Teorema IV (01. Espaços Vetoriais , Slide 33)

PROVA :

Suponha que $\vec{v} \in V$ pode ser escrito de maneiras distintas como CL dos vetores de B :

$$\vec{v} = a_1 \vec{v_1} + a_2 \vec{v_2} + \dots + a_n \vec{v_n}$$

e

$$\vec{v} = b_1 \vec{v_1} + b_2 \vec{v_2} + \dots + b_n \vec{v_n}$$

Mas : $\vec{v} = \vec{v}$. Portanto :

$$a_1 \vec{v_1} + a_2 \vec{v_2} + \dots + a_n \vec{v_n} = b_1 \vec{v_1} + b_2 \vec{v_2} + \dots + b_n \vec{v_n}$$

$$\underbrace{(a_1 - b_1)}_{c_1} \vec{v_1} + \underbrace{(a_2 - b_2)}_{c_2} \vec{v_2} + \dots + \underbrace{(a_n - b_n)}_{c_n} \vec{v_n} = \vec{0}$$

Os vetores $\vec{v_1}, \vec{v_2}, \dots, \vec{v_n}$ são LI (B é base de V) ; portanto , todos $c_i = 0$. Assim :

$$\begin{cases} a_1 - b_1 = 0 \\ a_2 - b_2 = 0 \\ \vdots \\ a_n - b_n = 0 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} a_1 = b_1 \\ a_2 = b_2 \\ \vdots \\ a_n = b_n \end{cases}$$

Logo , $\vec{v}$ se exprime de maneira única como CL dos vetores de B .