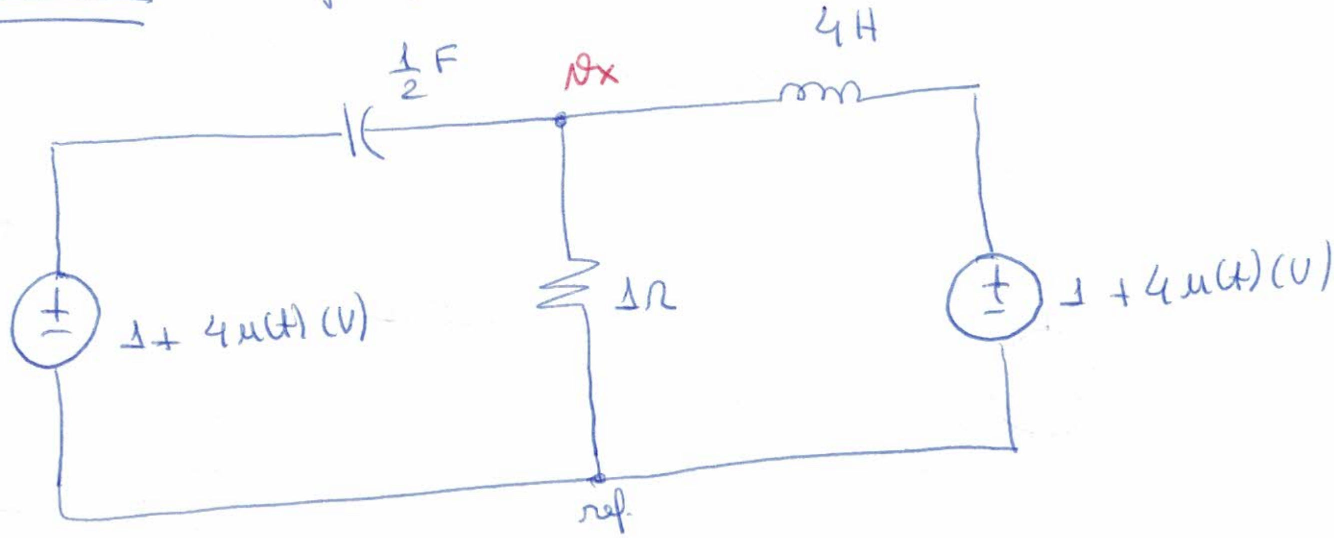
$$\frac{\dot{V}_x - \frac{7}{s}}{2/s} + \dot{V}_x + \frac{\dot{V}_x - \frac{4}{s}}{4s} = -1$$

$$\dot{V}_x = \frac{10s^2+4}{s(2s^2+4s+1)} = \frac{5s^2+2}{s\left(s+1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(s+1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}$$

$\vdots$

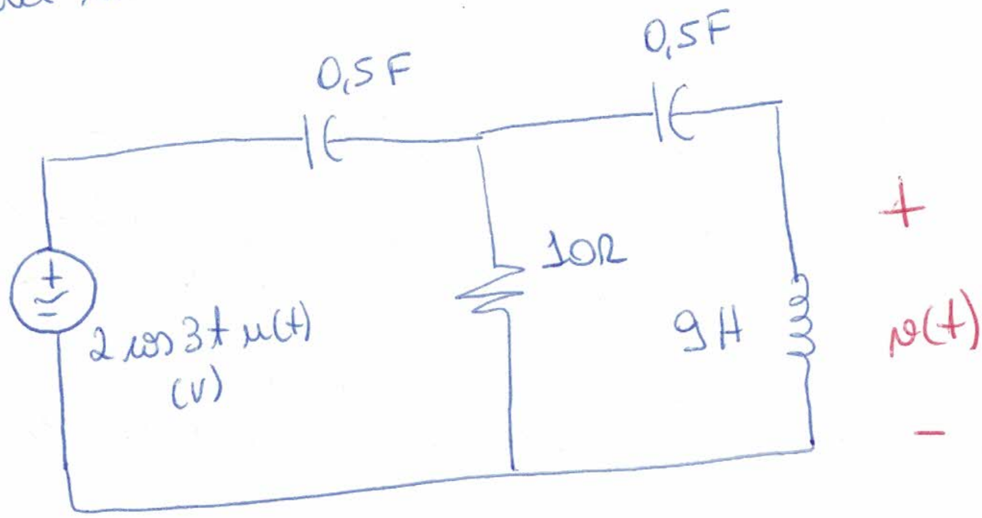
$$v(t) = \left[4 + 6{,}864\, e^{-1{,}707t} - 5{,}864\, e^{-0{,}2929t}\right] u(t) \ (V)$$

<u>Exercício</u>: Empregue a análise nodal para calcular $v_x(t)$.

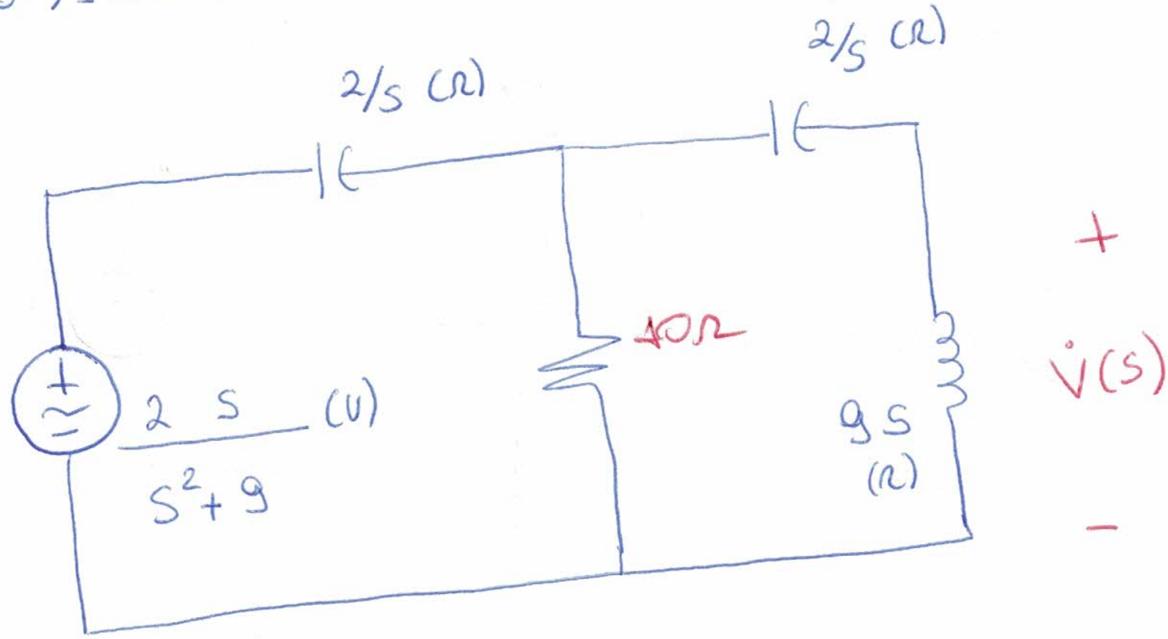


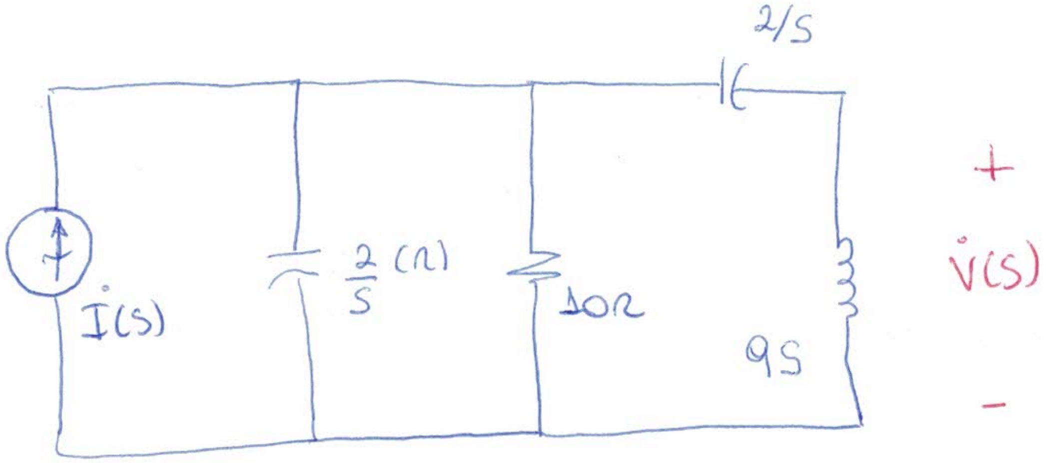
Resp.: $\left[5 + 5{,}657\left(e^{-1{,}707t} - e^{-0{,}2929t}\right)\right] u(t)$ (V)

Exemplo: Simplifique o circuito apresentado usando a transformação de fontes e determine uma expressão para $v(t)$.



$v(0^-) = v(0) = v(0^+) = 0$ e $i(0^-) = i(0) = i(0^+) = 0$ (A)

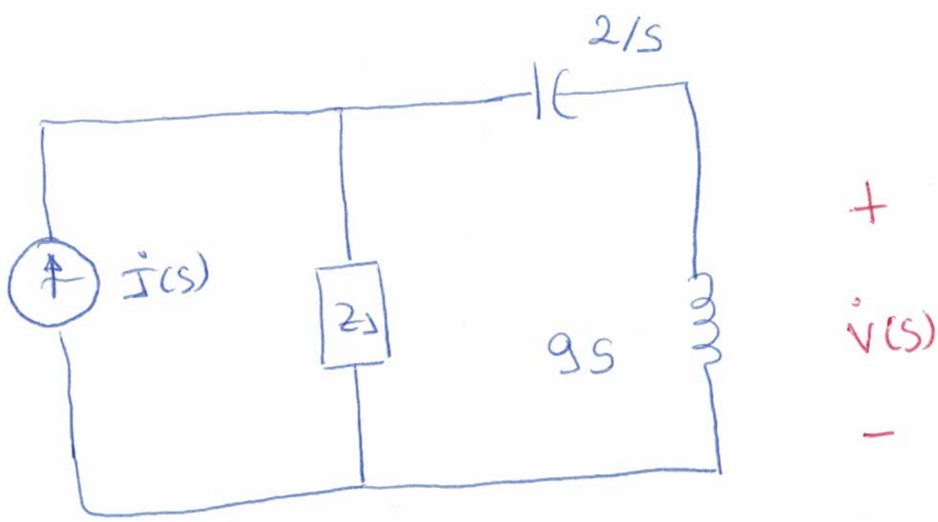




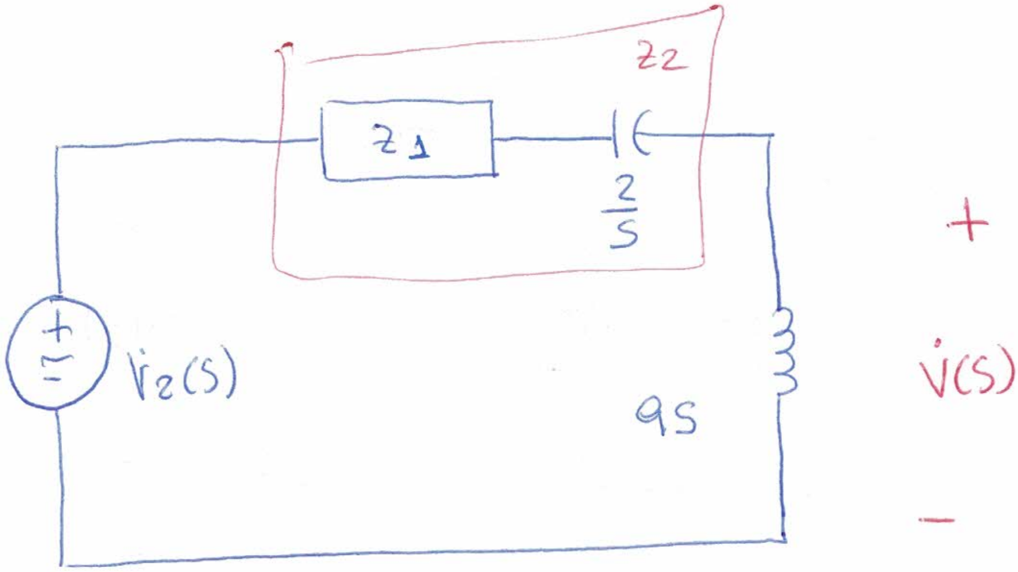
$$\dot{I}(s) = \frac{2s}{s^2+9} \cdot \frac{s}{2}$$

$$\boxed{\dot{I}(s) = \frac{s^2}{s^2+9} \quad (A)}$$

$$Z_1 = 2/s \parallel 10 \qquad Z_1 = \frac{20}{10s+2} \quad (\Omega)$$

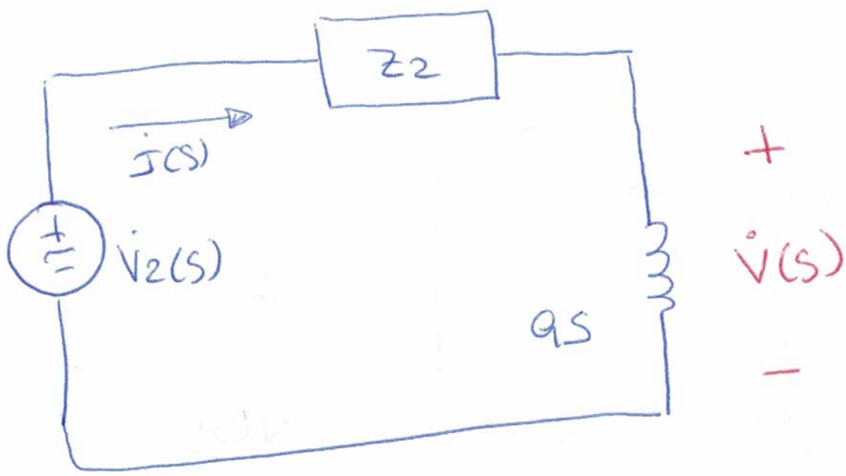


$$\dot{V}_2(s) = Z_1 \cdot \dot{I}(s) = \left(\frac{20}{10s+2}\right) \cdot \left(\frac{s^2}{s^2+9}\right)$$



$$Z_2 = \frac{20}{10s+2} + \frac{2}{s}$$

$$\boxed{Z_2 = \frac{40s+4}{s(10s+2)} \quad (\Omega)}$$



$$\dot V(s) = 9s \cdot \dot I(s) = 9s \cdot \frac{\dot V_2(s)}{Z_2 + 9s}$$

$$\vdots$$

$$\dot V(s) = \frac{180\, s^4}{(s^2+9)(90s^3+18s^2+40s+4)}$$

Calculando a transformada inversa de cada termo, escrevendo $1,047 + j0,0716$ como $1,049\,e^{j3,912°}$ e $0,0471 + j0,0,0191$ como $0,05083\,e^{j157,9°}$, obtemos:

$$e^{\overbrace{(-\sigma+j\omega)}^{s}t} = e^{-\sigma t} \cdot e^{j\omega t}$$

$$v(t) = 1,049\,e^{j3,912°} \cdot e^{j3t}\,u(t) + 1,049\,e^{-j3,912°}\,e^{-j3t}\,u(t)$$

$$+ 0,05083\,e^{j157,9°} \cdot e^{-0,04885t} \cdot e^{+j0,6573t}\,u(t)$$

$$+ 0,05083\,e^{j157,9}\,e^{-0,04885t} \cdot e^{-j0,6573t}\,u(t)$$

$$+ 5,590 \cdot 10^{-5}\,e^{-0,1023t}\,u(t)$$

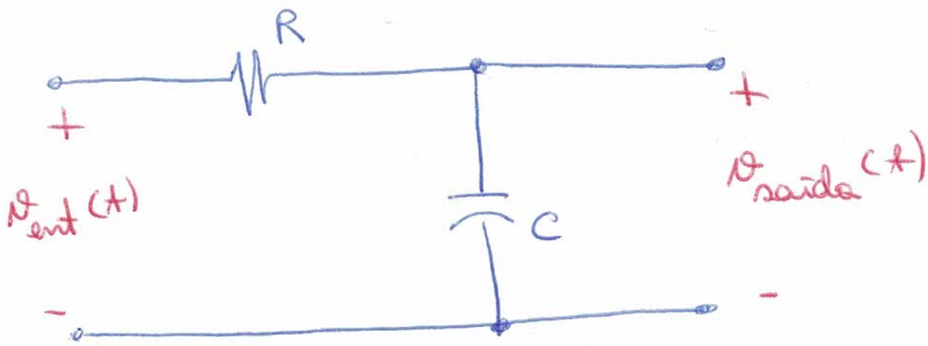
⋮

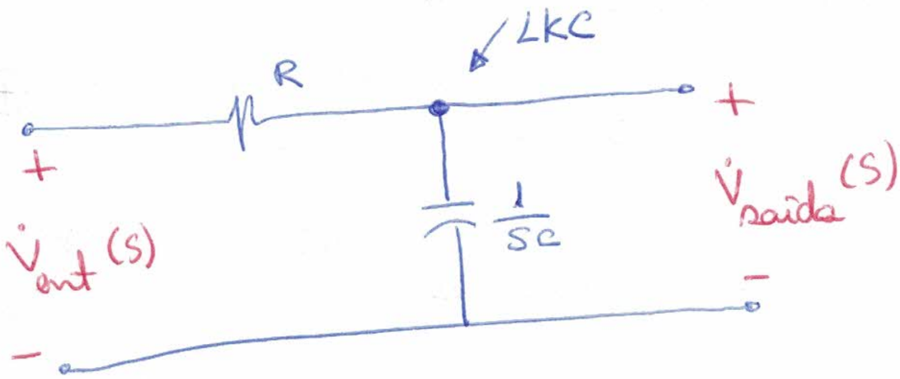
A conversão das exponenciais complexas em senóides permite obter uma expressão um pouco mais simples.

$$v(t) = \left[5,590 \cdot 10^{-5}\,e^{-0,1023t} + 2,098\cos(3t + 3,912°) + 0,1017\,e^{-0,04885t}\cos(0,6573t + 157,9°)\right]u(t)$$

PÓLOS, ZEROS E FUNÇÕES DE TRANSFERÊNCIA

Exemplo:





* a entrada e a sai
dos são medidos
em terminais di
ferentes

Análise nodal

$$\frac{\dot{V}_{saída}}{1/sC} + \frac{\dot{V}_{saída} - \dot{V}_{ent}}{R} = 0$$

$$\dot{V}_{saída} = \frac{\dot{V}_{ent}}{1 + SRC} \quad \text{ou}$$

$$H(S) = \frac{\dot{V}_{saída}}{\dot{V}_{ent}} = \frac{1}{1 + SRC}$$

$H(S) \rightarrow$ função de transferência

* Uma vez que conhecemos $H(S)$ de um circuito específico, podemos facilmente encontrar a saída que resulta de qualquer entrada.

$$\dot{V}_{saída} = H(S) \cdot \dot{V}_{ent}$$

qualquer entrada

$\rightarrow$ não muda!

* $H(S)$ contem muitas informações sobre o comportamento que poderemos esperar de um dado circuito (ou sistema).

Podemos escrever a $H(S)$ do exemplo como:

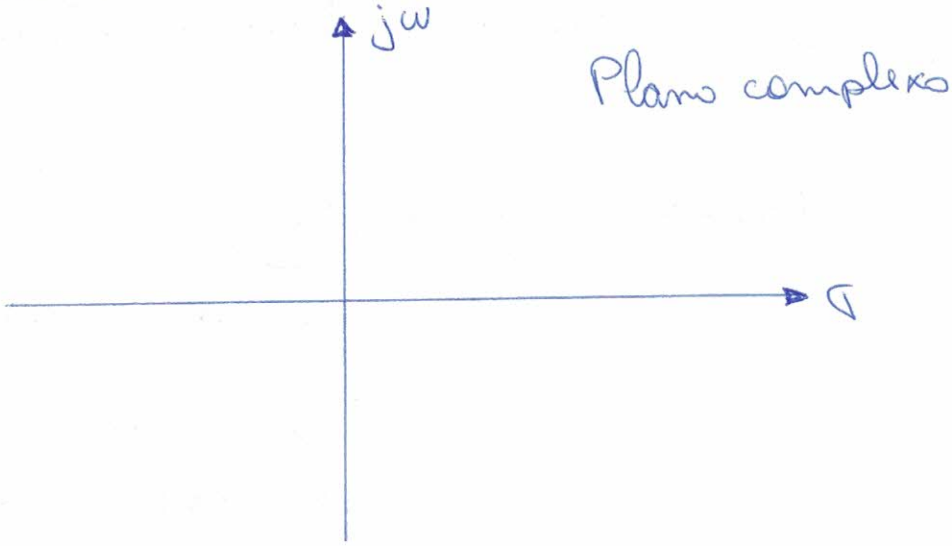
$$H(S) = \frac{1/RC}{S + \frac{1}{RC}}$$

* O módulo dessa função tende a zero qdo $S \rightarrow \infty$. Logo, $H(S)$ tem um zero em $S = \infty$.

* A função se aproxima do infinito em $S = -\frac{1}{RC}$.

Logo, H(S) tem um pólo em $S = -\frac{1}{RC}$.

* Essas frequências são chamadas de frequências críticas, e sua identificação simplificará a construção das curvas de resposta.

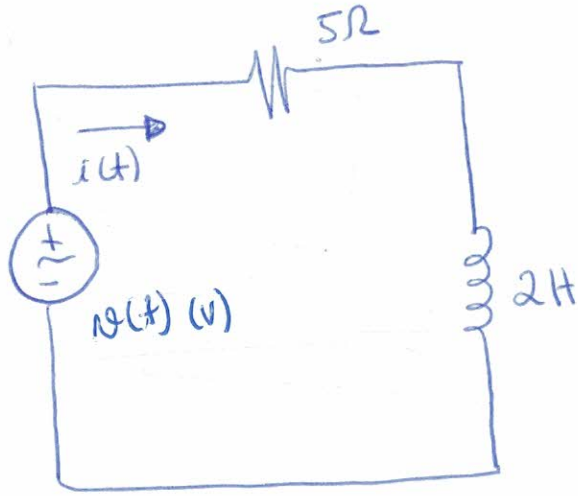


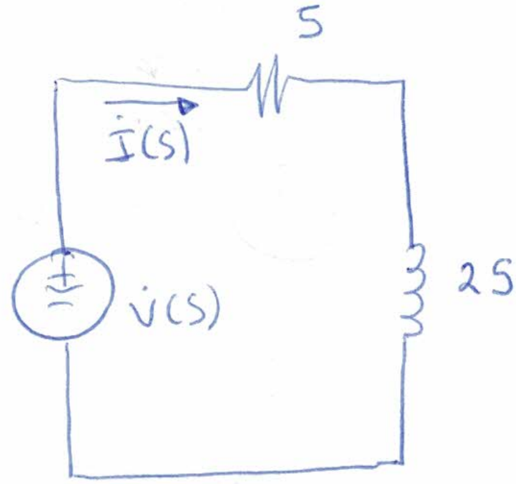
* Se a entrada e a saída são medidas no mesmo par de terminais → Função de rede!

$$H(S) = \frac{\dot{V}(S)}{\dot{I}(S)} = Z(S)\ (\Omega)$$

$$H(S) = \frac{\dot{I}(S)}{\dot{V}(S)} = Y(S)\ (\mho)$$

Exemplo: $H(S) = ?$ p/ $t \geq 0$



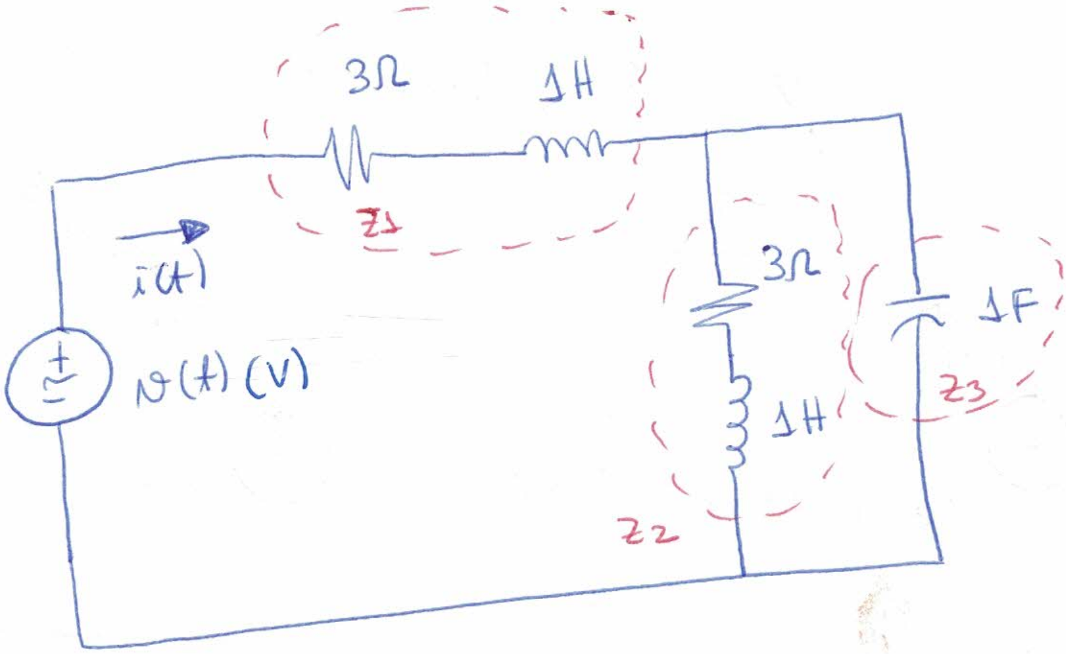


$$2S \cdot \dot{I}(S) + 5 \cdot \dot{I}(S) = \dot{V}(S)$$

$$H(S) = \frac{\dot{I}(S)}{\dot{V}(S)} \rightarrow \frac{\text{resposta}}{\text{excitação}}$$

$$\boxed{H(S) = \frac{1}{2S+5} \quad (\mho)} \quad \therefore \quad \boxed{\dot{I}(S) = H(S) \cdot \dot{V}(S)}$$

Exemplo: $H(S) = ?$ se a resposta é $\dot{I}(S)$! Não há energia inicial armazenada no circuito.



$$H(S) = \frac{I(S)}{V(S)} \quad \therefore \quad H(S) = \frac{1}{Z(S)} \quad (\mho)$$

$$Z(S) = ?$$

$$Z_1(S) = 3 + S \ (\Omega)$$

$$Z_2(S) = 3 + S \ (\Omega)$$

$$Z_3(S) = \frac{1}{S} \ (\Omega)$$

$$Z(S) = Z_1 + (Z_2 \parallel Z_3)$$

$$Z(S) = 3 + S + \frac{(3+S)\cdot\frac{1}{S}}{3 + S + \frac{1}{S}}$$

$$Z(S) = \frac{S^3 + 6S^2 + 11S + 6}{S^2 + 3S + 1}$$

$$Z(S) = \frac{(S+1).(S+2).(S+3)}{S^2 + 3S + 1}$$

$$H(S) = Y(S) = \frac{1}{Z(S)} \qquad H(S) = \frac{S^2 + 3S + 1}{(S+1)(S+2)(S+3)}$$

$$\boxed{\dot{I}(S) = H(S).\dot{V}(S)}$$

CONVOLUÇÃO

* Precisamos encontrar/determinar a saída em cada instante de tempo a partir de circuitos conectados a fontes arbitrárias.

* Caracterizar o circuito por meio de uma função de transferência chamada de função de sistema.

* Essa função de sistema é a TL da resposta ao impulso unitário do circuito.

~~Passos:~~

~~1) determine a função de sistema do circuito;~~

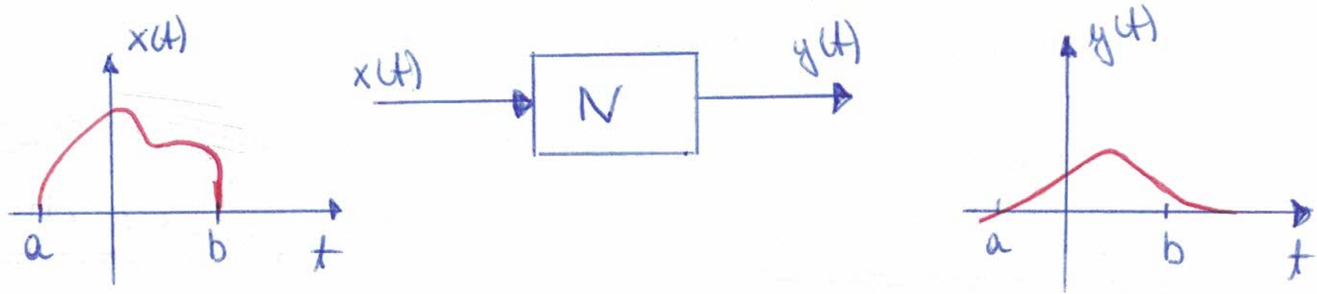
~~2) obtenha a TL da função de excitação (forçante) a ser aplicada;~~

~~3) multiplique essa transformada e a função de sistema; e~~

~~4) realize uma operação de transformada inversa no produto para obter a saída.~~

Desenvolvimento conceitual da integral de convolução

a)



N → rede elétrica linear ∴ $w_0 = 0$ (J)

x(t) → entrada/excitação → $a < t < b$

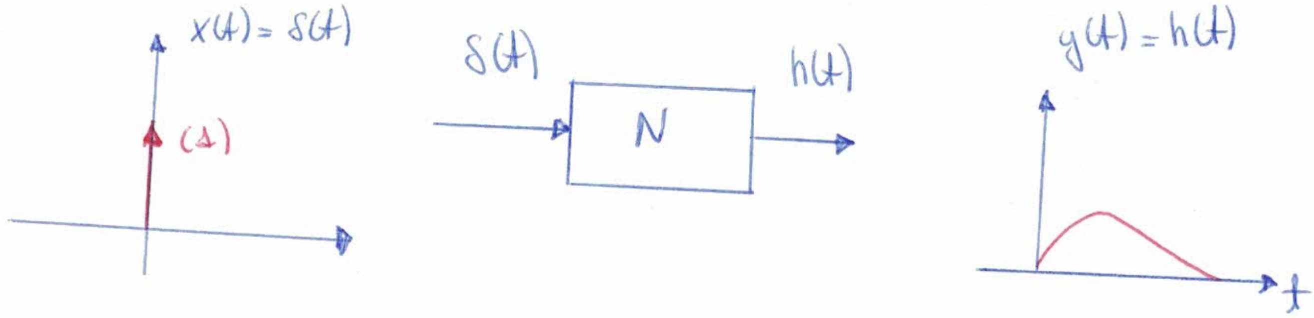
y(t) → resposta → existe p/ $t > a$

Se soubermos a forma de x(t), como y(t) poderá ser descrito?

* Precisamos saber algo sobre N!

→ a sua resposta qdo a função de excitação é um impulso unitário $\delta(t) \Rightarrow h(t)$

b)



* A função $h(t)$ é comumente chamada de função resposta ao impulso unitário, ou resposta ao impulso.

* Pela TL: $x(t) \Longleftrightarrow X(S)$

$y(t) \Longleftrightarrow Y(S)$

$$H(S) = \frac{Y(S)}{X(S)}$$

* Se $x(t) = \delta(t) \therefore X(S) = 1$, logo: $\boxed{H(S) = Y(S)}$ e nesse caso $h(t) = y(t)$.

c) ao invés de $t = 0$, $t = \lambda$ (lâmbda)

$$\delta(t-\lambda) \longrightarrow \boxed{\;N\;} \longrightarrow h(t-\lambda)$$

d) quando $t = \lambda$ façamos a amplitude do impulso ser numericamente igual ao valor de $x(t)$! Este valor $x(\lambda)$ é uma constante!

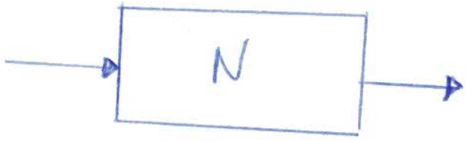
$$x(\lambda)\,\delta(t-\lambda) \longrightarrow \boxed{\;N\;} \longrightarrow x(\lambda)\,h(t-\lambda)$$

e) Vamos agora somar essa última entrada ao longo de todos os valores possíveis de λ e usar o resultado como uma função de excitação p/ N.

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(\lambda)\,\delta(t-\lambda)\,d\lambda \longrightarrow \boxed{\;N\;} \longrightarrow \int_{-\infty}^{\infty} x(\lambda)\,h(t-\lambda)\,d\lambda$$

* a integral da entrada produz a integral da saída

f) Mas qual é a entrada agora?



$x(t)$ $\qquad$ $\int_{-\infty}^{\infty} x(\lambda)\, h(t-\lambda)\, d\lambda = y(t)$

obs: $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,\delta(t-t_0)\,dt = f(t_0)$ já que a função

$\delta(t-t_0)$ é nula em todos os pontos exceto em $t=t_0$!

A integral de convolução

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\lambda)\, h(t-\lambda)\, d\lambda$$ a partir da figura f!

Sendo $h(t)$ a resposta ao impulso de N!

* A saída é igual a convolução da entrada com a resposta ao impulso.

$$y(t) = x(t) * h(t)$$

↳ convolução

Se fizermos $z = t - \lambda$, então $d\lambda = -dz$:

$$y(t) = \int_{+\infty}^{-\infty} -x(t-z)\,h(z)\,dz = \int_{-\infty}^{\infty} x(t-z)h(z)\,dz$$

E como o símbolo que usamos para a variável de integração não é importante:

$$\boxed{y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(z)\,h(t-z)\,dz = \int_{-\infty}^{\infty} x(t-z)\,h(z)\,dz}$$

Convolução e sistemas práticos (realizáveis)

* aqueles que existem ou podem existir!
* A resposta do sistema não pode começar antes que a função de excitação seja aplicada!
* $h(t)$ resulta da aplicação de um pulso unitário em $t=0$. Portanto, $h(t)$ não pode existir em $t<0$.

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t-z)\,h(z)\,dz = 0 \quad \text{qdo } z < 0$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(z)\,h(t-z)\,dz = 0 \quad \text{qdo } (t-z) \text{ é negativo ou qdo } z > t$$

Portanto, os limites de integração presentes nas integrais de convolução são alterados em sistemas realizáveis.

$$\boxed{\begin{aligned} y(t) = x(t) * h(t) &= \int_{-\infty}^{t} x(\tau)\, h(t-\tau)\, d\tau \\ &= \int_{0}^{\infty} x(t-\tau)\, h(\tau)\, d\tau \end{aligned}}$$

Método gráfico da convolução

Exemplos: entendimento sobre como avaliar a integral de convolução, especialmente com relação aos valores usados como limites de integração.

Exemplo 01: Suponha que a entrada seja um pulso de tensão retangular que começa em $t = 0$, dura 1 s e tem amplitude de 1 (V):

$$x(t) = v_i(t) = u(t) - u(t-1)$$

Também suponha que esse pulso de tensão seja aplicado em um circuito cuja resposta ao impulso é dada por uma função exponencial como:

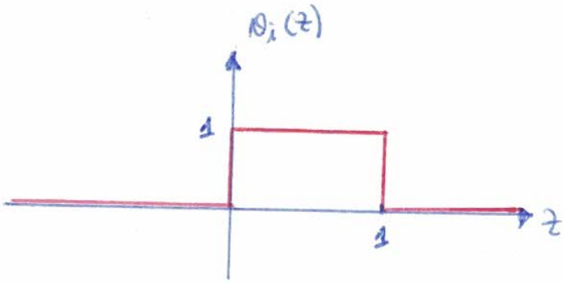
$$h(t) = 2\,e^{-t}\,u(t)$$

Desejamos avaliar a tensão de saída $v_0(t)$:

$$y(t) = v_0(t) = v_i(t) * h(t) = \int_0^{\infty} v_i(t-z)\,h(z)\,dz$$

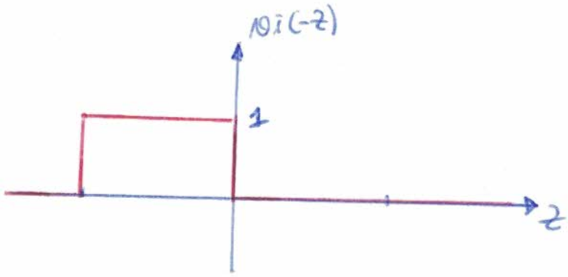
$$= \int_0^{\infty} \left[u(t-z) - u(t-z-1)\right] 2\,e^{-z}\,u(z)\,dz$$

a)



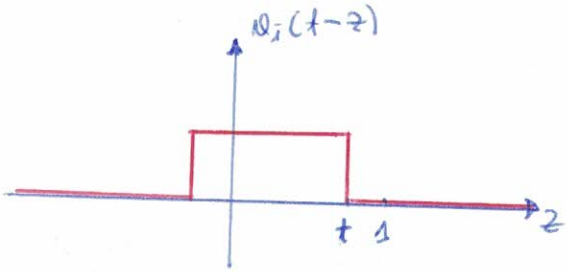
* conhecemos a forma de $v_i(t)$, e por isso conhecemos $v_i(z)$.

b)



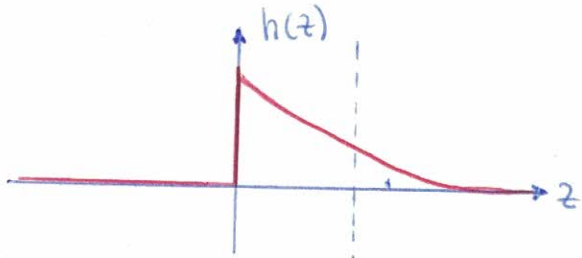
* $v_i(-z)$ é $v_i(z)$ espelhada em relação a z.

c)



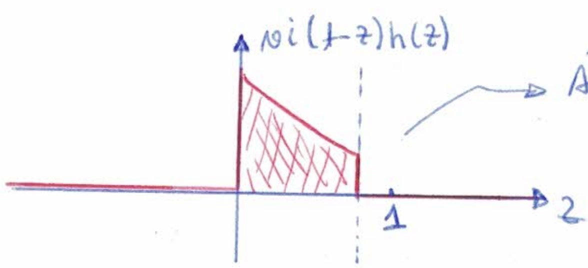
$v_i(t-z)$ é $v_i(z)$ deslocada à direita em uma quantidade $t = z$.

d)



$h(z) = 2e^{-z} u(z)$

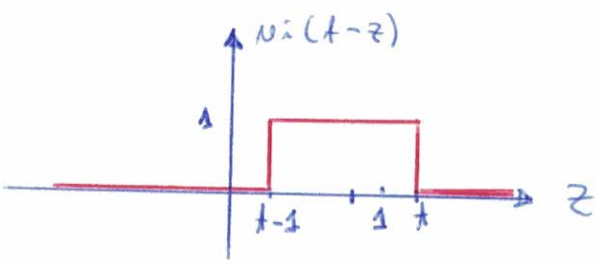
e)



$$\text{Área} = \int_0^{\infty} v_i(t-z)\, h(z)\, dz = v_o(t)$$

* multiplicando as duas funções. Resultado para um valor arbitrário $t < 1$

f)



Buscamos um valor para a saída $v_o(t)$, que é dado pela área sob o produto das duas funções.

* $p/t<0$ não há sobreposição entre $v_i(t-z)$ e $h(z)$ $\therefore$ $v_o = 0$

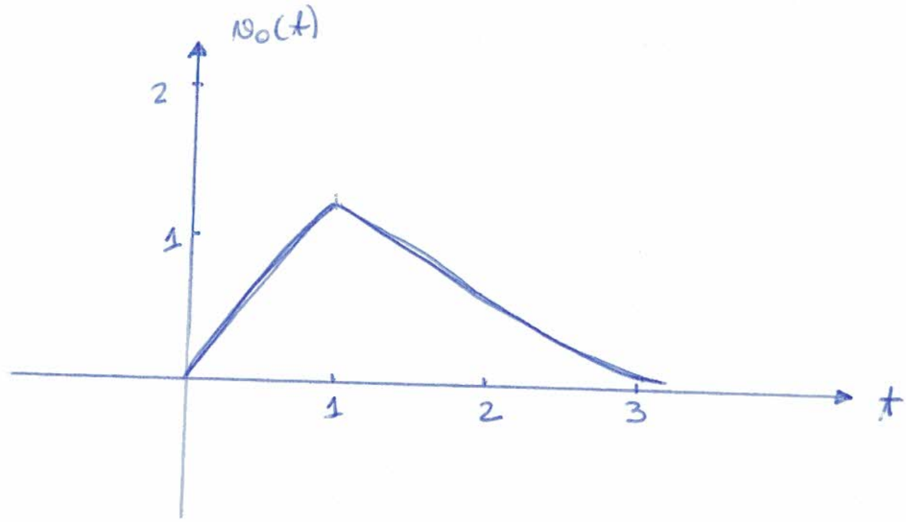
* Aumentando t, deslizamos o pulso (c) para a direita, levando a superposição com $h(z)$ assim que $t>0$.

* A área sob a curva (e) continua a crescer enquanto aumentamos o valor de t, até alcançarmos $t = 1$.

* A partir deste valor, o crescimento de t leva à abertura de um espaço vazio entre $z=0$ e a borda do pulso (f). Como resultado, a superposição com $h(z)$ passa a decrescer.

Em outras palavras, para valores de t entre 0 e 1, devemos integrar de $z=0$ a $z=1$. Para valores de t que excedem a unidade, o intervalo de integração é $t-1 < z < t$. Assim, podemos escrever:

$$v_o(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ \int_0^t 2e^{-z}\,dz = 2(1-e^{-t}) & 0 \leq t \leq 1 \\ \int_{t-1}^{t} 2e^{-z}\,dz = 2(e-1)e^{-t} & t > 1 \end{cases}$$



A convolução e a TL

* Convolução: aplicações em análises de circuitos lineares; processamento de sinais; telecomunicações; teoria de transportes em semicondutores; entre outras.

* Muito útil possuir uma intuição gráfica, mesmo que as expressões integrais nem sempre sejam o melhor caminho para a solução.

* Uma alternativa muito poderosa é fazer uso das propriedades da TL.

* Vamos assumir que $F_1(S)$ e $F_2(S)$ sejam as TLs de $f_1(t)$ e $f_2(t)$, respectivamente, e consideraremos a TL de $f_1(t) * f_2(t)$.

$$\mathcal{L}\{f_1(t) * f_2(t)\} = \mathcal{L}\left\{\int_{-\infty}^{\infty} f_1(\lambda) f_2(t-\lambda) d\lambda\right\}$$

* Uma dessas funções é a excitação e a outra é a resposta ao impulso unitário.

$$\mathcal{L}\{f_1(t) * f_2(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-st}\left[\int_0^{\infty} f_1(\lambda) f_2(t-\lambda) d\lambda\right] dt$$

TL por definição

$$\mathcal{L}\{f_1(t) * f_2(t)\} = \int_0^{\infty}\left[\int_0^{\infty} e^{-st} f_1(\lambda) f_2(t-\lambda) dt\right] d\lambda$$

* e^{-st} não depende de λ, logo pode ir para dentro da integral interna.

** Invertendo a ordem da integração

*** $f_1(\lambda)$ não depende de t, logo pode ser tirado da integral de dentro

$$\mathcal{L}\{f_1(t) * f_2(t)\} = \int_0^\infty f_1(\lambda) \left[\int_0^\infty e^{-st} f_2(t-\lambda)\, dt \right] d\lambda$$

Fazendo $x = t - \lambda$ na integral entre colchetes (onde podemos tratar λ como uma constante):

$$\mathcal{L}\{f_1(t) * f_2(t)\} = \int_0^\infty f_1(\lambda) \left[\int_{-\lambda}^\infty e^{-s(x+\lambda)} f_2(x)\, dx \right] d\lambda$$

$$= \int_0^\infty f_1(\lambda)\, e^{-s\lambda} \left[\int_{-\lambda}^\infty e^{-sx} f_2(x)\, dx \right] d\lambda$$

$$= \int_0^\infty f_1(\lambda)\, e^{-s\lambda} \left[F_2(s) \right] d\lambda$$

$$= F_2(s) \int_0^\infty f_1(\lambda)\, e^{-s\lambda}\, d\lambda$$

$$\boxed{\mathcal{L}\{f_1(t) * f_2(t)\} = F_1(s) \cdot F_2(s)}$$

* A transformada inversa do produto de duas transformadas é a convolução das transformadas inversas individuais, um resultado que às vezes é útil na obtenção de transformadas inversas.

<u>Comentários adicionais a respeito das funções de transferência</u>

entrada/excitação

$$v_0(t) = h(t) * v_i(t)$$

resposta ao impulso unitário

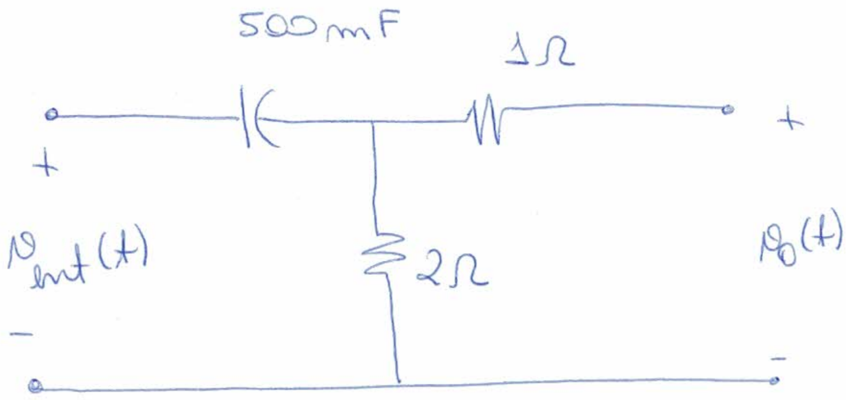
* a resposta ao impulso resulta da aplicação de um impulso unitário em $t = 0$ <u>com todas as condições iniciais nulas!</u>

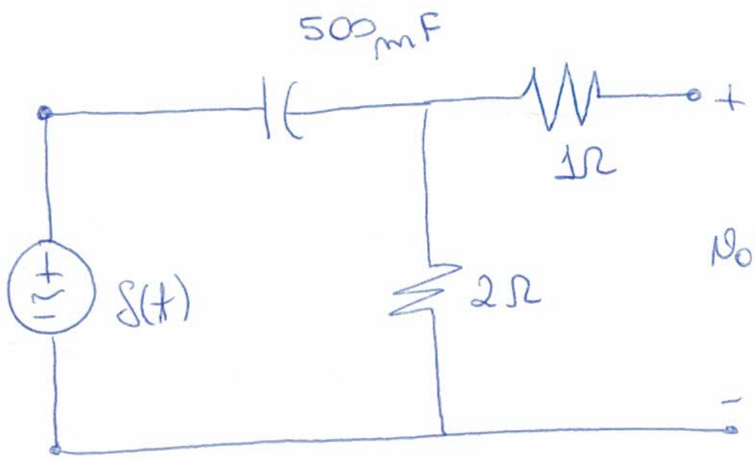
$$\mathcal{L}\{v_0(t)\} = V_0(s) = \mathcal{L}\{v_i(t) * h(t)\} = V_i(s)[\mathcal{L}\{h(t)\}]$$

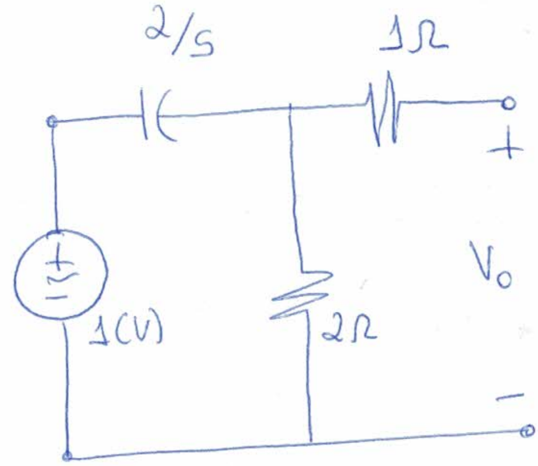
$$\mathcal{L}\{h(t)\} = H(s) = \frac{V_0(s)}{V_i(s)}$$

$$h(t) \Longleftrightarrow H(s)$$

Exemplo: Determine a resposta ao impulso do circuito e use isso para computar a resposta forçada $v_o(t)$ se $v_{ent}(t) = 6e^{-t}u(t)\,(V)$.







$$H(s) = \frac{V_o}{1} \qquad \therefore \quad V_o = 2\,\frac{1}{\frac{2}{s}+2} = \frac{s}{s+1}$$

$$\boxed{H(s) = \frac{s}{s+1}}$$

$$V_o(s) = H(s)\cdot V_{en}(s) = \frac{s}{s+1}\cdot\frac{6}{s+1} = \frac{6s}{(s+1)^2}$$

$$V_0(s) = \frac{6s}{(s+1)^2} = \frac{6}{s+1} - \frac{6}{(s+1)^2}$$

$$\boxed{v_0(t) = 6e^{-t}(1-t)\,u(t)\ (V)}$$

Exercício: Referindo-se ao exemplo anterior, use a convolução para obter $v_0(t)$ se $v_{ent}(t) = t.u(t)\ (V)$.

Resp.: $v_0(t) = (1 - e^{-t})\,u(t)\ (V)$

O PLANO DAS FREQUÊNCIAS COMPLEXAS

* Representação gráfica da resposta forçada em função da frequência complexa s é uma técnica útil e esclarecedora para a análise de circuitos, bem como para o projeto ou para a síntese de circuitos.

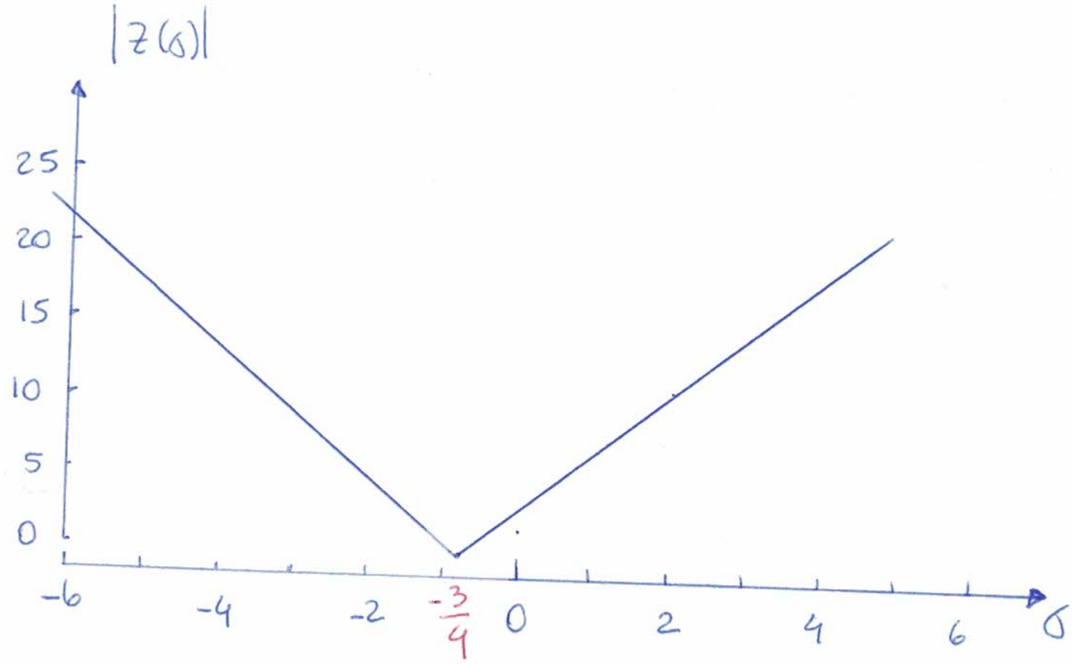
A resposta como uma função de σ

Exemplo: $Z(s) = 3 + 4s\ (\Omega)$

* Se desejarmos interpretar graficamente a variação da impedância com σ, fazemos $s = \sigma + j0$:

$$Z(\sigma) = 3 + 4\sigma$$

$$\left.\begin{array}{l} * \text{ zero} \therefore \sigma = -\frac{3}{4} \\ * \text{ polo: } \infty \end{array}\right\}\ \text{frequências críticas}$$



* Esse gráfico nos fornece informações a respeito da impedância quando conectada a uma simples função de excitação exponencial $e^{\sigma t}$.

* $Z(\sigma = \omega = 0) = 3\,\Omega$ $\therefore$ caso C.C.

A resposta como função de ω

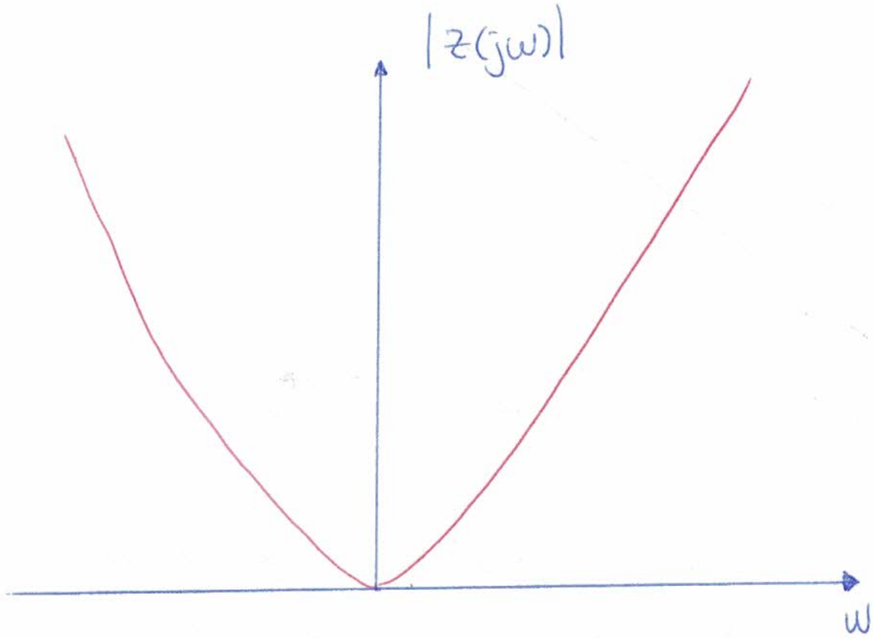
$$S = 0 + j\omega$$

$$Z(j\omega) = 3 + j4\omega \quad (\Omega)$$

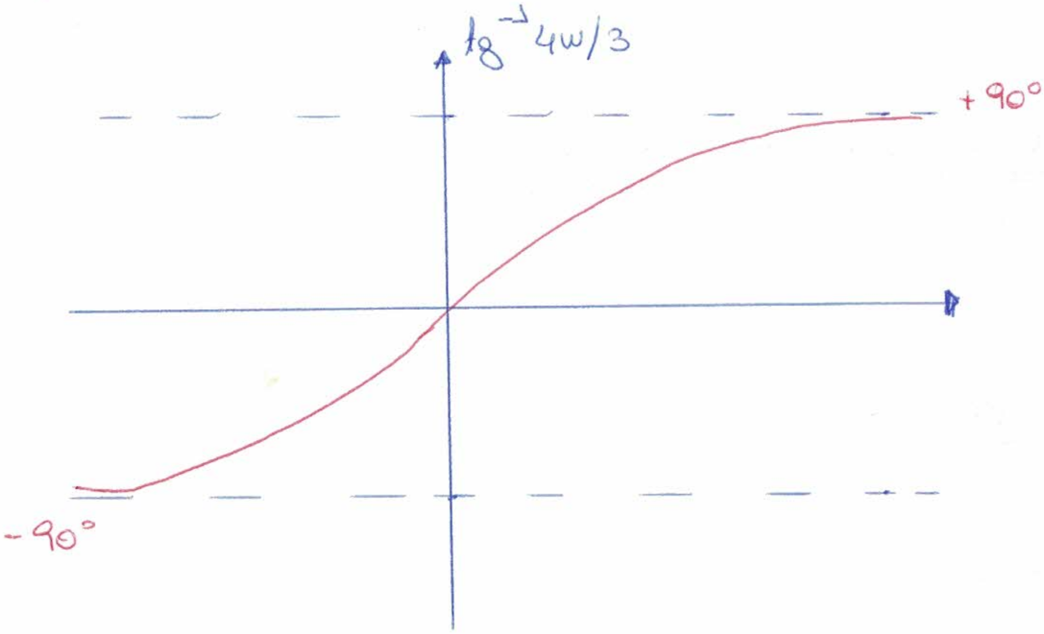
$$|Z(j\omega)| = \sqrt{9 + 16\omega^2}$$

$$\text{âng}\, Z(j\omega) = tg^{-1}\frac{4\omega}{3}$$

* A função que descreve o módulo apresenta ~~um único~~ pólos no infinito e um mínimo em $\omega = 0$.



* O ângulo de fase é uma função arco tangente, que se anula em $\omega = 0$ e é igual a $\pm 90°$ em $\omega = \pm\infty$.



A função de rede de um modo generalizado

$v_i(t)$ → entrada / excitação de um circuito

$v_o(t)$ → saída / resposta de um circuito

$$\underbrace{a_n \frac{d^n v_o}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} v_o}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dv_o}{dt} + a_0 v_o}_{v_o \rightarrow \text{resposta}} =$$

$$= \underbrace{b_m \frac{d^m v_i}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} v_i}{dt^{m-1}} + \dots + b_1 \frac{dv_i}{dt} + b_0 v_i}_{v_i \rightarrow \text{excitação}}$$

$\left.\begin{array}{l} a's \\ b's \end{array}\right\}$ constantes reais e independentes de v_i !

* Representações fasoriais:

$v_i = \dot{V}_i e^{st} \;\therefore\; \dot{V}_i(S)$

$v_o = \dot{V}_o e^{st} \;\therefore\; \dot{V}_o(S)$

$$(a_n S^n + a_{n-1} S^{n-1} + \dots + a_1 S + a_0) \dot{V}o\, e^{st} =$$

$$(b_m S^m + b_{m-1} S^{m-1} + \dots + b_1 S + b_0) \dot{V}i \cdot e^{st}$$

$$H(S) = \frac{\dot{V}o(S)}{\dot{V}i(S)} = \frac{b_m S^m + b_{m-1} S^{m-1} + \dots + b_1 S + b_0}{a_n S^n + a_{n-1} S^{n-1} + \dots + a_1 S + a_0}$$

Na forma fatorada:

$$H(S) = \frac{b_m \; (S - Z_1)(S - Z_2) \dots (S - Z_m)}{a_n \; (S - P_1)(S - P_2) \dots (S - P_n)}$$

Z_1, Z_2 e Z_m → zeros da função (função torna-se ZERO)

P_1, P_2 e P_n → pólos da função (função torna-se INFINITA)

Obs.: Os valores dos pólos e zeros, em conjunto com os valores dos fatores a_n e b_n, determinam perfeitamente a função de rede!

Exemplo:

$$H(S) = \frac{6(S+1)(S+1+j1)(S+1-j1)}{S(S+2)(S+2+j3)(S+2-j3)}$$

Zeros da função: -1; $-1-j1$ e $-1+j1$

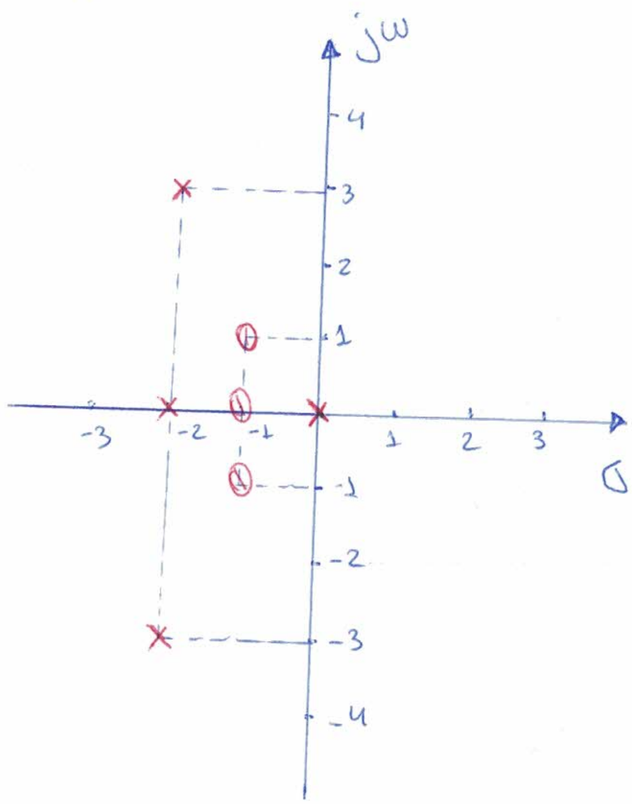
Pólos da função: 0; -2; $-2-j3$ e $-2+j3$

Diagrama de pólos e zeros

ZEROS → ○

PÓLOS → X

Plano S



Obs.: DP&Z → úteis considerando as propriedades dos circuitos lineares no domínio da frequência!

Exemplo: Com base nas informações dadas, construa a $H(S)$.

ZEROS: -1 e $-1 \pm j1$

PÓLOS: -2 e $-1 \pm j2$

$H(0) = 4$

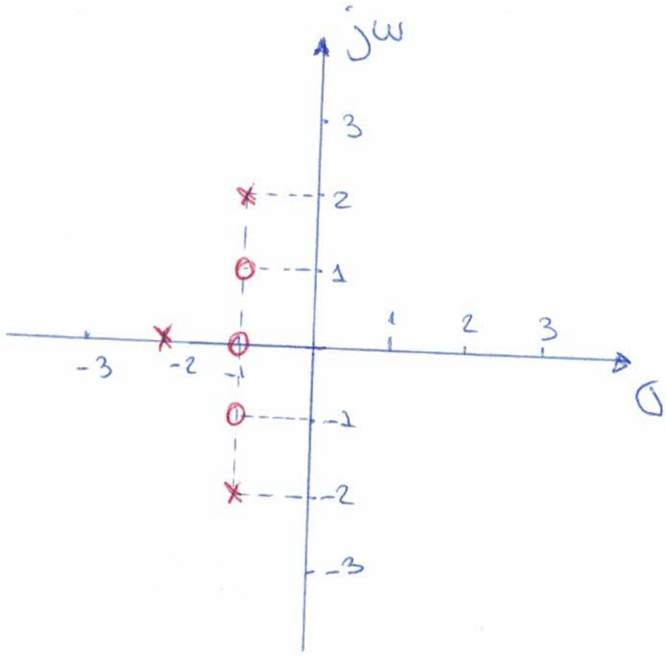
$$H(S) = \frac{bm}{an} \frac{(S+1)(S+1-j1)(S+1+j1)}{(S+2)(S+1-j2)(S+1+j2)}$$

$$H(S) = \frac{bm}{an} \frac{(S+1)(S^2+2S+2)}{(S+2)(S^2+2S+5)}$$

$$H(0) = 4 = \frac{bm}{an} \frac{1 \cdot 2}{2 \cdot 5} \qquad 4 = \frac{1}{5} \frac{bm}{an} \quad \therefore \quad \boxed{\frac{bm}{an} = 20}$$

$$\boxed{H(S) = 20 \frac{(S+1)(S^2+2S+2)}{(S+2)(S^2+2S+5)}}$$

DP&Z



Plano S

Exemplo: Se a equação representativa de um circuito é

$$\frac{d^2 v_o}{dt^2} + 4\frac{dv_o}{dt} + 13 v_o = 2\frac{dv_i}{dt} + 4 v_i$$ calcule $H(S)$, os pólos e os zeros.

Solução: $v_i = \dot{V}_i e^{st} \therefore V_i(S)$

$v_o = \dot{V}_o e^{st} \therefore V_o(S)$

$$(S^2 + 4S + 13)\dot{V}_o e^{st} = (2S + 4)\dot{V}_i e^{st}$$

$$\boxed{H(S) = \frac{V_o(S)}{V_i(S)} = \frac{2S + 4}{S^2 + 4S + 13}}$$

$$\frac{2s+4}{s^2+4s+13} \cdot \frac{1/s}{1/s} = \frac{2+\frac{4}{s}}{s+4+\frac{13}{s}}$$

ZEROS: -2 e ∞

PÓLOS: $-2 \pm j3$

<u>A resposta natural e a forçada da função de rede</u>

resposta = resposta natural ($\to$ sem fontes) + resposta forçada ($\to t \to \infty$)

resposta natural $\to$ resposta transitória ∴ desaparece após um breve período de tempo (circuito sem fontes!)

resposta forçada $\to$ resposta em RPCA $\to$ estará sempre presente $\to$ resposta fasorial

* <u>Resposta natural</u> ∴ circuito sem fontes $\to$ fontes INDEPENDENTES INATIVAS!

$$H(s) = \frac{\dot{V}o(s)}{\dot{V}i(s)} = \frac{b_m\,(s-z_1)(s-z_2)\ldots(s-z_m)}{a_n\,(s-p_1)(s-p_2)\ldots(s-p_n)} = \frac{N(s)}{D(s)}$$

$N(S) \rightarrow$ refere-se à excitação

$D(S) \rightarrow$ refere-se a resposta

$$D(S) = a_n S^n + a_{n-1} S^{n-1} + \dots + a_1 S + a_0 = 0$$

$\vdots$

$$\underbrace{a_n \frac{d^n v_0}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} v_0}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dv_0}{dt} + a_0 v_0 = 0}$$

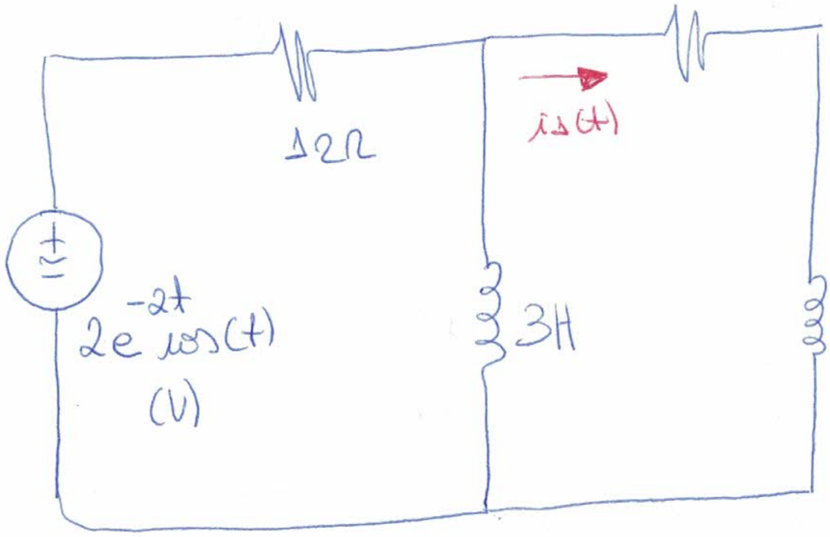
equação representativa $\rightarrow$ suas raízes são as frequências naturais do circuito!

$$\text{resposta natural} = A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t} + \dots + A_n e^{p_n t}$$

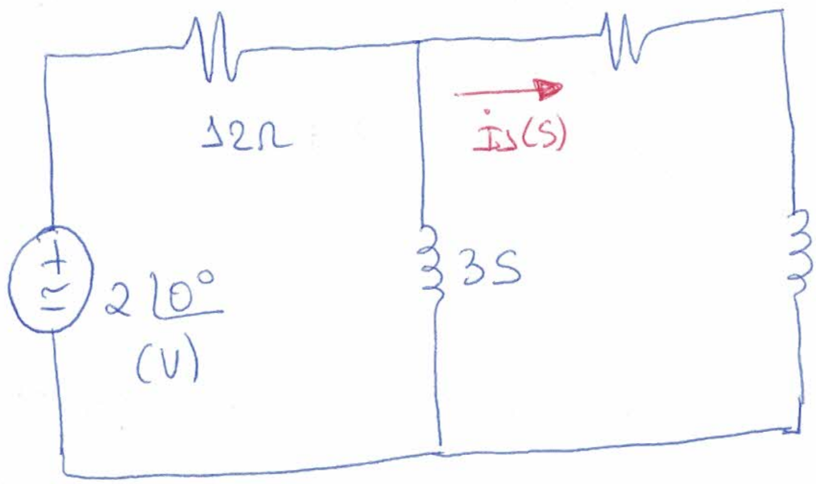
Sendo as frequências naturais $p_1, p_2, \dots, p_n$ os pólos da função de rede e $A_1, A_2, \dots, A_n$ as constantes arbitrárias!

$$\boxed{\text{resposta} = \text{resp. natural} + \text{resp. forçada}}$$

Exemplo: A partir da função de transferência, calcule a resposta completa $i_1(t)$ do circuito dado.



dom. tempo



dom. freq.

$$\boxed{S = -2 + j}$$

$$\dot{I}_T(S) = \frac{\dot{V}(S)}{12 + \dfrac{3S(6+2S)}{3S+2S+6}}$$

$$\dot{I}_1(S) = \frac{Z_{eq}(S)}{2S+6} \cdot \dot{I}_T(S)$$: Divisor de corrente!

$$\dot{I}_1(S) = \frac{\overbrace{\dfrac{3S(2S+6)}{5S+6}}^{Z_{eq}(S)}}{2S+6} \cdot \underbrace{\frac{\dot{V}(S)}{12 + \dfrac{3S(6+2S)}{3S+2S+6}}}_{\dot{I}_T(S)}$$

$$\dot{I}_1(S) = \frac{3S}{6S^2+78S+72} \cdot \dot{V}(S) = \frac{S}{2S^2+26S+24} \cdot \dot{V}(S)$$

$$H(S) = \frac{\dot{I}_1(S)}{\dot{V}(S)} = \frac{S}{2(S+1)(S+12)}$$

$$\boxed{H(S) = \frac{S}{2(S+1)(S+12)}}$$

$$\boxed{i_1(t) = i_{1n}(t) + i_{1f}(t)}$$

$$i_{1n}(t) = A_1 e^{-t} + A_2 e^{-12t} \longrightarrow \text{resposta natural!}$$

* Para $S = -2 + j1 \therefore \dot{I}_{1f}(S) = ?$

$$\dot{I}_{1f}(S) = H(S) \cdot V(S) = \frac{S}{2(S+1)(S+12)} \cdot 2\angle 0^\circ$$

$$\dot{I}_{1f}(S) = \frac{(2+j0) \cdot S}{2S^2+26S+24} = \frac{S}{S^2+13S+12}$$

$$\dot{I}_{1f}(S) = \frac{S}{(S+1)(S+12)}\bigg|_{S=-2+j1}$$

$$\dot{I}_{1f}(S) = 0{,}16 \angle 12{,}7^\circ \ (A)$$

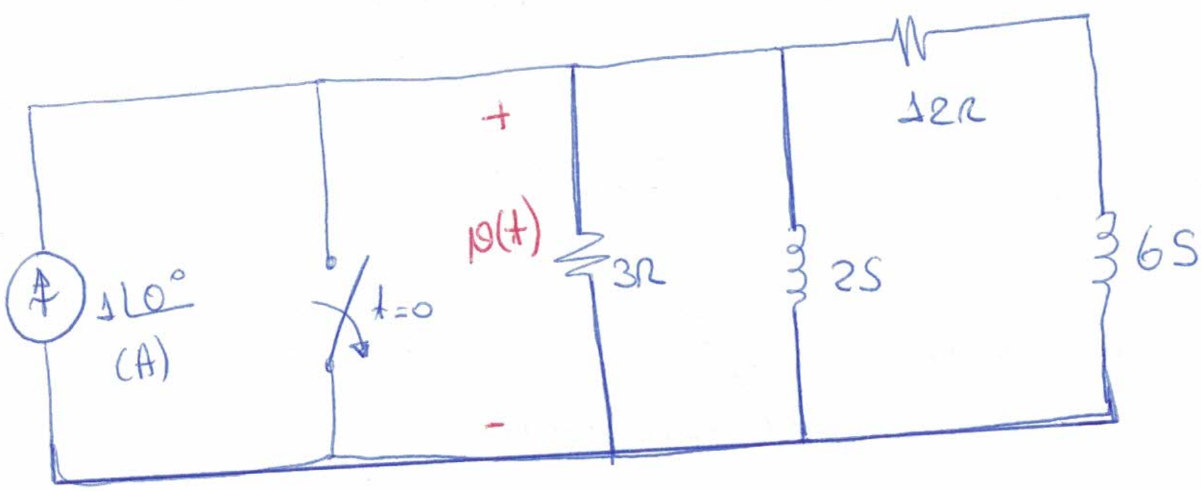
$$i_{1f}(t) = 0{,}16\, e^{-2t} \cos(t + 12{,}7^\circ)\ (A)$$ → resposta forçada!

$$i_1(t) = i_n(t) + i_{1f}(t)$$

$$i_1(t) = A_1 e^{-t} + A_2 e^{-12t} + 0{,}16\, e^{-2t}\cos(t + 12{,}7^\circ)\ (A)$$

Obs.: Conhecendo as C.I.s podemos determinar A_1 e A_2!

Exemplo: Achar a resposta completa $v(t)$ do circuito apresentado a partir da função de rede caracterizada!



$$i(t) = e^{-t}\cos 2t\ (A)$$

$$v(t) = v_m(t) + v_f(t)$$

$$H(S) = \frac{\dot{V}(S)}{\dot{I}(S)} = Z(S)$$

$$Z(S) = ? \qquad Y(S) = \frac{1}{3} + \frac{1}{2S} + \frac{1}{6S+12} = \frac{1}{3}\,\frac{(S+1)(S+3)}{S(S+2)}$$

$$Z(S) = \frac{1}{Y(S)} \qquad \boxed{Z(S) = 3\,\frac{S(S+2)}{(S+1)(S+3)}}$$

$$\boxed{v_m(t) = A_1 e^{-t} + A_2 e^{-3t} \ (V)}$$

$$v_f(t) = ? \qquad \boxed{\dot{V}(S) = Z(S)\cdot \dot{I}(S)\Big|_{S=-1+j2}}$$

$$\dot{V}(S) = \frac{3\,(-1+j2)(1+j2)}{j2\,(2+j2)} \quad \therefore \quad \dot{V}(S) = 2{,}65\angle 45^\circ \ (V)$$

$$\boxed{v_f(t) = 2{,}65\,e^{-t}\cos(2t+45^\circ) \ (V)}$$

$$\boxed{v(t) = A_1 e^{-t} + A_2 e^{-3t} + 2{,}65\,e^{-t}\cos(2t+45^\circ) \ (V)}$$

Exercícios: 14.3.1, 14.3.2 e 14.4.1

14.1/3/5/11/13/15 e 14.19