PV3321 - Métodos de Otimização Aplicados a Sistemas de Engenharia

Redes

Miguel Cezar Santoro
agosto 2020

GRAFOS

Grafo G=(N,A) é um conjunto de N nós e de A arcos.

Arco é um par (i,j) de nós i,j∊A. Um arco pode ser direcionado ou não direcionado com indicação por setas.

Um grafo Direcionado/NãoDirecionado contém arcos direcionados/não direcionados.

Um caminho (path) num grafo é uma sequência específica de arcos na qual o nó inicial de cada arco é idêntico ao final do arco precedente na sequência. O caminho é aberto (open) se o nó final é diferente do inicial e fechado no caso do nó inicial ser o mesmo nó final (closed), caso em que o caminho é um circuito ou ciclo (circuit or cycle).

Um grafo é completo se existe um caminho ligando qualquer par de nós do grafo.

REDES

Caminho Direto = sequência de nós ou arcos de um grafo direcionado, sem repetição dos nós ou arcos (ou simplesmente caminho).

Ciclo Direto = caminho direto com ligação entre nó inícial e final (ou simplesmente ciclo).

Grafo Acíclico = o que não contém nenhum ciclo (tree).

Grafo Bipartido = Grafo G=(N,A) que pode ser particionado em dois subconjuntos O e D tal que qualquer arco (i,j)ϵA tem i em O e j em D. São úteis para caracterizar problemas de transporte.

Rede = grafo mais informação numérica associada aos arcos ou aos nós, como por exemplo comprimento, distância, capacidade de fluxo e custo, entre outras. São úteis para caracterizar problemas reais de fluxo em redes.

OTIMIZAÇÃO EM REDES DIRECIONADAS

Em programação linear existe um conjunto de modelos para otimização de redes direcionadas, também chamados modelos de fluxo em redes ou mesmo modelos de fluxos em grafos direcionados. Apresentam característics especiais que permitem a utilização de algoritmos bem mais eficientes do que o simplex para a abtenção da solução de problemas de médio e grande portes por eles representados. O presente material tratará da modelagem dessa classe de problemas através da programação linear e o chamaremos simplesmente problema de redes.

Esses problemas podem ser representados esquematicamente por redes por cujos arcos "fluem" coisas originadas de nós, destinadas a nós e passando por nós.

As duas tabelas seguintes fornecem a caracterização dos problemas de otimização de redes e as diferenças comumente encontradas nas formulações matemáticas

OTIMIZAÇÃO EM REDES DIRECIONADAS

Características dos Problemas de Otimização de Redes							
		problema possui nós			fluxos	
PROBLEMA	OBJETIVO	Origem	Transf	Destino	>=1	1
Transporte	min custo	v		v	v	
Designação	min custo	v		v		v
Caminho Crítico	min tempo	v	v	v		v
Fluxo de Mínimo Custo	min custo	v	v	v	v	
Fluxo Máximo	max fluxo	v	v	v	v	
Caminho Mais Curto	min distância	v	v	v		v
Caminho Mais Longo	max distância	v	v	v		v

OTIMIZAÇÃO EM REDES DIRECIONADAS

Características Comuns dos Modelos Matemáticos Lineares Simples e de Redes	
Modelo Linear Simples	**Modelo Linear de Rede**
$obj = min/max \sum_{j \epsilon J} c_{j.X_j}$	$obj = min/max \sum_{i,j \epsilon N} c_{ij.X_{ij}}$
$limitaçao\ superior\ de\ recursos$: $\sum_{j \epsilon N} a_{ij.X_j} \leq b_i \quad (i \epsilon \mathrm{I})$	$equação\ de\ equilíbrio\ de\ fluxo$: $\sum_{j \epsilon N} c_{ji.Xi_j} - \sum_{j \epsilon N} c_{ij.Xi_j} = Ki \quad (i \epsilon N)\ (Ki > 0; 1; 0; -1; < 0)$
$x_j \geq 0$	$restrição\ de\ capacidade$: $x_{ij} \epsilon \{0, Cij\} \quad (Cij > 0; 1)$

MIGUEL CEZAR SANTORO

PROBLEMA DE TRANSPORTE (Transportation Problem)

É um problema representado por redes bi-partidas, sem nós de transito, de forma que de um nó ou sai ou entra fluxo somente, o que permite separar a rede em dois conjuntos - o conjunto de origens ou pontos de oferta O (supply points) e o de destinos ou pontos de demanda D (demand points).

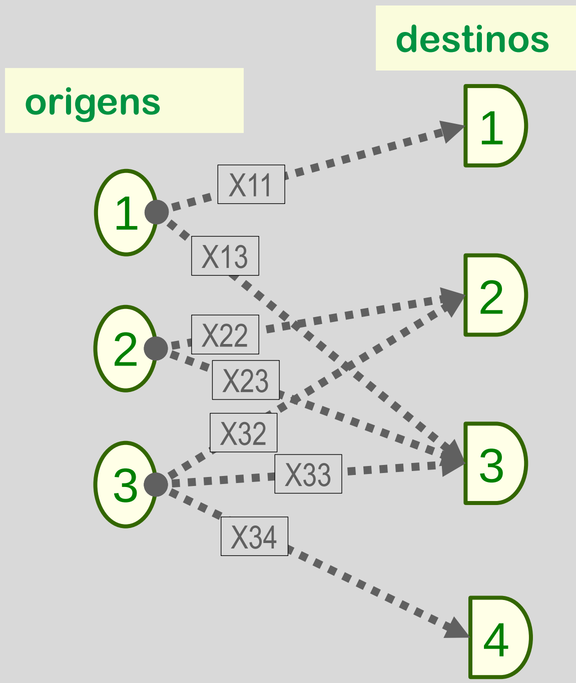
Cada ponto de origem i pode expedir até si unidades e cada ponto de demanda j pode consumir até dj unidades.

Cada unidade expedida de i para j incorre num custo variável cij.

A solução do problema deve determinar o que deve fluir das origens para os destinos para se obter o mínimo custo.

Caso a somatória das ofertas seja superior a das demandas pode-se balancear o problema criando-se um nó de demanda fictício (dummy demand point) com a demanda igual a oferta em excesso e com custos de transportes nulos.

Problema de Transporte - Exemplo



Problema de Transporte - Formulação

i = 1…m = pontos de origem
j = 1…n = pontos de destino
c_{ij} = custo de transporte da origem i ao destino j
x_{ij} = quantidade transportada de i para j

$$\sum_{i=1}^{m} s_i \geq \sum_{j=1}^{n} d_j$$

problema de transporte não balanceado

$$min \sum_i \sum_j c_{ij} x_{ij}$$

s.t.:

$$\sum_{j \in N} x_{ij} \leq si \qquad \forall i$$

$$\sum_{i \in N} x_{ij} \geq dj \qquad \forall j$$

$$x_{ij} \geq 0 \qquad \forall i; \forall j$$

$$\sum_{i=1}^{m} s_i = \sum_{j=1}^{n} d_j$$

problema de transporte balanceado

$$min \sum_i \sum_j c_{ij} x_{ij}$$

s.t.:

$$\sum_{j \in N} x_{ij} = si \qquad \forall i$$

$$\sum_{i \in N} x_{ij} = dj \qquad \forall j$$

$$x_{ij} \geq 0 \qquad \forall i; \forall j$$

Problema de Transporte - Exercício

Extraído de Winston, W.L. and Albright, S. C. Practical Management Science

The Grand Prix Automobile Company manufactures automobiles in three plants and then ships them to four regions of the country. The plants can supply the amounts listed in the right column of Table 5.1. The customer demands by region are listed in the bottom row of this table, and the unit costs of shipping an automobile from each plant to each region are listed in the middle of the table. Grand Prix wants to find the lowest-cost shipping plan for meeting the demands of the four regions without exceeding the capacities of the plants.

Table 5.1 Input Data for Grand Prix Example

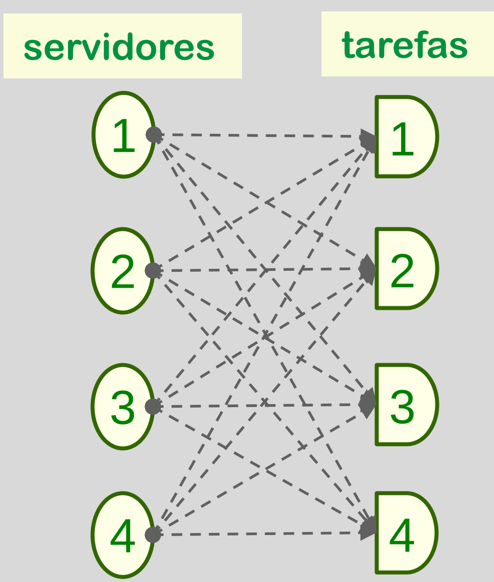
	Region 1	Region 2	Region 3	Region 4	Capacity
Plant 1	131	218	266	120	450
Plant 2	250	116	263	278	600
Plant 3	178	132	122	180	500
Demand	450	200	300	300	

Objective: To develop a spreadsheet optimization model that finds the least-cost way of shipping the automobiles from plants to regions that stays within plant capacities and meets regional demands.

PROBLEMA DE DESIGNAÇÃO (Assignment Problem)

É um caso particular do problema de transporte, portanto representado por redes bi-partidas, cuja formulação matemática obriga a solução conter fluxos somente unitários, identificando a associação uni-unívoca entre cada origem e cada destino.

Exemplo



		custo de designação cij			
		servidores			
		1	2	3	4
tarefas	1	7	9	18	6
	2	4	9	6	5
	3	11	13	14	9
	4	6	12	8	6

MIGUEL CEZAR SANTORO

Problema de Designação - Formulação

i = 1...m = pontos de origem
j = 1...n = pontos de destino
c_{ij} = custo de "transporte" da origem i ao destino j (designação de i a j)
x_{ij} = quantidade unitária "transportada" de i para j (designada de i para j - $\boldsymbol{x_{ij}} \in \{\mathbf{0}, \mathbf{1}\}$

Designação

$min \sum_i \sum_j c_{ij} x_{ij}$

s.t.:

$$\sum_{j \in N} x_{ij} = 1 \qquad \forall i$$

$$\sum_{i \in N} x_{ij} = 1 \qquad \forall j$$

$$x_{ij} \in \{0,1\} \qquad \forall i; \forall j$$

Designação Geral

$min \sum_i \sum_j c_{ij} x_{ij}$

s.t.:

$$\sum_{j \in N} x_{ij} \leq 1 \qquad \forall i$$

$$\sum_{i \in N} x_{ij} \geq 1 \qquad \forall j$$

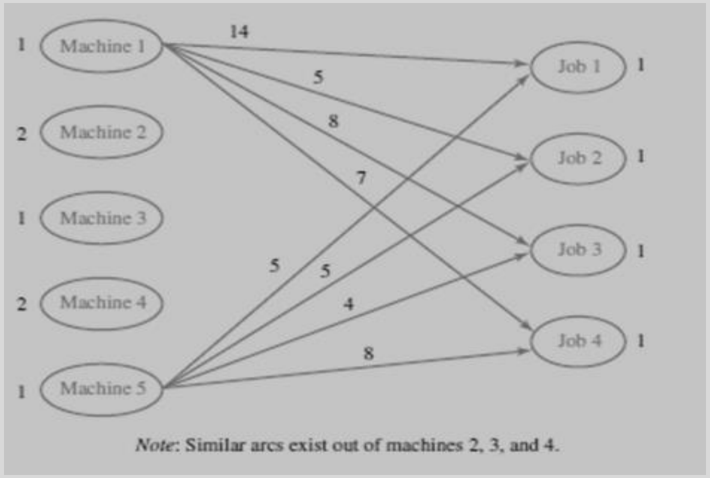
$$x_{ij} \in \{0,1\} \qquad \forall i; \forall j$$

MIGUEL CEZAR SANTORO

Problema de Designação - Exercício

Extraído de Winston, W.L. and Albright, S. C. Practical Management Science

Suppose there are four jobs and five machines. Every pairing of a machine and a job has a given job completion time. The problem is to assign the machines to the jobs so that the total time to complete all jobs is minimized. Next figure is a Network Representation of Assignment of Machines to Jobs. We see that four jobs must be completed by five machines. Machines 1, 3, and 5 can handle at most one job apiece, whereas machines 2 and 4 can handle two jobs apiece.



	Job			
Machine	1	2	3	4
1	14	5	8	7
2	2	12	6	5
3	7	8	3	9
4	2	4	6	10
5	5	5	4	8

Times to perform jobs on various machines

Objective: To develop a spreadsheet optimization model that finds the minimum time assignement of machnes to jobs within constraints .

CAMINHO CRÍTICO (Critical Path Method)

O método do caminho crítico (Critical Path Method ou CPM) aplica-se em projetos e pode ser utilizado para determinar:

1. O início e fim das atividades (project scheduling) e consequente fim do projeto.
2. O caminho crítico com as atividades cujo atraso implica no atraso do projeto.
3. A folga das atividades não críticas.

Programação Linear também pode ser utilizada para determinar a duraçao do projeto e o caminho crítico.

Mostraremos CPM através de um exemplo simples para depois aplicar programação linear.

CPM - Exemplo

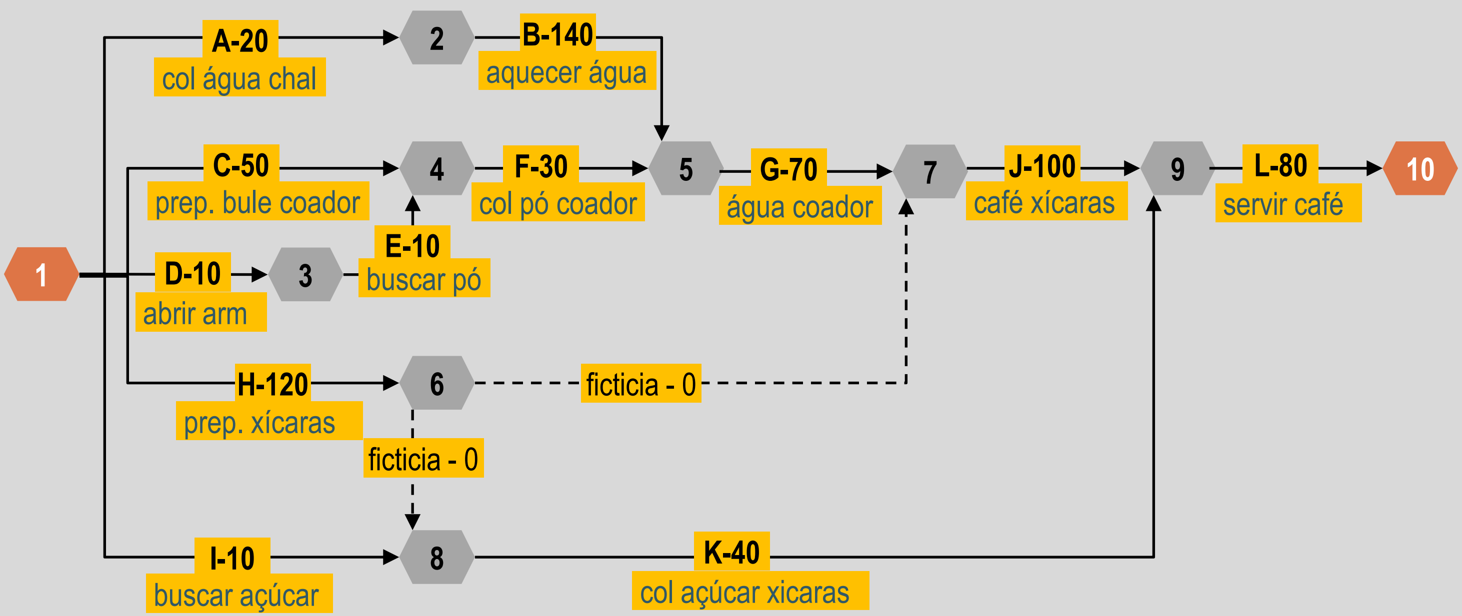
Projeto Café

CodAtiv	DescrAtiv	CodPrec	Dur	RecQtde
A	Colocar água na chaleira		20	Mu;Chal
B	Aquecer a água	A	140	Fog;Chal
C	Preparar bule e coador		50	Mu;Bule
D	Abrir armário		10	Mu
E	Buscar pó no armário	D	10	Mu
F	Colocar pó no coador	C;E	30	Mu
G	Colocar água no coador	B;F	70	Mu
H	Preparar xícaras		120	Mu;Xic
I	Buscar açúcar		10	Mu
J	Colocar café nas xícaras	G;H	100	Mu;Bule;Xic
K	Colocar açúcar nas xícaras	H;I	40	Mu;Xic
L	Servir café	J;K	80	Mu[02]

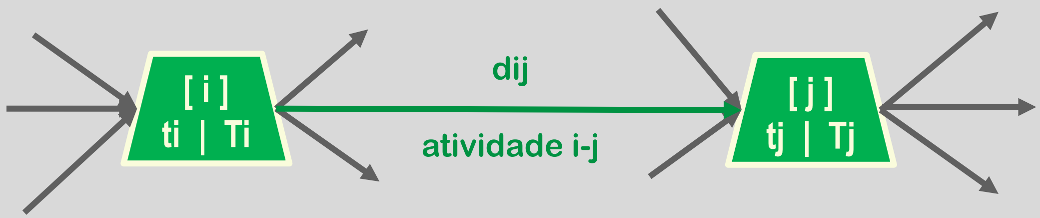
Mu = mulher
Fog = fogão
Cha = chaleiral
Bule
Xic = xícaras

CPM - Rede

Rede com Atividades nos arcos

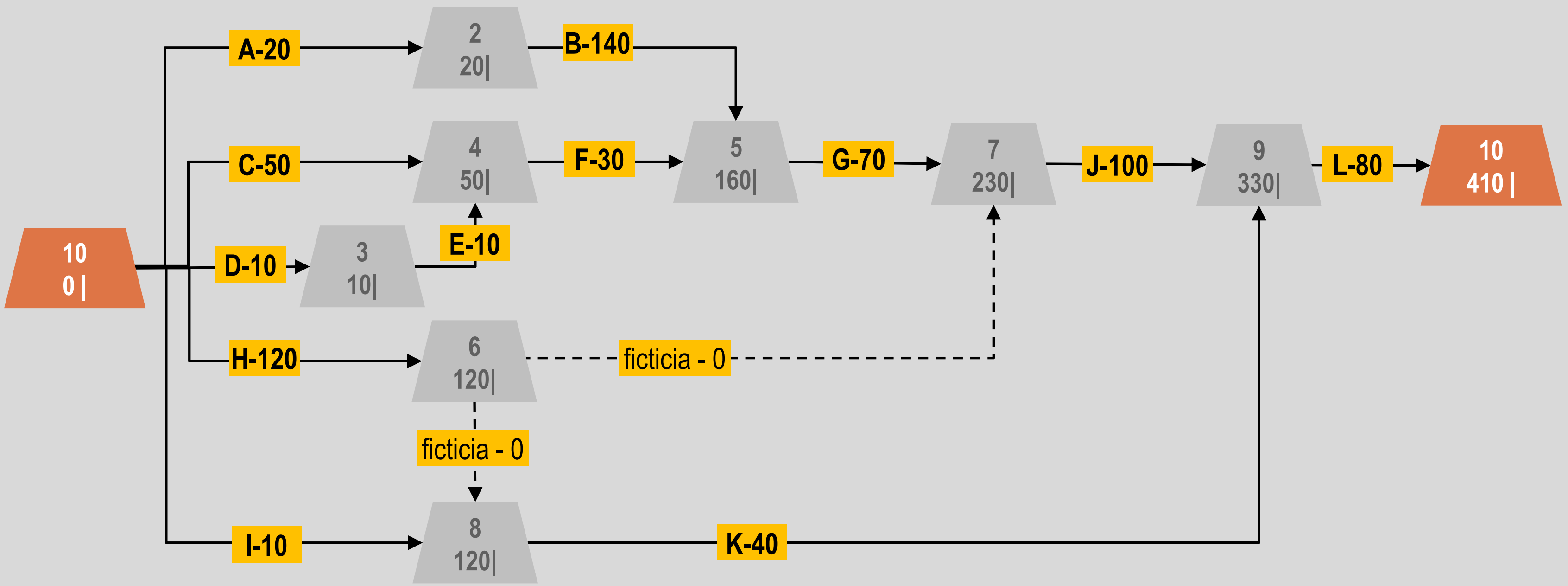


CPM - Datas

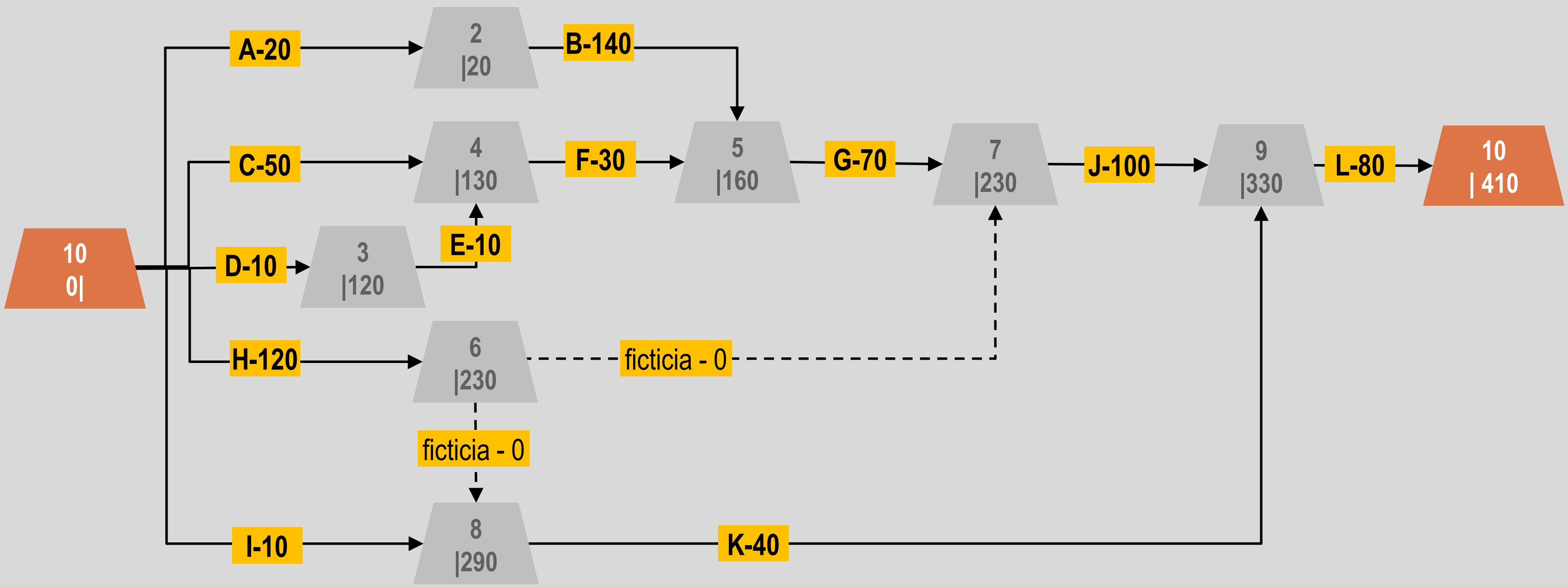


Ti=última data de término de qualquer antecessor de i-j
tj=primeira data de início de qualquer sucessor de i-j

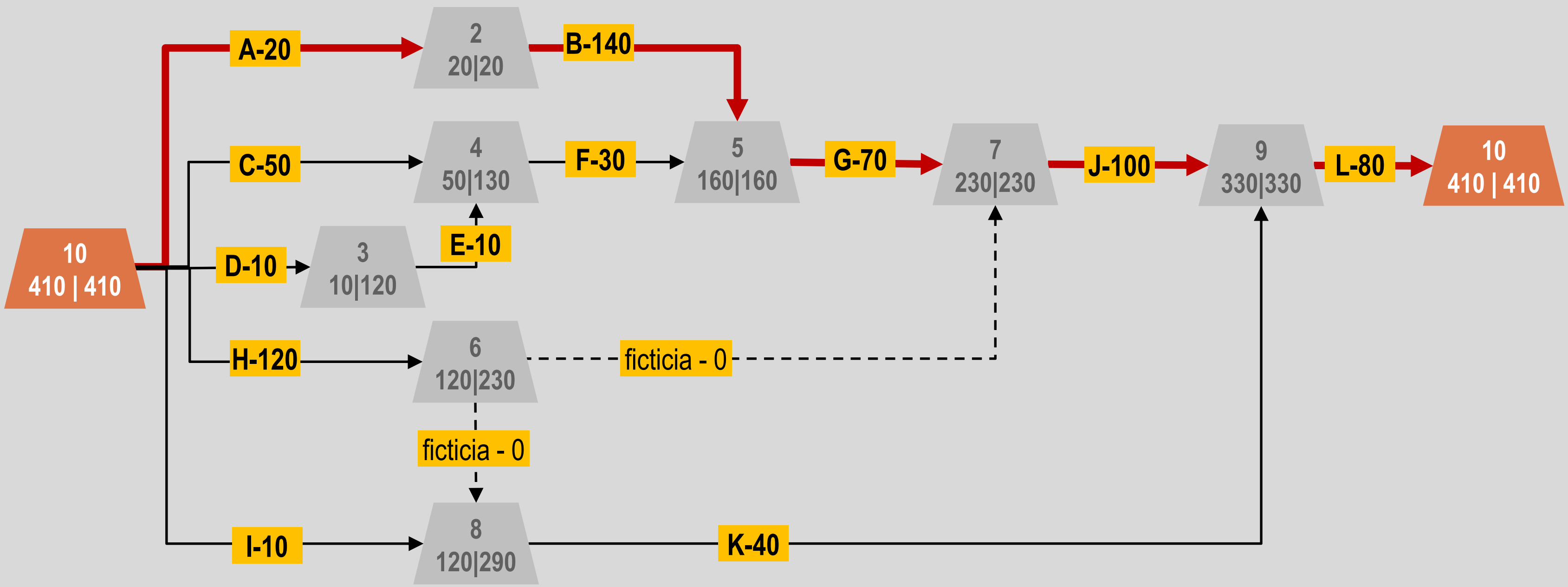
CPM – Datas mais cedo



CPM – Datas mais tarde

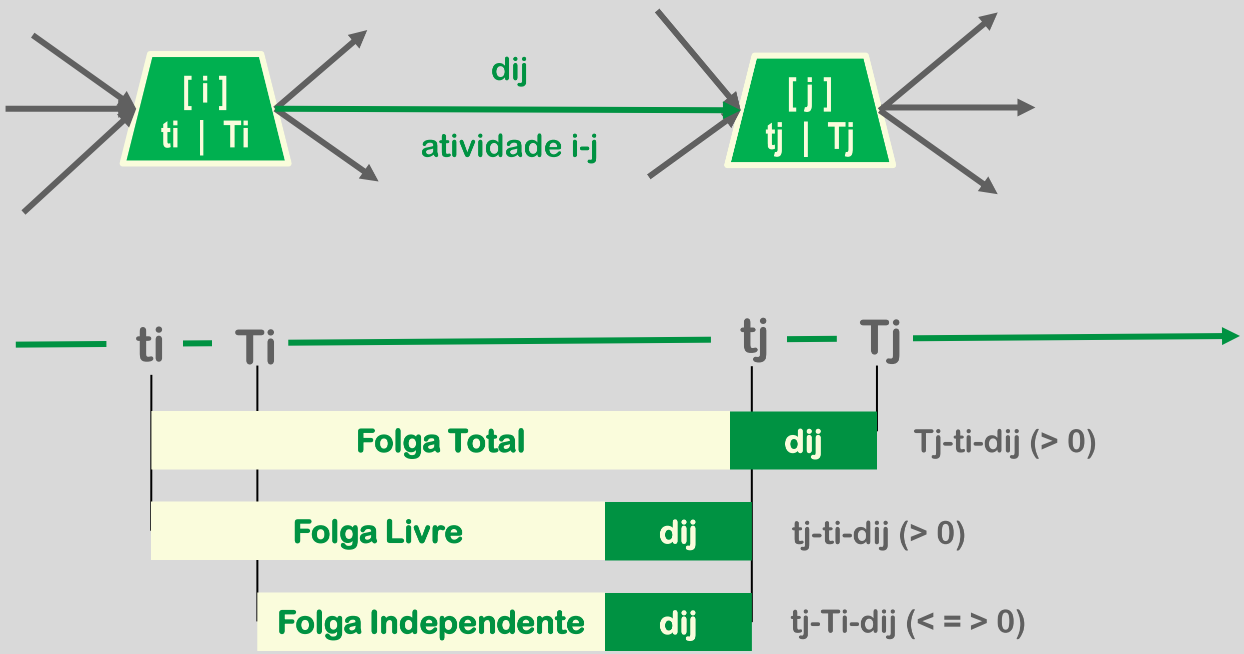


CPM – Datas mais cedo e mais tarde

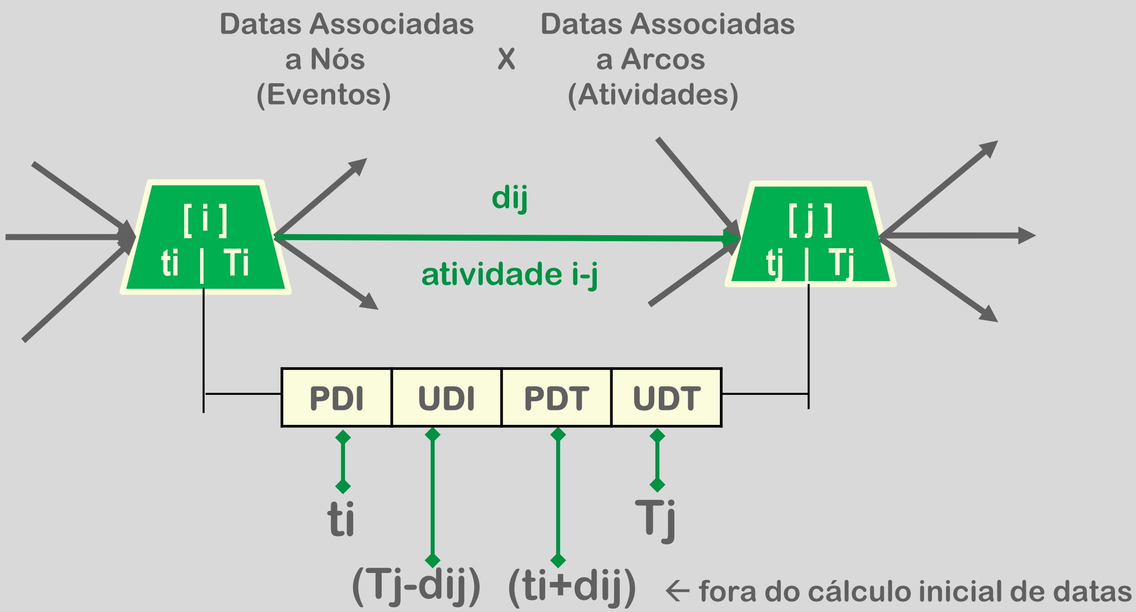


Atividades críticas => [ti=Ti; tj=Tj; dij=tj-ti]

CPM – Folgas


[i]
ti | Ti
dij
atividade i-j
[j]
tj | Tj
ti
Ti
tj
Tj
Folga Total
dij
Tj-ti-dij (> 0)
Folga Livre
dij
tj-ti-dij (> 0)
Folga Independente
dij
tj-Ti-dij (< = > 0)

CPM – Datas nos nós e nos arcos



Ti=última data de término de qualquer antecessor de i-j
tj=primeira data de início de qualquer sucessor de i-j

i = nó origem
j = nó destino

PDI = primeira data de início
UDI = última data de início
PDT = primeira data de término
UDT = última data de término

MIGUEL CEZAR SANTORO

CPM – Resumo do cálculo de datas

i = nó origem   PDI = primeira data de início
j = nó destino   UDI = ultima data de início
PDT = primeira data de término
UDT = ultima data de término

ATIV	COD i-j	DUR dij	PDI ti	UDI Tj-dij	PDT ti+dij	UDT Tj	FT Tj-ti-dij	FL tj-ti-dij	FI tj-Ti-dij	
A	1-2	20	0	0	20	20	0	0	0	CRI
B	2-5	140	20	20	160	160	0	0	0	CRI
C	1-4	50	0	80	50	130	80	0	0	
D	1-3	10	0	110	10	120	110	0	0	
E	3-4	10	10	120	20	130	110	30	-80	
F	4-5	30	50	130	80	160	80	80	0	
G	5-6	70	160	160	230	230	0	0	0	CRI
H	1-6	120	0	110	120	230	110	0	0	
I	1-8	10	0	280	10	290	280	110	110	
J	7-9	100	230	230	330	330	0	0	0	CRI
K	8-9	40	120	290	160	330	170	170	0	
L	9-10	80	330	330	410	410	0	0	0	CRI

CPM – Formulação matemática

$\min Z = \sum_i x_i$

s.t.:

$x_j - x_i \geq t_{ij} \quad \forall ij \in A$

$x_i, x_j \geq 0$

x_i=data mais cedo de término do nó i

x_j=data mais cedo de término do nó j

t_{ij}=duração da atividade i-j

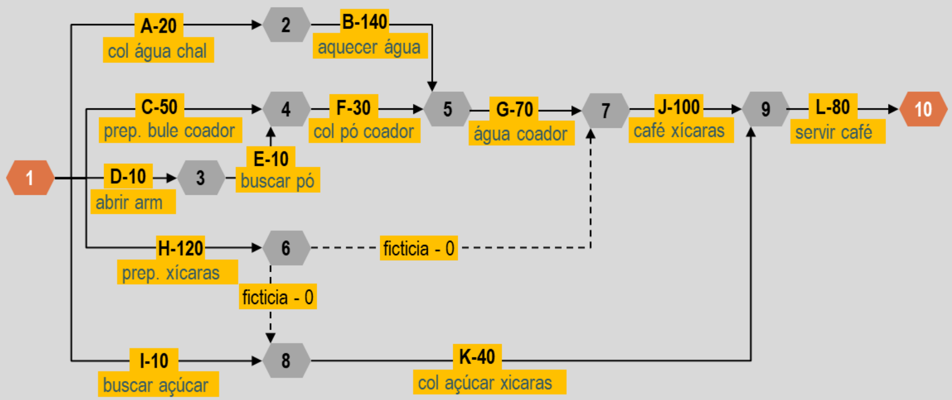
A solução define a data mais cedo de término dos nós e a duração do projeto.

CPM – Exercício

A tabela a seguir mostra as atividades necessárias para fazer e servir um café, suas precedências e durações. A rede do projeto está na figura seguinte. O empreiteiro deseja saber qual é a é a data mais cêdo que o projeto pode terminar.

Rede

CodAtiv	DescrAtiv	CodPrec	Dur	Nó origem	Nó destino
A	Colocar água na chaleira		2	1	2
B	Aquecer a água	A	14	2	5
C	Preparar bule e coador		5	1	4
D	Abrir armário		1	1	3
E	Buscar pó no armário	D	1	3	4
F	Colocar pó no coador	C;E	3	4	5
G	Colocar água no coador	B;F	7	5	7
H	Preparar xícaras		12	1	6
I	Buscar açúcar		1	1	8
J	Colocar café nas xícaras	G;H	10	7	9
K	Colocar açúcar nas xícaras	H;I	4	8	9
L	Servir café	J;K	8	9	10
M	Fictícia 1	H	0	6	7
N	Fictícia 2	H	0	6	8

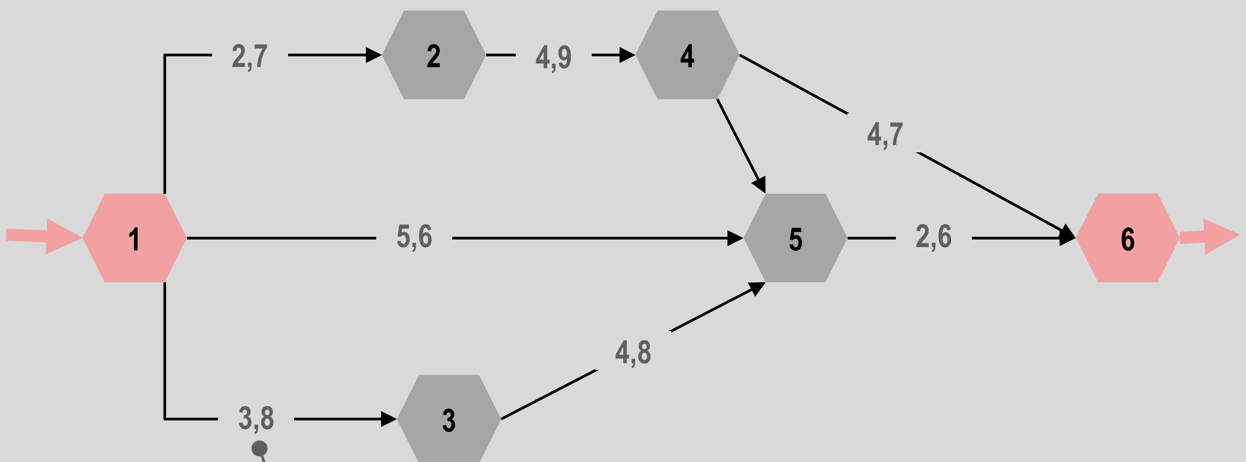


Desenvolva uma planilha que permita simular decisões de programação das atividades e resolva o problema de decisão utilizando o Solver do Excel.

MIGUEL CEZAR SANTORO

FLUXO DE MÍNIMO CUSTO (minimum-cost network flow)

É o problema de rede mais geral cujo objetivo é obter o fluxo de mínimo custo que leva itens das origens aos destinos fluindo pelos nós de transito. A seguir exemplificamos uma rede:



cij,Uij = custo e capacidade associados ao arco i -> j

FLUXO DE MÍNIMO CUSTO - Formulação

$i, j \in$ N: $ij \in$ A
c_{ij} = custo de transporte de uma unidade do nó i para o nó j
x_{ij} = quantidade de fluxo de i para j
L_{ij} = Limite inferior (lower bound) de fluxo de i para j $(L_{ij} \geq 0)$
U_{ij} = Limite superior (upper bound) de fluxo de i para j
b_i = fluxo líquido (saídas – entradas) do nó i
d_j = demanda do nó j

$$min \sum_{ij \in A} c_{ij} x_{ij}$$

s.t.:

$$\sum_{j \in N} x_{ij} - \sum_{k \in N} x_{\mathrm{ki}} = b_i \quad \forall i \in N$$ <- equação de equilíbrio de fluxo

$$\sum_{i \in N} x_{ij} = dj \qquad \forall j \in N$$

$$b_1 > 0 \quad (nó\ origem/oferta)$$
$$b_n < 0 \quad (nó\ destino/demanda)$$
$$b_1 = 0 \quad (nó\ de\ transito)$$

$$L_{ij} \leq x_{ij} \leq U_{ij} \qquad \forall ij$$

FLUXO DE MÍNIMO CUSTO - Exercício

Extraído de Winston, W.L. and Albright, S. C. Practical Management Science

The RedBrand Company produces a tomato product at three plants. This product can be shipped directly to the company's two customers, or it can first be shipped to the company's two warehouses and then to the customers. Figure 5.17 is a network representation of RedBrand's problem. Nodes 1, 2, and 3 represent the plants (these are the suppliers, denoted by S), nodes 4 and 5 represent the warehouses (these are the transshipment points, denoted by T), and nodes 6 and 7 represent the customers (these are the demanders, denoted by D). Note that we allow the possibility of some shipments among plants, among warehouses, and among customers. Also, some arcs have arrows on both ends, which means that flow is allowed in either direction.

The cost of producing the product is the same at each plant, so RedBrand is concerned with minimizing the total shipping cost incurred in meeting customer demands. The production capacity of each plant (in tons per year) and the demand of each customer are shown in Figure 5.17. For example, plant 1 (node 1) has a capacity of 200, and customer 1 (node 6) has a demand of 400. In addition, the cost (in thousands of dollars) of shipping a ton of the product between each pair of locations is listed in Table 5.7, where a blank indicates that RedBrand cannot ship along that arc. We also assume that at most 200 tons of the product can be shipped between any two nodes. This is the common arc capacity. RedBrand wants to determine a minimum-cost shipping schedule.

FLUXO DE MÍNIMO CUSTO - Exercício

Figure 5.17 Graphical Representation of the RedBrand Logistics Model

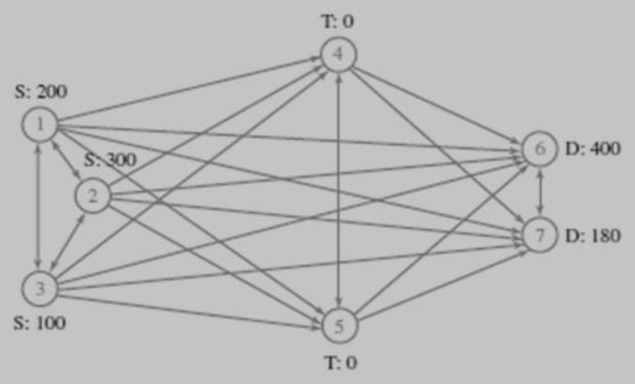


Table 5.7 Shipping Costs for the RedBrand Example

	To node						
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**
From node 1		5.0	3.0	5.0	5.0	20.0	20.0
2	9.0		9.0	1.0	1.0	8.0	15.0
3	0.4	8.0		1.0	0.5	10.0	12.0
4					1.2	2.0	12.0
5				0.8		2.0	12.0
6							1.0
7						7.0	

Objective: To find the minimum-cost way to ship the tomato product from suppliers to customers, possibly through warehouses, so that customer demands are met and supplier capacities are not exceeded.

FLUXO MÁXIMO (Maximum-Flow)

É um problema derivado diretamente do de fluxo de mínimo custo alterando-se o objetivo para o de obter o fluxo máximo possível do nó origem ao nó destino fluindo pelos nós de transito.

Para a formulação matemática do problema deve-se considerar:
1 A quantidade que flui através de um arco deve ser menor do que sua capacidade.
2 Em todo nó de transbordo a quantidade que entra é igual à que sai.
3 O fluxo que entra na origem é 0.
4 O fluxo que sai do destino é 0.
5 O que sai da origem é igual ao que entra no destino.

FLUXO MÁXIMO - Formulação

$i, j \in$ N: $ij \in$ A
x_{ij} = quantidade de fluxo de i para j
L_{ij} = Limite inferior (lower bound) de fluxo de i para j $(L_{ij} \geq 0)$
U_{ij} = Limite superior (upper bound) de fluxo de i para j
b_i = fluxo líquido (saídas – entradas) do nó i

$$max \sum_{ij \in A} f$$

s.t.:

$$\sum_{j \in N} x_{ij} - \sum_{j \in N} x_{ji} = b_i \quad \forall i \in N$$

$$b_1 = f \quad (nó\ origem/oferta)$$
$$b_n = -f (nó\ destino/demanda)$$
$$b_1 = 0 \quad (nó\ de\ transito)$$

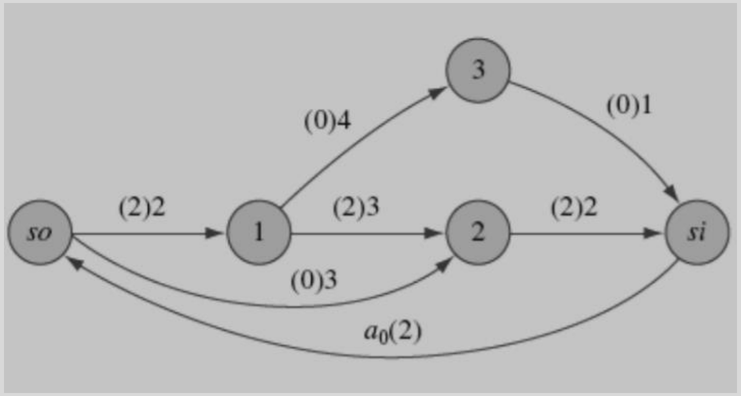
$$L_{ij} \leq x_{ij} \leq U_{ij} \qquad \forall ij$$

b_i => 0 nó origem (oferta)
b_i < 0 nó destino (demanda)
b_i = 0 nó de transito (transbordo)

FLUXO MÁXIMO - Exercício

Sunco Oil wants to ship the maximum possible amount of oil (per hour) via pipeline from node so (source) to node si (sink) in the next figure. On its way from node so to node si, oil must pass through some or all of stations 1, 2, and 3. The various arcs represent pipelines of different diameters. The maximum number of barrels of oil (millions of barrels per hour) that can be pumped through each arc is shown in the next table. Each number is called an arc capacity. For reasons that will soon become clear, we have added an artificial arc a0 from the sink to the source. The flow through a0 is not actually oil, hence the term artificial arc.

Arc	Capacity
(*so*, 1)	2
(*so*, 2)	3
(1, 2)	3
(1, 3)	4
(3, *si*)	1
(2, *si*)	2



Objective: To find the maximum number of barrels of oil (millions of barrels per hour) that can be sent from the source to the sink pumped through each arc.

MIGUEL CEZAR SANTORO

CAMINHO MAIS CURTO (Shortest Path Problem)

É o problema de encontrar o menor caminho de uma origem a um destino. É derivado do de fluxo de mínimo custo considerando uma única origem, um único destino, fluxos somente unitários e distâncias em lugar de custos.

CAMINHO MAIS CURTO - Formulação

$i, j = 1 \dots n$: $ij \in$ A
d_{ij} = distância de transporte do nó i para o nó j
$x_{ij} \in \{0,1\}$ (arco possui ou não fluxo)
b_i = fluxo líquido (saídas – entradas) do nó i

$$min \sum_{ij \in A} d_{ij} x_{ij}$$

s.t.:

$$\sum_{j \in N} x_{ij} - \sum_{j \in N} x_{\mathrm{ji}} = b_i \quad \forall i \in N$$ <- equação de equilíbrio de fluxo

$$b_1 = 1 \quad (nó\ origem/oferta)$$
$$b_n = -1 \quad (nó\ destino/demanda)$$
$$b_1 = 0 \quad (nó\ de\ transito\ i\#1\ e\ i\#n)$$

$x_{ij} \in \{0,1\}$ ou $x_{ij} \leq 1$

Quando a variável x_{ij} possui o valor 1 na solução, identifica o arco do caminho escolhido. Poderíamos pensar que, como a formulação é linear, o fluxo se subdividiria e teria valor entre 0 e 1 na solução, mas demonstra-se que, se todos os dados são inteiros, essa formulação terá, também, uma solução inteira.

CAMINHO MAIS CURTO - Exercício

Extraído de Winston, W.L. and Albright, S. C. Practical Management Science

I have just purchased (at time 0) a new car for $12,000. The cost of maintaining a car during a year depends on its age at the beginning of the year, as given in next table. To avoid the high maintenance costs associated with an older car, I may trade in my car and purchase a new car. The price I receive on a trade-in depends on the age of the car at the time of trade-in (next table). To simplify the computations, we assume that at any time, it costs $12,000 to purchase a new car.

Age of Car (Years)	Annual Maintenance cost	Age of Car (Years)	Trade-in Price
0	$2,000	1	$7,000
1	$4,000	2	$6,000
2	$5,000	3	$2,000
3	$9,000	4	$1,000
4	$12,000	5	$0

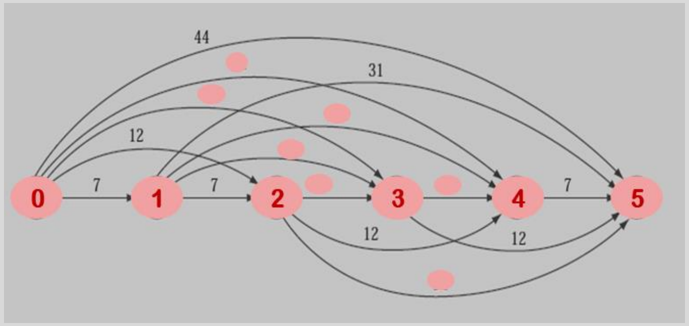
Create an Excel spreadsheet model for this problem and use solver to find the minimum net cost (purchasing costs + maintenance costs - money received in trade-ins) incurred during the next five years.

CAMINHO MAIS CURTO - Exercício

Dica: construa uma rede mostrando todos os caminhos altenativos possíveis para sair do instante 0 (nó 0) até chegar no instante 5 (nó 5).

	0	1	2	3	4	5
NewCarValue (inst t)	12000	12000	12000	12000	12000	0
Maint cost (per t)		2000	4000	5000	9000	12000
AcumMaintCost (inst t)		2000	6000	11000	20000	32000
Trade-in price (inst t)		7000	6000	2000	1000	0

	To					
From	0	1	2	3	4	5
0	99999	7000	12000			44000
1	99999	99999	7000			31000
2	99999	99999	99999		12000	
3	99999	99999	99999	99999		12000
4	99999	99999	99999	99999	99999	7000
5	99999	99999	99999	99999	99999	99999



	To					
From	0	1	2	3	4	5
0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0
2	0	0	0	0	0	0
3	0	0	0	0	0	0
4	0	0	0	0	0	0
5	0	0	0	0	0	0