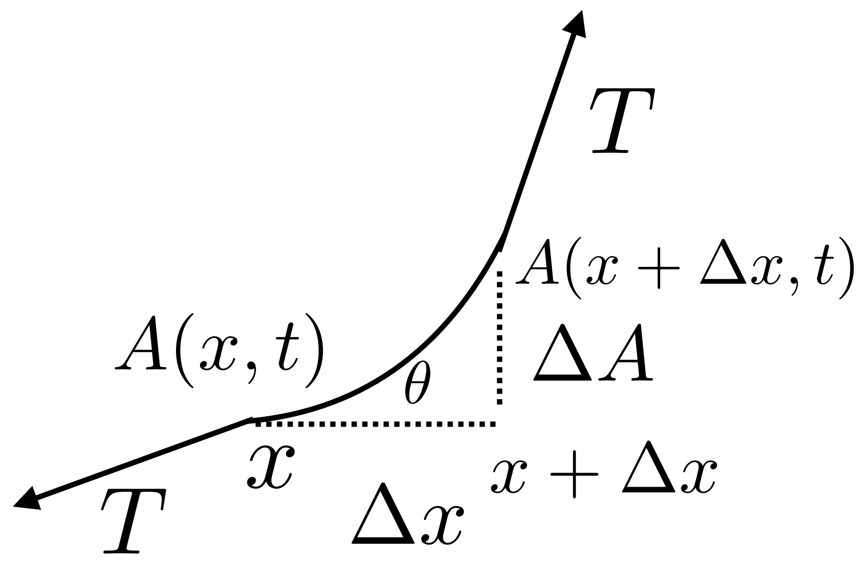
Ondas III

Física II - Módulo II - Fenômenos Ondulatórios

Densidade de Energia Transportada pela Onda



A Energia Cinética associada a uma porção de corda de massa $\Delta m = \mu \Delta x$

$$\Delta E_c = \frac{1}{2}(\mu \Delta x)\left(\frac{\partial}{\partial t}A(x,t)\right)^2 \quad \rightarrow \quad \frac{\Delta E_c}{\Delta x} = \frac{1}{2}\mu\left(\frac{\partial}{\partial t}A(x,t)\right)^2$$

energia cinética por unidade de comprimento

A Energia Energia Potencial associada a uma porção de corda depende de quanto a corda está esticada

se a corda estiver em equilíbrio então $\frac{\partial}{\partial x}A(x,t) = 0$ $\rightarrow$ a energia potencial por definição será nula

o quanto a corda é esticada pela onda em x é

$$\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta A)^2} - \Delta x = \Delta x\sqrt{1 + \left(\frac{\Delta A}{\Delta x}\right)^2} \quad = \Delta x\left(1 + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial A}{\partial x}\right)^2 - \frac{1}{8}\left(\frac{\partial A}{\partial x}\right)^4 + \ldots\right) - \Delta x$$

Densidade de Energia Transportada pela Onda

A Energia Cinética associada à passagem da onda por uma porção de corda de massa $\Delta m = \mu \Delta x$

$$\Delta E_c = \frac{1}{2}(\mu \Delta x)\left(\frac{\partial}{\partial t}A(x,t)\right)^2 \quad \rightarrow \quad \frac{\Delta E_c}{\Delta x} = \frac{1}{2}\mu\left(\frac{\partial}{\partial t}A(x,t)\right)^2$$

energia cinética por unidade de comprimento

Mesmo sem a passagem da onda uma corda tensionada tem energia potencial armazenada. Não é isso que queremos aqui.

A Energia Energia Potencial associada à passagem da onda por uma porção de corda depende de quanto a corda será esticada pela onda

$$\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta A)^2} - \Delta x = \Delta x\sqrt{1 + \left(\frac{\Delta A}{\Delta x}\right)^2} = \Delta x\left(1 + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial A}{\partial x}\right)^2 - \frac{1}{8}\left(\frac{\partial A}{\partial x}\right)^4 + \ldots\right) - \Delta x$$

$$\approx \frac{1}{2}\Delta x\left(\frac{\partial A}{\partial x}\right)^2 \qquad \Delta U = \frac{1}{2}T\Delta x\left(\frac{\partial A}{\partial x}\right)^2 \qquad \frac{\Delta U}{\Delta x} = \frac{1}{2}T\left(\frac{\partial A}{\partial x}\right)^2$$

energia potencial por unidade de comprimento

Densidade de Energia Transportada pela Onda

A Energia Total no ponto x por unidade de comprimento da corda

$$\frac{\Delta E_c}{\Delta x} = \frac{1}{2}\mu\left(\frac{\partial}{\partial t}A(x,t)\right)^2 \qquad \frac{\Delta U}{\Delta x} = \frac{1}{2}T\left(\frac{\partial A}{\partial x}\right)^2$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta E_T}{\Delta x} = \frac{\partial E_T}{\partial x} = \frac{1}{2}\mu\left(\frac{\partial A}{\partial t}\right)^2 + \frac{1}{2}T\left(\frac{\partial A}{\partial x}\right)^2$$

mas $A(x,t) = f(x \pm vt)$ logo $\frac{\partial}{\partial t}A(x,t) = \pm v\frac{\partial}{\partial x}A(x,t)$

$$\frac{\partial}{\partial x}E_T = \frac{1}{2}\mu\left(\frac{\partial A}{\partial t}\right)^2 + \frac{1}{2}\frac{T}{v^2}\left(\frac{\partial A}{\partial t}\right)^2 = \mu\left(\frac{\partial A}{\partial t}\right)^2$$

energia contida em uma porção Δx da corda

$$\Delta E_T = \frac{\partial E_T}{\partial x}\Delta x$$

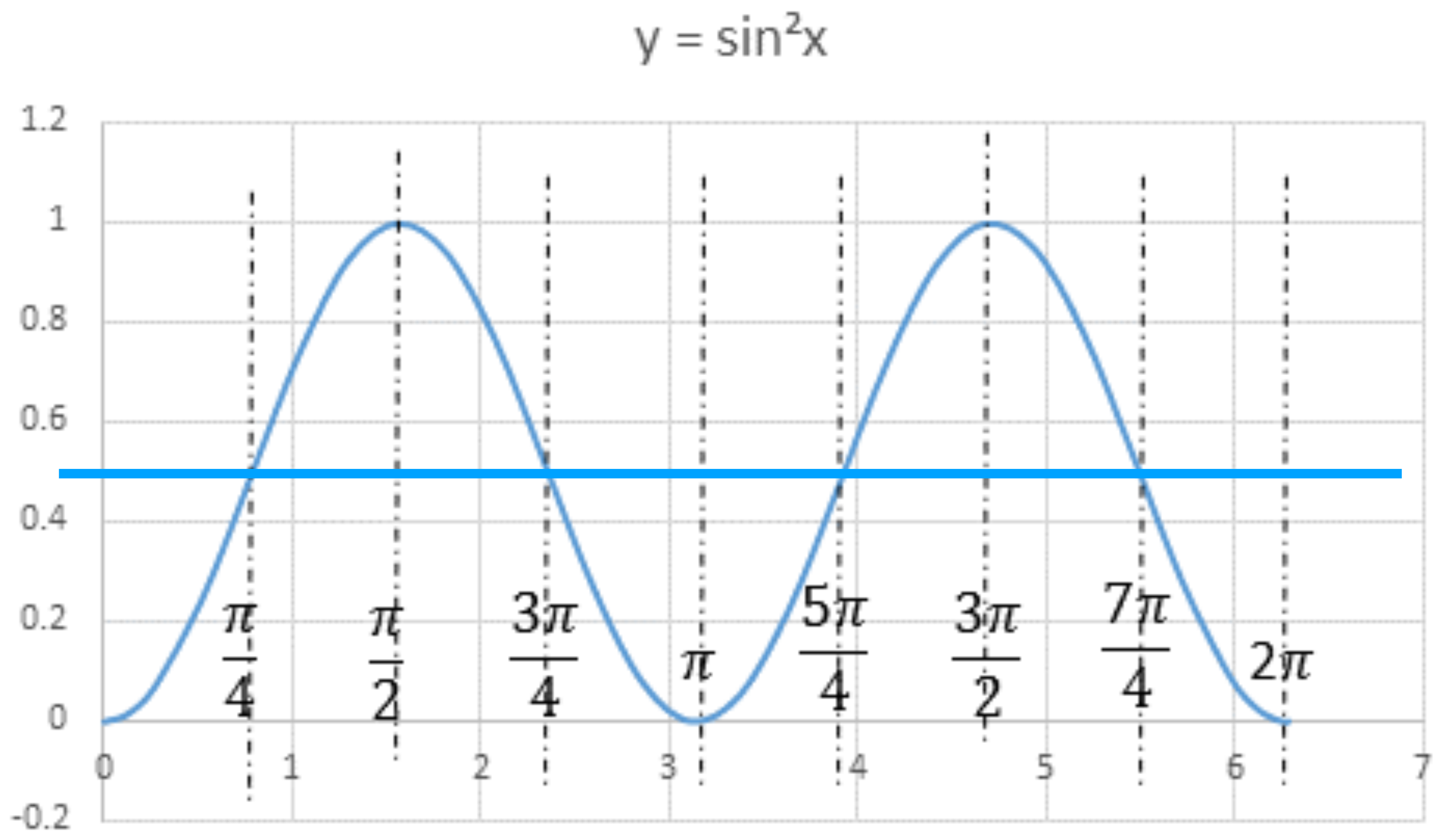
Potência Média Transportada

(= Intensidade média em 1 D)

potência média transportada

$$\overline{P} = \frac{\overline{\Delta E_T}}{\Delta t} = \overline{\left(\frac{dE_T}{dx}\right)} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \overline{\left(\frac{dE_T}{dx}\right)} v$$

densidade de energia média



EXEMPLO:

$$A(x,t) = B\cos(kx - \omega t + \delta)$$

$$\overline{\frac{\partial E_T}{\partial x}} = \mu \overline{\left(\frac{\partial A}{\partial t}\right)^2} = \mu B^2 \omega^2 \underbrace{\overline{\sin^2(kx - \omega t + \delta)}}_{=\frac{1}{2}} \implies \overline{P} = \frac{1}{2}\mu\omega^2 v B^2$$

Depende do Amplitude ao quadrado

Ondas Sonoras

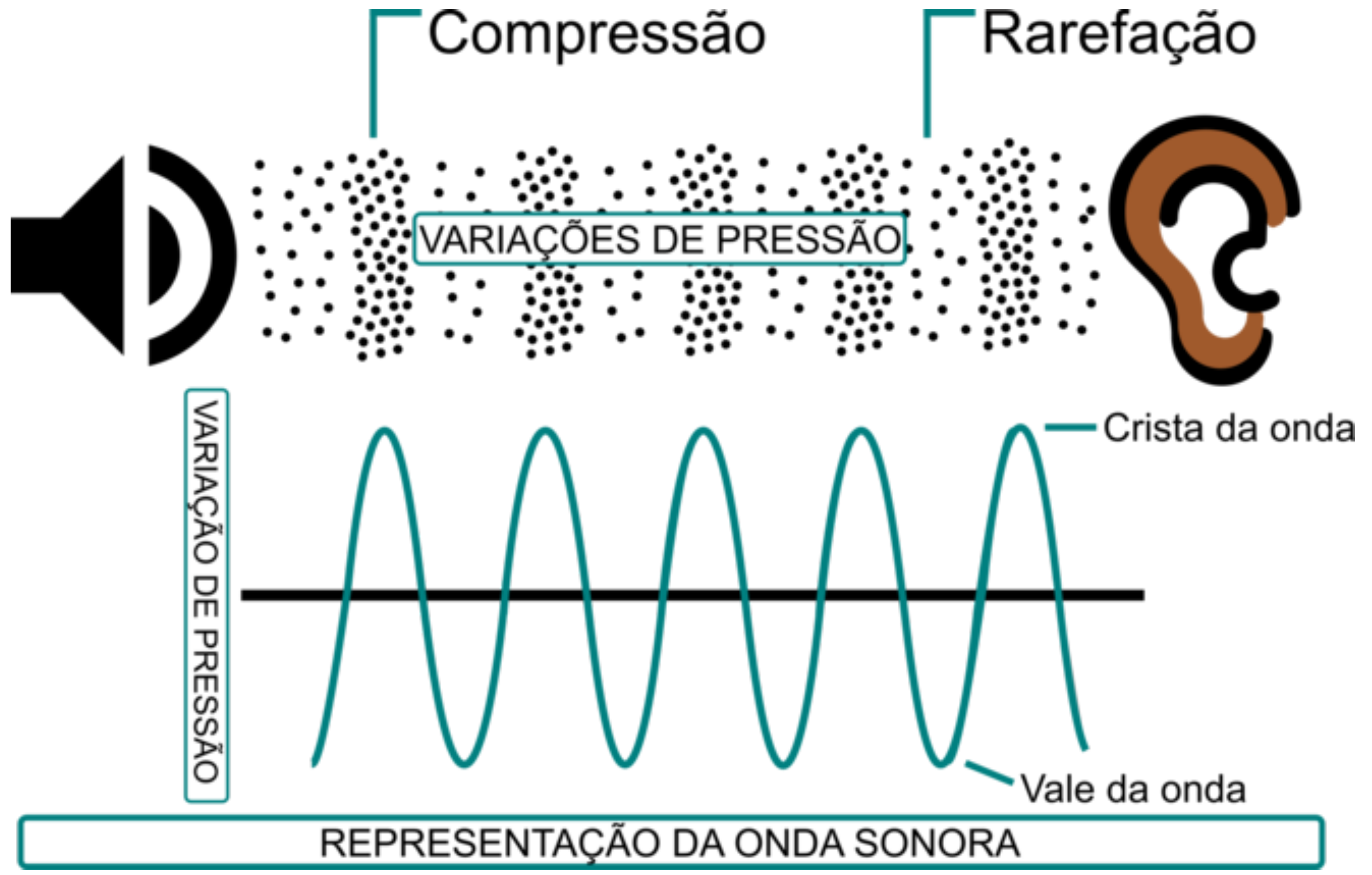
- São ondas mecânicas i.e. que se propagam apenas na presença de um meio material

  podem se propagar em fluidos (gases ou líquidos) ou em sólidos

- São ondas longitudinais associadas as variações de pressão (muito pequenas comparadas a de equilíbrio)

- Oscilações harmônicas produzem sons audíveis na faixa de 20 Hz a 20 kHz

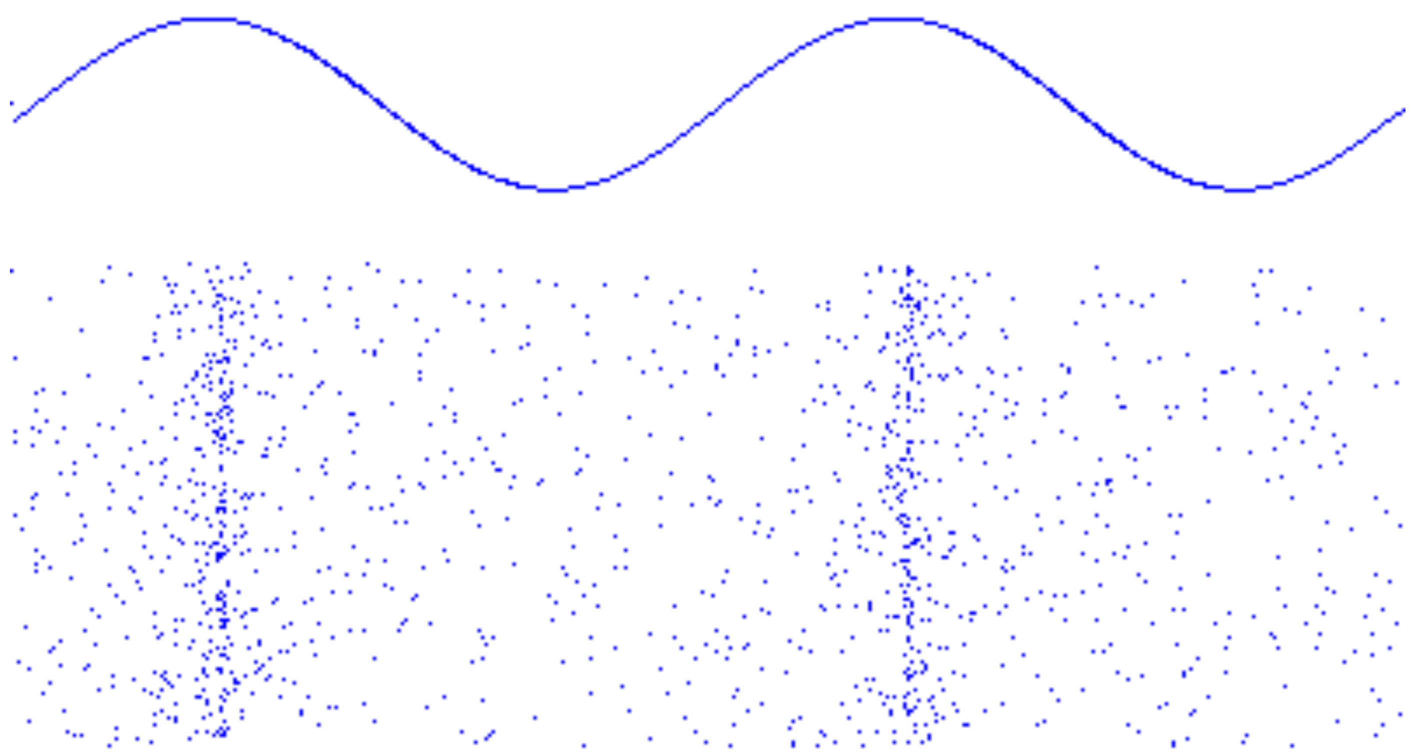
de 0.001 Hz a 20 Hz : infrassom

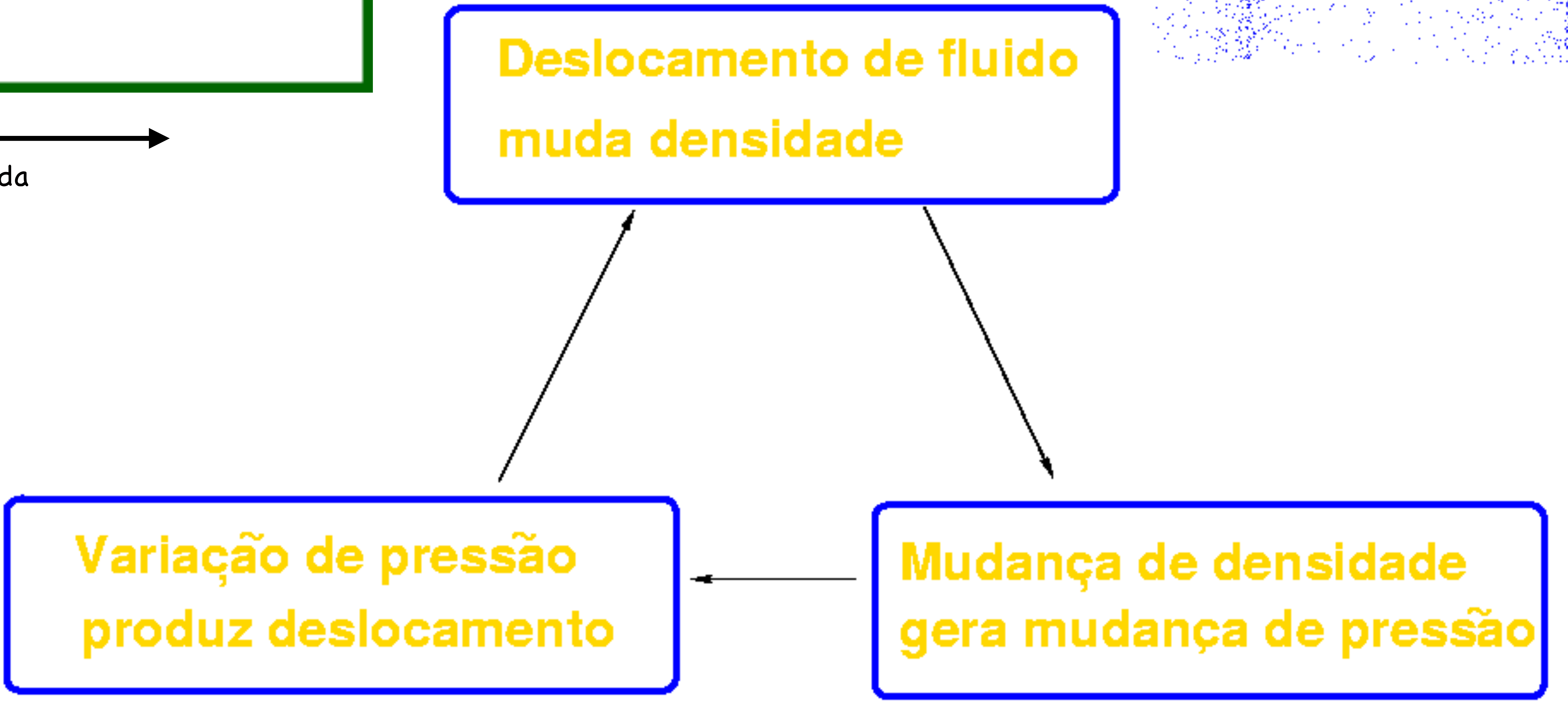


de 20kHz a 10^8 Hz : ultrasom

Modelagem

perturbação
deslocamento da onda





Densidade & Pressão

Suponha que

$$\left.\begin{aligned} p_0 &= \text{pressão de equilíbrio} \\ \rho_0 &= \text{densidade de equilíbrio} \end{aligned}\right\} \quad \text{i.e. na ausência da onda}$$

Na presença da onda temos

$$P(x,t) = p_0 + p(x,t)$$

$$\rho(x,t) = \rho_0 + \zeta(x,t)$$

mas

$$|\zeta(x,t)| \ll \rho_0$$

$$|p(x,t)| \ll p_0$$

note que nosso ouvido só pode tolerar variações de pressão de no máximo

$$|\Delta p/p_0| \sim 10^{-3}$$

antes de começarmos a sentir dor !

$$\boxed{\frac{p(x,t)}{\zeta(x,t)} = \frac{P(x,t)-p_0}{\rho(x,t)-\rho_0} = \frac{\Delta P}{\Delta \rho} \approx \left(\frac{\partial P}{\partial \rho}\right)_0} \qquad (1)$$

indica que a derivada é calculada nos valores de equilíbrio

Nota sobre a Atmosfera terrestre

A atmosfera pode ser tratada em boa aproximação como um gás ideal (Física II - Módulo V)

EQUAÇÃO DE ESTADO DE UM GÁS IDEAL

n = # de moles

m = massa molar

M = massa do gás

$$PV = n\,RT \quad \rightarrow \quad P = \frac{M}{mV} RT \quad \rightarrow P = \frac{\rho}{m} RT \rightarrow \frac{P}{\rho} = \frac{RT}{m}$$

Laplace (1816) compreendeu que as compressões/expansões da ondas sonoras são tão rápidas que não há tempo hábil para ter troca de calor (processo é adiabático)

$$P = b\,\rho^{\gamma}$$

γ, b **onde são constantes**

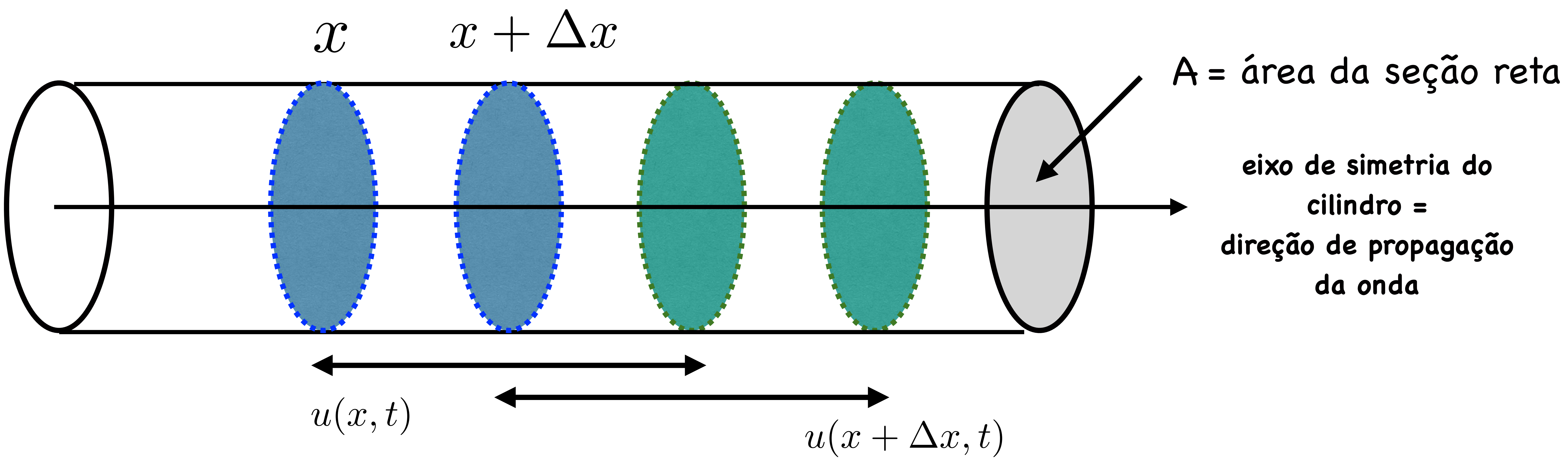
$$\gamma = \frac{c_p}{c_v} > 1$$

$$\left(\frac{\partial P}{\partial \rho}\right)_S = b\,\gamma\,\rho^{\gamma-1} = \frac{\gamma P}{\rho} \quad \rightarrow \quad \boxed{\left(\frac{\partial P}{\partial \rho}\right)_{S,0} = \frac{\gamma p_0}{\rho_0}} \quad \textbf{(2)}$$

$\gamma = 1.67\ (1.4)$ **para gases monoatômicos (diatômicos - ar)**

Deslocamento & Densidade

Vamos considerar ondas unidimensionais propagando-se em un tubo cilíndrico



$u(x,t)$ é o deslocamento sofrido pelo fluido na seção transversal de coordenada x no instante t

Deslocamento & Densidade

Volume preenchido pelo fluido antes do deslocamento

$$V = A\left[(x+\Delta x) - x\right] = A\Delta x$$

Após o deslocamento

$$\begin{aligned} V + \Delta V &= A\{[(x+\Delta x) + u(x+\Delta x, t)] - [x + u(x,t)]\} \\ &= A[\Delta x + u(x+\Delta x, t) - u(x,t)] \\ &= A\Delta x[1 + \frac{u(x+\Delta x, t) - u(x,t)}{\Delta x}] \end{aligned}$$

$$\underset{\Delta x \to 0}{\lim} \quad V + \Delta V \approx V\left(1 + \frac{\partial u}{\partial x}\right) \quad \rightarrow \quad \frac{\Delta V}{V} = \frac{\partial u(x,t)}{\partial x}$$

Deslocamento & Densidade

A densidade do fluido homogêneo é

$$\rho = \frac{M}{V} \qquad \Delta\rho = -\frac{\partial\rho}{\partial V}\Delta V = -\frac{M}{V^2}\Delta V = -\frac{\rho}{V}\Delta V \qquad \frac{\Delta\rho}{\rho} = -\frac{\Delta V}{V} = -\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}$$

aumento de densidade leva a diminuição de volume !

$$\frac{\zeta(x,t)}{\rho} \approx \frac{\zeta(x,t)}{\rho_0} = -\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}$$

$$\boxed{\zeta(x,t) = -\rho_0 \frac{\partial u(x,t)}{\partial x}} \quad \textbf{(3)}$$

essa é a variação da densidade devido ao deslocamento do fluido

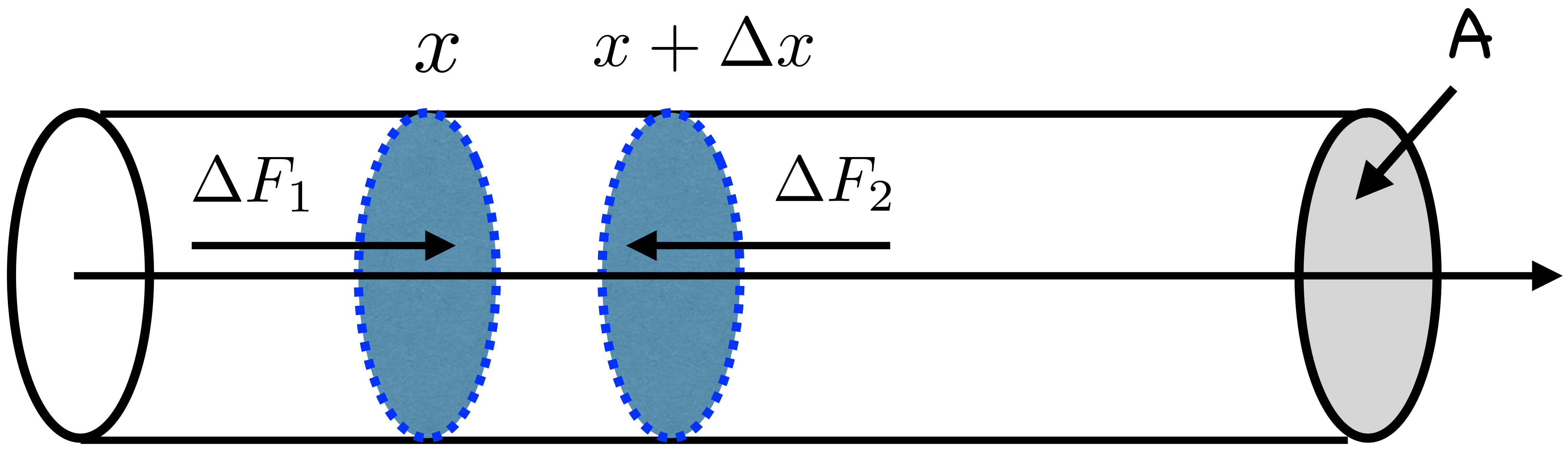
se o deslocamento cresce com x, i.e. $\dfrac{\partial u(x,t)}{\partial x} > 0$

a densidade diminui, logo produz rarefação em x, i.e. $\zeta(x,t) < 0$

Pressão & Deslocamento

O elemento de volume ΔV entre x e $x + \Delta x$ contém a massa

$$\Delta m = \rho \Delta V \approx \rho_0 A \Delta x$$



Vamos encontrar a equação de movimento para essa massa

A pressão P(x,t) sobre a face esquerda desse elemento produz a força

$$\Delta F_1 = P(x,t)A$$

enquanto a face direita está sujeita à força

$$\Delta F_2 = -P(x + \Delta x, t)A$$

$$\begin{aligned}\Delta F &= \Delta F_1 + \Delta F_2 = [P(x,t) - P(x + \Delta x, t)]A \\ &= -A\Delta x[\tfrac{P(x+\Delta x,t)-P(x,t)}{\Delta x}] \approx -A\Delta x[\tfrac{\partial P(x,t)}{\partial x}]\end{aligned}$$

Pressão & Deslocamento

Assim

$$\Delta F = -\Delta V \frac{\partial P(x,t)}{\partial x} \quad = -\Delta V \frac{\partial p(x,t)}{\partial x}$$

$$\Delta m \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} \quad = \rho_0 \Delta V \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = -\Delta V \frac{\partial p(x,t)}{\partial x}$$ (2ª lei de Newton)

$$\boxed{\frac{\partial p(x,t)}{\partial x} = -\rho_0 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}} \quad (4)$$

Recapitulando

$$p(x,t) \overset{(1)}{=} \left(\frac{\partial P}{\partial \rho}\right)_{S,0} \zeta(x,t) \overset{(3)}{=} -\rho_0 \left(\frac{\partial P}{\partial \rho}\right)_{S,0} \frac{\partial u(x,t)}{\partial x}$$

$$\rho_0 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} \overset{(4)}{=} -\frac{\partial p(x,t)}{\partial x} = \rho_0 \left(\frac{\partial P}{\partial \rho}\right)_{S,0} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

equação de onda para o deslocamento

$$\Longrightarrow \quad \boxed{\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}}$$

velocidade do som

gás ideal

$$\boxed{v_s \equiv \sqrt{\left(\frac{\partial P}{\partial \rho}\right)_{S,0}} \overset{(2)}{=} \sqrt{\frac{\gamma p_0}{\rho_0}} = \sqrt{\frac{\gamma R T}{m}}}$$

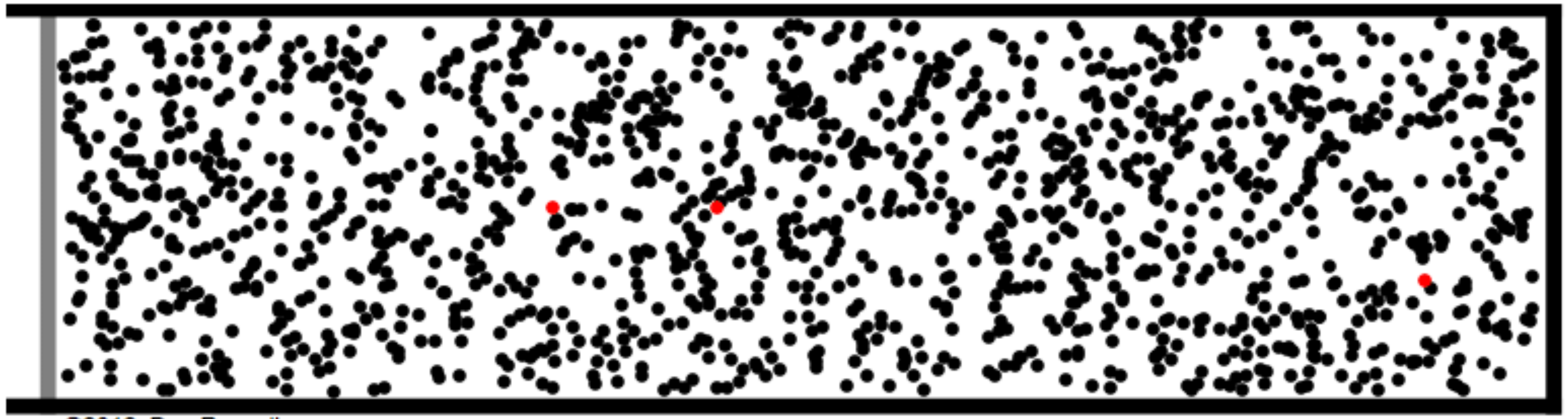
$$\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 \zeta(x,t)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \zeta(x,t)}{\partial x^2}$$

as variações de densidade e pressão também obedecem equações de onda que se propagam com a velocidade do som

$$\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 p(x,t)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 p(x,t)}{\partial x^2}$$

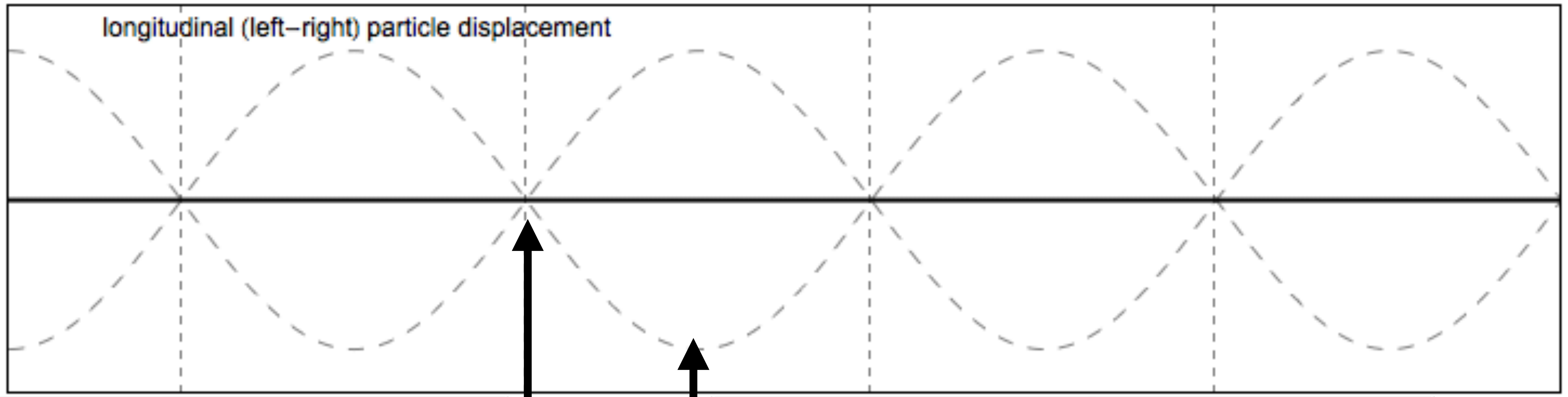
Mostre !

pistão movendo-se para frente
e para trás
onda estacionária



Deslocamento
u(x,t)

$$p(x,t) = -\rho_0 v_s^2 \frac{\partial u(x,t)}{\partial x}$$

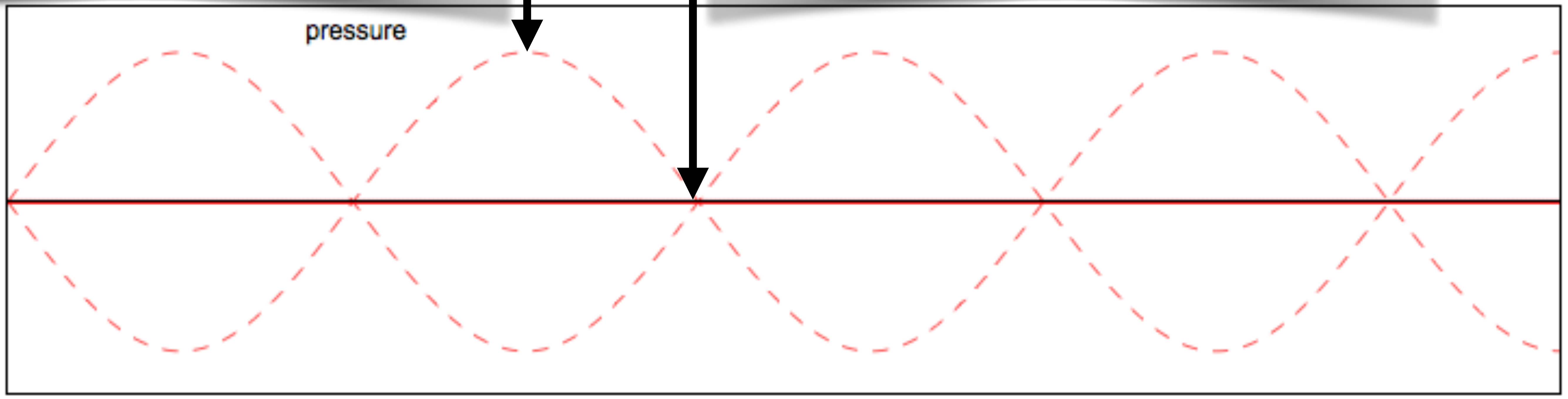


onda deslocamento sempre em oposição de fase com a onda de pressão

nodo de deslocamento = antinodo de pressão

nodo de pressão = antinodo de deslocamento

Variação da Pressão
p(x,t)



compressão

expansão

Animation courtesy of Dr. Dan Russell, Grad. Prog. Acoustics, Penn State

Velocidade do Som na Água e em Sólidos

Na água e nos sólidos podemos definir o chamado **módulo de elasticidade volumétrico** B por

$$B \equiv -\frac{\Delta P}{\Delta V/V} \quad \text{mas} \quad \frac{\Delta\rho}{\rho} = -\frac{\Delta V}{V} \quad \rightarrow \quad B \approx \rho_0 \left(\frac{\partial P}{\partial \rho}\right)_0 = \rho_0 v_s^2 \qquad v_s = \sqrt{\frac{B}{\rho_0}}$$

$Z = \rho_0 v_s$ impedância específica do meio

- água

$B \approx 2.2 \times 10^9\, \mathrm{N/m^2}$ $\quad \rho_0 \approx 10^3 \mathrm{kg/m^3}$ $\quad v_s \approx 1483\ \mathrm{m/s}$ $\quad Z_{\mathrm{agua}} \approx 1,5 \times 10^6\, \dfrac{\mathrm{Pa\ s}}{\mathrm{m}}$

- rocha

$B \approx 9.4 \times 10^{10}\, \mathrm{N/m^2}$ $\quad \rho_0 \approx 2600\ \mathrm{kg/m^3}$ $\quad v_s \approx 6000\ \mathrm{m/s}$ $\quad Z_{\mathrm{rocha}} \approx 16 \times 10^6\, \dfrac{\mathrm{Pa\ s}}{\mathrm{m}}$

- aterro

$B \approx 1.5 \times 10^7\, \mathrm{N/m^2}$ $\quad \rho_0 \approx 1500\ \mathrm{kg/m^3}$ $\quad v_s \approx 100\ \mathrm{m/s}$ $\quad Z_{\mathrm{aterro}} \approx 0,16 \times 10^6\, \dfrac{\mathrm{Pa\ s}}{\mathrm{m}}$

Potência Transmitida em um Terremoto

estimativa

$$\frac{P_T}{P_I} = \frac{Z_2}{Z_1}\left(\frac{2Z_1}{Z_1+Z_2}\right)^2 \approx 0.31$$

da rocha para a água $T \approx 1.8$

$$\frac{P_T}{P_I} = \frac{Z_2}{Z_1}\left(\frac{2Z_1}{Z_1+Z_2}\right)^2 \approx 0.04$$

da rocha para o aterro $T \approx 2$ a amplitude das ondas dobram !

- **água**

$B \approx 2.2 \times 10^9\,\mathrm{N/m^2}$ $\rho_0 \approx 10^3\mathrm{kg/m^3}$ $v_s \approx 1483\ \mathrm{m/s}$ $Z_{\mathrm{agua}} \approx 1,5 \times 10^6\,\frac{\mathrm{Pa\ s}}{\mathrm{m}}$

- **rocha**

$B \approx 9.4 \times 10^{10}\,\mathrm{N/m^2}$ $\rho_0 \approx 2600\ \mathrm{kg/m^3}$ $v_s \approx 6000\ \mathrm{m/s}$ $Z_{\mathrm{rocha}} \approx 16 \times 10^6\,\frac{\mathrm{Pa\ s}}{\mathrm{m}}$

- **aterro**

$B \approx 1.5 \times 10^7\,\mathrm{N/m^2}$ $\rho_0 \approx 1500\ \mathrm{kg/m^3}$ $v_s \approx 100\ \mathrm{m/s}$ $Z_{\mathrm{aterro}} \approx 0,16 \times 10^6\,\frac{\mathrm{Pa\ s}}{\mathrm{m}}$

Intensidade do Sonora

Intensidade = Potência Média/Área

definimos nível de intensidade medido em decibel (dB)

O ouvido humano opera em escala logarítmica: se um som tem intensidade 1000 vezes maior que outro percebemos como se o som fosse 3 vezes mais alto

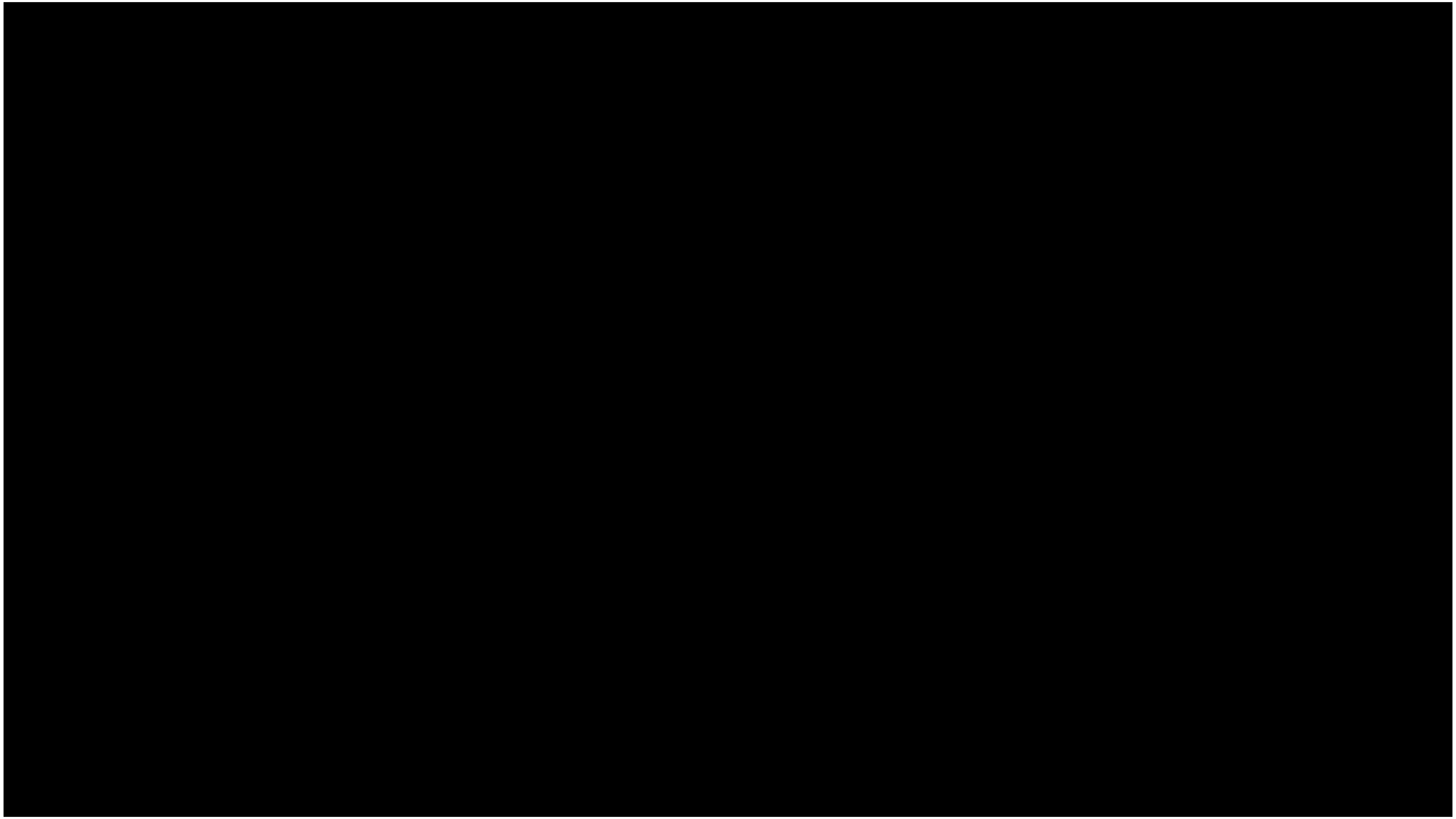
$$L = 10\log_{10}\left(\frac{I}{I_0}\right) \qquad I_0 = 10^{-12}\,\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}^2}$$ = 0 dB limiar de audibilidade

nível de intensidade

música suave	rua barulhenta	avião próximo
40 dB	80 dB	100 dB

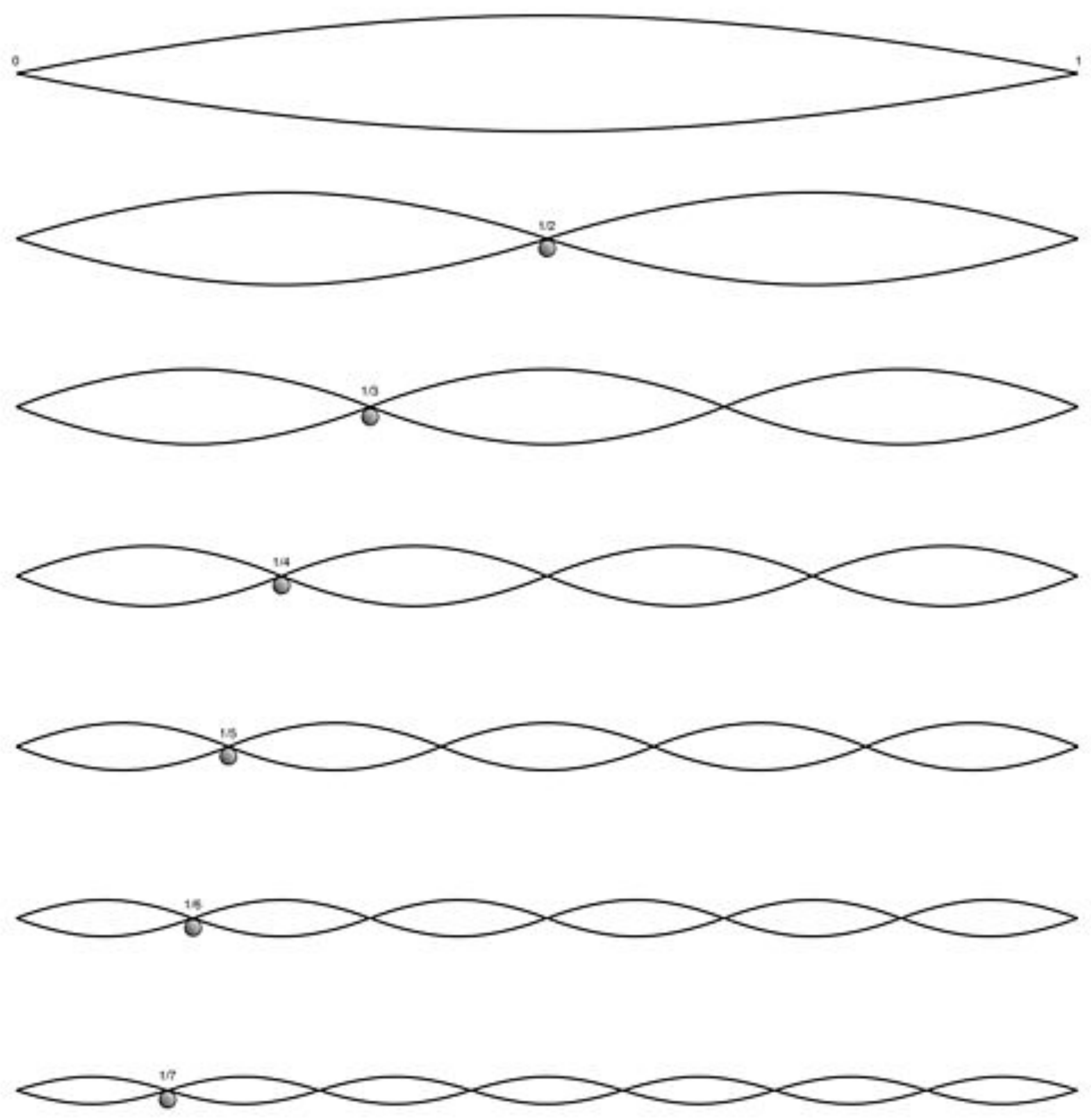
https://www.youtube.com/watch?v=wvJAgrUBF4w

Prato de Chladni



Música & Instrumentos Musicais

- Vimos na última aula que quando puxamos uma corda presa nas duas extremidades, como a de um violão ou de um violino, excitamos várias frequências além da fundamental



frequência fundamental ou primeiro harmônico (nota)

segundo harmônico ou primeiro sobretom

terceiro harmônico ou segundo sobretom

quarto harmônico ou terceiro sobretom

quinto harmônico ou quarto sobretom

sexto harmônico ou quinto sobretom

sétimo harmônico ou sexto sobretom

- Essas outras frequências excitadas, múltiplas da fundamental, são os chamados harmônicos

- A amplitude de cada frequência excitada é proporcional ao coeficiente da decomposição de Fourier que cai com n, assim a nota musical é a frequência fundamental, i.e. a de maior intensidade

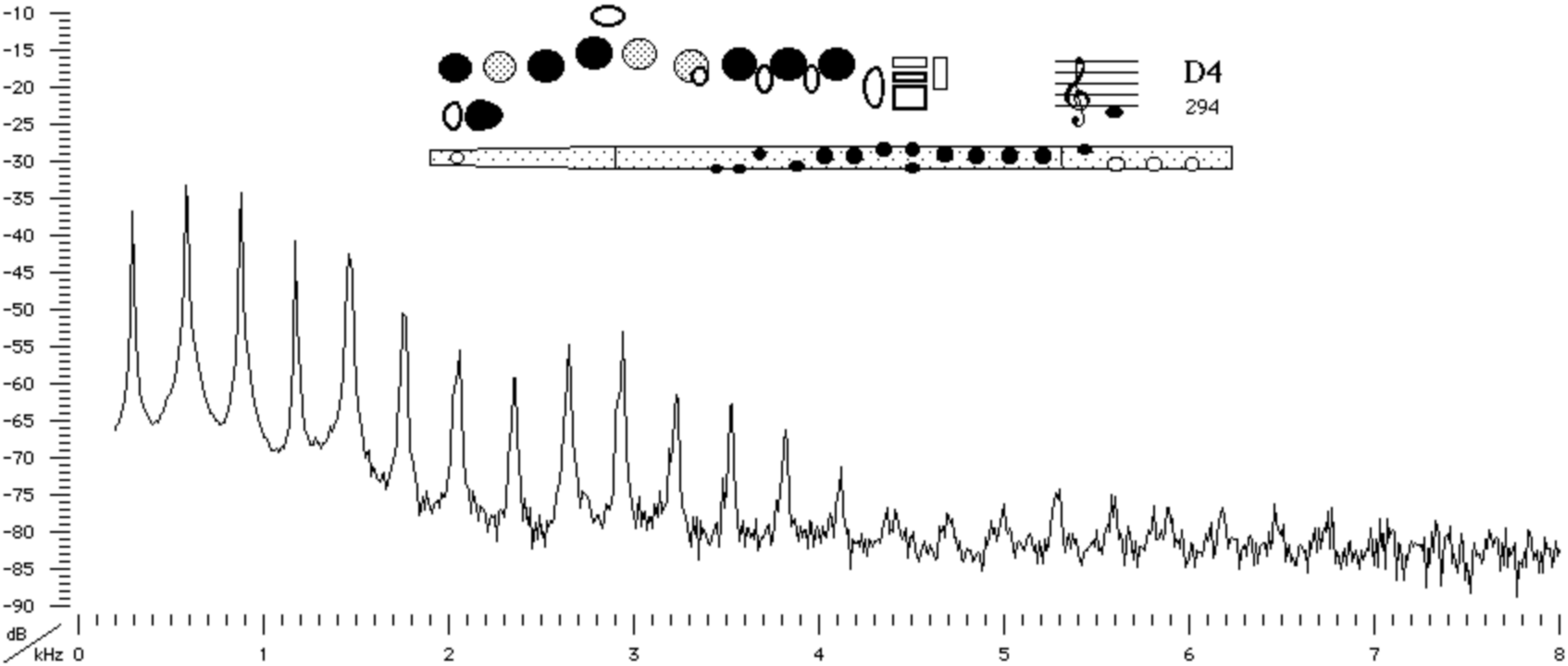
Em geral os instrumentos musicais terão amplitudes significantes para muitos harmônicos...mesmo que você toque a nota G4 (392 Hz) em uma flauta além da frequência fundamental você vai excitar muitos outros modos com amplitudes significativa!
Esses modos são todos os harmônicos mais altos que o fundamental.
Esses harmônicos determinam como é o som de um instrumento ou o seu timbre

Timbre é como uma nota soa quando tocada por um determinado instrumento musical

Qual a razão disso ?

Instrumentos diferentes representam condições de contorno diferentes, materiais diferentes, montagem etc.

clarineta flauta saxofone



clarineta flauta saxofone

Timbre dos Instrumentos Musicais

https://www.youtube.com/watch?v=YeB9sQiQKfM