Proposição (01. Espaços Vetoriais, Slide 30)

PROVA:

Seja $C' = \{\vec{w}_1, \vec{w}_2, \dots, \vec{w}_m\}$, $C' \subset V$, um conjunto arbitrário de m vetores, $m > n$. Para mostrar que C' é LD, basta mostrar que $\exists\, a_1, a_2, \dots, a_m \in \mathbb{R}$ não todos nulos tais que:

$$a_1 \vec{w}_1 + a_2 \vec{w}_2 + \dots + a_m \vec{w}_m = \vec{0} \qquad (1)$$

Como C é base de V, cada $\vec{w}_i \in C'$, $i = 1, \dots, m$, é CL dos vetores de C. Em outras palavras: $\exists\, \alpha_j, \beta_j, \dots, \phi_j$, $j = 1, \dots, n$, tais que:

$$\begin{aligned} \vec{w}_1 &= \alpha_1 \vec{v}_1 + \alpha_2 \vec{v}_2 + \dots + \alpha_n \vec{v}_n \\ \vec{w}_2 &= \beta_1 \vec{v}_1 + \beta_2 \vec{v}_2 + \dots + \beta_n \vec{v}_n \\ &\vdots \\ \vec{w}_n &= \phi_1 \vec{v}_1 + \phi_2 \vec{v}_2 + \dots + \phi_n \vec{v}_n \end{aligned} \qquad (2)$$

Substituindo as eqs. (2) na eq. (1):

$$\begin{aligned} &a_1 (\alpha_1 \vec{v}_1 + \alpha_2 \vec{v}_2 + \dots + \alpha_n \vec{v}_n) + \\ &a_2 (\beta_1 \vec{v}_1 + \beta_2 \vec{v}_2 + \dots + \beta_n \vec{v}_n) + \dots + \\ &a_m (\phi_1 \vec{v}_1 + \phi_2 \vec{v}_2 + \dots + \phi_n \vec{v}_n) = \vec{0} \end{aligned}$$

E reescrevendo (agrupando por $\vec{v}_i$):

$$\begin{aligned} &\underbrace{\boxed{(\alpha_1 a_1 + \beta_1 a_2 + \dots + \phi_1 a_m)}}_{b_1} \vec{v}_1 + \\ &\underbrace{\boxed{(\alpha_2 a_1 + \beta_2 a_2 + \dots + \phi_2 a_m)}}_{b_2} \vec{v}_2 + \dots + \\ &\underbrace{\boxed{(\alpha_n a_1 + \beta_n a_2 + \dots + \phi_n a_m)}}_{b_n} \vec{v}_n = \vec{0} \end{aligned} \qquad (3)$$

Os vetores $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n$ são LI (base); portanto, os coeficientes da CL da eq. (3) são nulos, isto é:

$$\begin{cases} \alpha_1 a_1 + \beta_1 a_2 + \ldots + \phi_1 a_m = 0 \\ \alpha_2 a_1 + \beta_2 a_2 + \ldots + \phi_2 a_m = 0 \\ \vdots \\ \alpha_n a_1 + \beta_n a_2 + \ldots + \phi_n a_m = 0 \end{cases} \qquad (4)$$

O Sistema Linear Homogêneo (SLH) definido em (4) possui m variáveis $a_1, a_2, \ldots, a_m$ ($\alpha_j, \beta_j, \ldots, \phi_j$ são conhecidos, pois são os coeficientes em termos dos vetores da base) e n equações. Como $m > n$, existem soluções não triviais ($a_i \neq 0$, $i = 1, \ldots, m$). Logo:

Sistema Possível e Indeterminado

$$C' = \{\vec{w}_1, \vec{w}_2, \ldots, \vec{w}_m\} \text{ é LD.}$$