AULAS ANTERIORES 11/09/2020

$V = G(B)$

→ o EV V é gerado pelo conjunto B ou B gera V.

* Se B gera V isso significa que qualquer $\vec{v} \in V$ pode ser escrito como CL dos vetores de B.

* Se $B = \{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n\}$, então $\forall\, \vec{v} \in V\ \exists\, a_i \in \mathbb{R}$ tal que:

$$\vec{v} = a_1 \vec{v}_1 + \ldots + a_n \vec{v}_n$$

Conjunto LD ou LI

Seja $B = \{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n\}$. Para verificar se B é LD ou LI, resolver a equação:

$$a_1 \vec{v}_1 + \ldots + a_n \vec{v}_n = \vec{0}$$

vetor nulo do referido EV

* Se $\begin{cases} a_1 = \ldots = a_n = 0 \rightarrow \text{LI (solução trivial)} \\ \exists\, a_i \neq 0 \rightarrow \text{LD} \end{cases}$

Slide 29 - Exemplos

1) B será base se $\begin{cases} \text{(i) B é LI} \\ \text{(ii) B gera V} \end{cases}$, $B = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$.

(i) LI: $\alpha_1 \vec{v}_1 + \alpha_2 \vec{v}_2 = \vec{0}$

$\alpha_1 (1,1) + \alpha_2 (-1,0) = (0,0)$

$(\alpha_1, \alpha_1) + (-\alpha_2, 0) = (0,0)$

$(\alpha_1 - \alpha_2, \alpha_1) = (0,0) \longrightarrow \begin{cases} \alpha_1 - \alpha_2 = 0 \\ \alpha_1 = 0 \end{cases}$ $\therefore\ \alpha_1 = \alpha_2 = 0$

O sistema só admite solução trivial; logo, B é LI.

(ii) Seja um vetor arbitrário $\vec{v} = (x, y) \in V$. $V = G(B)$

se, e somente se, $\forall \vec{v} \in V$ for possível escrever:

$$\vec{v} = \alpha_1 \vec{v_1} + \alpha_2 \vec{v_2}$$

($\vec{v}$ como CL dos vetores de B)

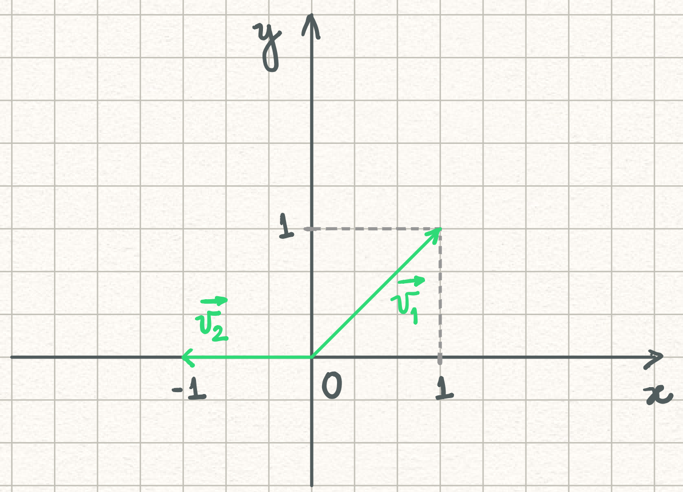
$$(x, y) = \alpha_1 (1, 1) + \alpha_2 (-1, 0)$$

$$(\alpha_1 - \alpha_2, \alpha_1) = (x, y) \longrightarrow \begin{cases} \alpha_1 - \alpha_2 = x \\ \alpha_1 = y \end{cases} \therefore \begin{cases} \alpha_1 = y \\ \alpha_2 = y - x \end{cases}$$

Como $\forall \vec{v} \in V \ \exists \alpha_i \in \mathbb{R}$ tal que

$\vec{v} = \underbrace{y}_{\alpha_1}(1, 1) + \underbrace{(y - x)}_{\alpha_2}(-1, 0)$, então B gera $V = \mathbb{R}^2$.

Assim, $B = \{(1, 1), (-1, 0)\}$ é base de $V = \mathbb{R}^2$. //



Quaisquer dois vetores não colineares (LI) de $\mathbb{R}^2$ formam uma base desse EV.

2) B será base se $\begin{cases} \text{(i) } B \text{ é LI} \\ \text{(ii) } B \text{ gera } V \end{cases}$, $B = \{M_1, M_2, M_3, M_4\}$.

(i) LI: $\alpha_1 M_1 + \alpha_2 M_2 + \alpha_3 M_3 + \alpha_4 M_4 = 0$ → $0_{2\times2}$

$$\alpha_1 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \alpha_2 \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \alpha_3 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + \alpha_4 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \alpha_3 & \alpha_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \therefore \quad \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = 0$$

O sistema só admite solução trivial; logo, B é LI.

(ii) Seja uma matriz arbitrária $M = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in V$. $V = G(B)$

se, e somente se, $\forall\, M \in V$ for possível escrever:

$$M = \alpha_1 M_1 + \alpha_2 M_2 + \alpha_3 M_3 + \alpha_4 M_4$$ (M como CL dos vetores de B)

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \alpha_1 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \alpha_2 \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \alpha_3 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + \alpha_4 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} \alpha_1 = a \\ \alpha_2 = b \\ \alpha_3 = c \\ \alpha_4 = d \end{cases} \qquad \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \alpha_3 & \alpha_4 \end{bmatrix}$$

Como $\forall\, M \in V$ $\exists\, \alpha_i \in \mathbb{R}$ tal que

$M = \underbrace{a}_{\alpha_1} M_1 + \underbrace{b}_{\alpha_2} M_2 + \underbrace{c}_{\alpha_3} M_3 + \underbrace{d}_{\alpha_4} M_4$, então B gera $V = M(2,2)$.

Assim, B é base de $V = M(2,2)$. //

Slide 30 - Exemplo da Proposição

$C = \{1, x, x^2, x^3\}$

$\longrightarrow$ é a base canônica de $V = P_3(x)$ $\therefore$ $\begin{cases} C \text{ é LI} \\ V = P_3(x) = G(C) \end{cases}$

E C'? É LD ou LI???

De acordo com a Proposição, se C' tem 5 elementos e C tem 4 elementos e gera V, então C' é LD.

** Verificando se $C' = \{p_1, p_2, p_3, p_4, p_5\}$ é LD ou LI:

$b_1 p_1 + b_2 p_2 + b_3 p_3 + b_4 p_4 + b_5 p_5 = 0 \to$ polinômio nulo

$\to 0 + 0x + 0x^2 + 0x^3$

$b_1(1+x) + b_2(1-x^2) + b_3(4+x+3x^2-x^3) +$

$b_4(2x^2-x^3) + b_5(8-2x^2+x^3) = 0$

$$\begin{cases} b_1 + b_2 + 4b_3 + 8b_5 = 0 & (1) \\ b_1 + b_3 = 0 & (2) \\ -b_2 + 3b_3 + 2b_4 - 2b_5 = 0 & (3) \\ -b_3 - b_4 + b_5 = 0 & (4) \end{cases}$$

$\to$ $\left.\begin{matrix} 4 \text{ eqs} \\ 5 \text{ incógs} \end{matrix}\right\} \to$ SLH $\to$ SP Indeterminado

Sistema Linear Homogêneo

$\downarrow$

Infinitas soluções $(\exists\, b_i \neq 0)$

Logo, C' é LD. //

Slide 30 - Teorema III

Todas as bases de um EV têm o mesmo n. elementos.

$\to$ Considere duas bases A e B $\begin{cases} A \ldots n \text{ elementos} < \begin{matrix} LI \\ V = G(A) \end{matrix} \\ B \ldots m \text{ elementos} < \begin{matrix} LI \\ V = G(B) \end{matrix} \end{cases}$

Decorre da Proposição que:

1) Se A é base, $V = G(A) \therefore m \leq n$, pois B é LI.

2) Se B é base, $V = G(B) \therefore n \leq m$, pois A é LI.

Portanto: $m = n$, de onde se conclui

que todas as bases têm o mesmo n. elementos.

Slide 31 - Exemplos

* **R** : grau de $\mathbb{R}$ indica a dimensão de V.
  - $V = \mathbb{R}^2 \longrightarrow \dim(V) = 2$
  - $V = \mathbb{R}^n \longrightarrow \dim(V) = n$

* **M** : multiplicação do n. linhas pelo n. colunas indica a dimensão de V.
  - $V = M(m,n) \longrightarrow \dim(V) = mn$ matriz retangular
  - $V = M(n,n) \longrightarrow \dim(V) = n^2$ matriz quadrada

* **P(x)** : grau do polinômio + 1 indica a dimensão de V.
  - $P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i \longrightarrow \dim(V) = n+1$
  - $P(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i \longrightarrow \dim(V) = \infty$

Slide 32 - Exemplo

$P_3(x) = \sum_{i=0}^{3} a_i x^i = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3$

$V = P_3(x)$, $\dim(V) = 4 \longrightarrow B = \{\underset{p_1}{1}, \underset{p_2}{1-x}, \underset{p_3}{x-x^2}, \underset{p_4}{x^3}\}$

UTILIZANDO DEFINIÇÃO DE BASE

B será base de V se $\begin{cases} \text{i) } B \text{ é LI} \\ \text{ii) } V = G(B) \end{cases}$

$\alpha p_1 + \beta p_2 + \gamma p_3 + \delta p_4 \begin{cases} = 0 \longrightarrow \text{LI ?} \\ = p,\ p \in V \longrightarrow V = G(B)\ ? \end{cases}$

UTILIZANDO O CONCEITO DE DIMENSÃO

$\dim(V) = 4 \longrightarrow$ B tem $\underline{\underline{4}}$ elementos $\therefore$ B é LI ou $V = G(B)$

Verificando se B é LI:

$\alpha p_1 + \beta p_2 + \gamma p_3 + \delta p_4 = 0 \rightarrow p(0)$

$\alpha(1) + \beta(1-x) + \gamma(x - x^2) + \delta(x^3) = 0 \rightarrow 0 + 0x + 0x^2 + 0x^3$

$(\alpha + \beta) + (-\beta + \gamma)x + (-\gamma)x^2 + (\delta)x^3 = 0$

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 0 \\ -\beta + \gamma = 0 \\ -\gamma = 0 \\ \delta = 0 \end{cases} \longrightarrow \alpha = \beta = \gamma = \delta = 0 \quad \therefore \quad B \text{ é LI}$$

Se B é LI, possui 4 elementos e $\dim(V) = 4$, então B é base de V !

Slide 33 - Exemplo

$p = 8 + 6x - 3x^2$. Componentes de p em relação à cada base?

Base A: $p = \alpha_1 p_1 + \alpha_2 p_2 + \alpha_3 p_3$

$$8 + 6x - 3x^2 = \alpha_1(1) + \alpha_2(x) + \alpha_3(x^2) \quad \begin{cases} \alpha_1 = 8 \\ \alpha_2 = 6 \\ \alpha_3 = -3 \end{cases}$$

$\therefore \; p_A = (8, 6, -3)$ — p_1, p_2, p_3

Base B: $p = \beta_1 p_1 + \beta_2 p_2 + \beta_3 p_3$

$$8 + 6x - 3x^2 = \beta_1(1 + x + x^2) + \beta_2(x + x^2) + \beta_3(x^2)$$

$$\begin{cases} \beta_1 = 8 \\ \beta_1 + \beta_2 = 6 \\ \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 = -3 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} \beta_1 = 8 \\ \beta_2 = -2 \\ \beta_3 = -9 \end{cases} \quad \therefore \; p_B = (8, -2, -9)$$

Base C: $p = \gamma_1 p_1 + \gamma_2 p_2 + \gamma_3 p_3$

$$8 + 6x - 3x^2 = \gamma_1 (2) + \gamma_2 (1 - x) + \gamma_3 (1 + x^2)$$

$$\begin{cases} 2\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 = 8 \\ -\gamma_2 = 6 \\ \gamma_3 = -3 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} \gamma_1 = 17/2 \\ \gamma_2 = -6 \\ \gamma_3 = -3 \end{cases}$$

$$\therefore \; p_C = \left(\frac{17}{2}, -6, -3\right)$$

Slide 34 - Exercícios

1) $\vec{v}_1 = (1,2,3)$; $\vec{v}_2 = (0,1,2)$; $\vec{v}_3 = (0,0,1)$

a) $B = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ é base? Por def. base.

B será base de V se $\begin{cases} \text{i) } B \text{ é LI} \\ \text{ii) } V = G(B) \end{cases}$

$$\alpha \vec{v}_1 + \beta \vec{v}_2 + \gamma \vec{v}_3 \begin{cases} = \vec{0} \longrightarrow \text{LI ?} \\ = \vec{v}, \; \vec{v} \in V \longrightarrow V = G(B) \text{ ?} \end{cases}$$

i) $\alpha(1,2,3) + \beta(0,1,2) + \gamma(0,0,1) = (0,0,0)$

$$\begin{cases} \alpha = 0 \\ 2\alpha + \beta = 0 \\ 3\alpha + 2\beta + \gamma = 0 \end{cases} \longrightarrow \alpha = \beta = \gamma = 0 \longrightarrow B \text{ é LI}$$

ii) $V = G(B)$ se $\forall \vec{v} = (x,y,z) \in V \; \exists \; \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ tal que:

$$\vec{v} = \alpha \vec{v}_1 + \beta \vec{v}_2 + \gamma \vec{v}_3$$

$(x,y,z) = \alpha(1,2,3) + \beta(0,1,2) + \gamma(0,0,1)$

$$\begin{cases} \alpha = x \\ 2\alpha + \beta = y \\ 3\alpha + 2\beta + \gamma = z \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} \alpha = x \\ \beta = y - 2x \\ \gamma = z - 3x - 2y \end{cases}$$

Como $\exists\ \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}\ \forall\ \vec{v} \in V$, $V = G(B)$.

Logo, B é base de V.

2) $B = \{\underbrace{x^3}_{p_1}, \underbrace{3 - x + 2x^2}_{p_2}, \underbrace{-1 + 4x - 3x^2}_{p_3}\}$ é base de $V = P_3(x)$?

$V = P_3(x)\ \therefore\ \dim(V) = 4 \longrightarrow$ há 4 vetores em uma base de V.

O conjunto B possui 3 vetores; portanto, não é base de V, uma vez que as bases de V têm 4 elementos. Como $3 < 4$, B não gera V, isto é, $V \neq G(B)$.

3) $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / 2x + y + z = 0\}$. $\dim(S)$? base de S?

$\exists$ uma relação de dependência entre essas variáveis no $\mathbb{R}^3$, que definem um plano que passa pela origem.

** Um plano possui 2 graus de liberdade $\therefore$ 2 variáveis independentes, desta forma, $\dim(S) = 2$ e a base de S possui 2 vetores LI.

1) A partir da restrição, escrever uma das variáveis em função das outras:

$$2x + y + z = 0 \longrightarrow y = -2x - z$$ x, z ... variáveis livres

2) Substituindo y em qualquer vetor de S, tem-se:

$$(x, y, z) = (x, -2x - z, z)$$

3) Reescrevendo o vetor acima como uma soma de dois vetores (separar x e z):

$$(x, y, z) = (x, -2x, 0) + (0, -z, z)$$

4) Aplicando a multiplicação de um vetor por um escalar:

$$(x, y, z) = x(1, -2, 0) + z(0, -1, 1)$$

Da expressão acima conclui-se que:

a) Qualquer $\vec{v} \in S$ é CL de $\underbrace{(1, -2, 0)}_{\vec{v_1}}$ e $\underbrace{(0, -1, 1)}_{\vec{v_2}}$

$\therefore$ $\vec{v_1}$ e $\vec{v_2}$ são geradores de S $\longrightarrow$ $S = [\vec{v_1}, \vec{v_2}]$

b) Os vetores $(1, -2, 0)$ e $(0, -1, 1)$ são LI

$(\nexists\, K \in \mathbb{R} \,/\, \vec{v_1} = K\vec{v_2})$

Se $B = \{\vec{v_1}, \vec{v_2}\}$ é LI / gera V então

B é base de S e $\dim(S) = 2$.

4) Matrizes Simétricas : $A = A^T \xrightarrow{(2,2)} M = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}$

$\dim(V) = 3 \iff B \begin{cases} (i)\ LI \\ (ii)\ V = G(B) \end{cases}$, B ... conjunto com $\underline{\underline{3}}$ elementos

$$\mathcal{B} = \left\{ \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_{M_1} ; \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}}_{M_2} ; \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{M_3} \right\}$$

(i) $\alpha M_1 + \beta M_2 + \gamma M_3 = 0 \longrightarrow 0_{2\times2}$

$$\alpha \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + \gamma \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \alpha = \beta = \gamma = 0 \ \therefore \ B \text{ é LI.}$$

(ii) $V = G(B)$ se $\forall\, M = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} \in V \ \exists\, \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ tal que:

$$M = \alpha M_1 + \beta M_2 + \gamma M_3$$

$$\begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + \gamma \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \gamma \end{bmatrix} \longrightarrow \alpha = a ; \ \beta = b ; \ \gamma = c$$

Como $\exists\, \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}\ \forall\, M \in V$, $V = G(B)$.

Logo, B é base de V e $\dim(V) = 3$

c.q.d.