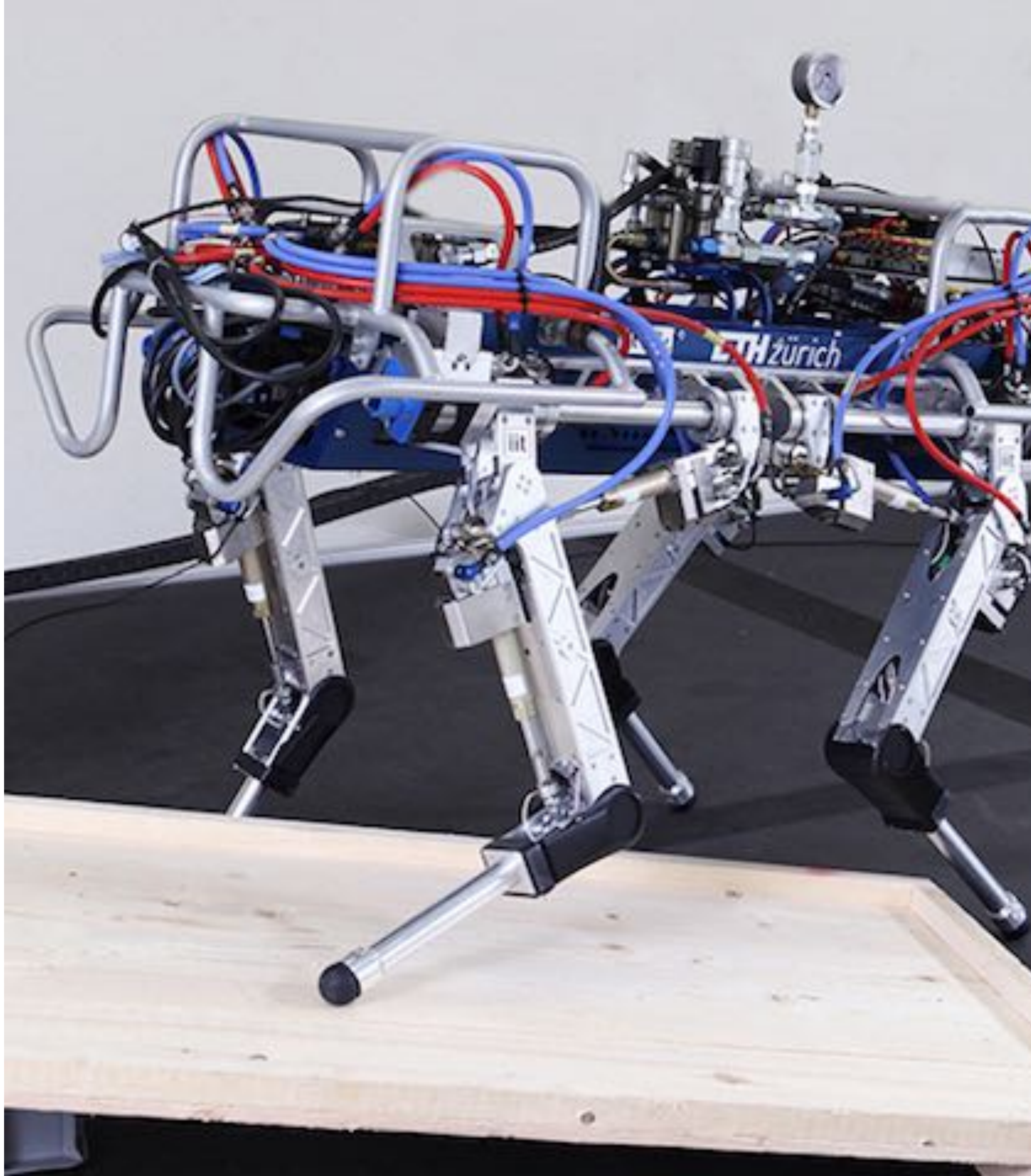
Laboratório de Controle de Robótica Avancada

SEM5950 - SEM0586
Legged Robots

Aula #4: Dinâmica inversa para robôs de base flutuante

Prof. Dr. Thiago Boaventura
tboaventura@usp.br

São Carlos, 11/09/20



Conteúdo

Revisão

- Posto e nulidade
- Pseudo-inversa
- Fatorização QR

Dinâmica

- Dinâmica de sistemas de base flutuante
- Restrições cinemáticas
- Dinâmica inversa projetada com QR

Conclusão

- Bibliografia

Conteúdo

Revisão

- Posto e nulidade
- Pseudo-inversa
- Fatorização QR

Dinâmica

Conclusão

Sistemas lineares e matrizes

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ \vdots \quad &\ \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \\ y_m &= a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \end{aligned}\right\} \quad y = Ax$$

$A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $y \in \mathbb{R}^m$ e $x \in \mathbb{R}^n$

m equações

n variáveis

Posto e nulidade de uma matriz

Revisão

Dinâmica

Conclusão

$$A \in \mathbb{R}^{m \times n}$$

Posto: $r \triangleq \text{posto}(A)$

número de linhas (equações) linearmente independentes (LI)

Nulidade: $nul(\mathbf{A}) = n - r$

diferença entre o número de colunas (variáveis) e o posto (equações LI)

Espaço nulo

Espaço $\mathcal{N}(\mathbf{A})$ com todos os vetores **x** que satisfazem:

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$$

Dimensão do espaço nulo dado pela nulidade (graus de liberdade)

$$dim(\mathcal{N}(\mathbf{A})) = nul(\mathbf{A}) = n - r$$

Inversa de uma matriz

Uma matriz só é **inversível** quando ela é **quadrada** e possui **posto completo**

Uma matriz só é **inversível** quando ela é **quadrada** e sua **nulidade** é **zero**

Pseudo-inversa (Moore-Penrose)

Revisão

Dinâmica

Conclusão

$$\boxed{A \in \mathbb{R}^{m \times n}}$$

$$\mathbf{A}^{+} = (\mathbf{A}^{T}\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^{T}$$

pseudo-inversa **esquerda**

$$m > n$$

$$\mathbf{A}^{+} = \mathbf{A}^{T}(\mathbf{A}\mathbf{A}^{T})^{-1}$$

pseudo-inversa **direita**

$$m < n$$

Solução de sistemas lineares com espaço nulo

Revisão

Dinâmica

Conclusão

$$\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$$

$$m < n$$

$$\mathbf{A}^{+} = \mathbf{A}^{T}(\mathbf{A}\mathbf{A}^{T})^{-1}$$

$$Ax = b$$

$$x = A^{+}b + (I - A^{+}A)w$$

projetor ortogonal para o espaço nulo de A

Fatoração QR

$$A \in \mathbb{R}^{m \times n}$$

$$A = Q \begin{bmatrix} R \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$Q \in \mathbb{R}^{m \times m}$$ matrix ortogonal $$Q^T = Q^{-1}$$

$$R \in \mathbb{R}^{n \times n}$$ matrix triangular superior

$$0 \in \mathbb{R}^{(m-n) \times n}$$

Conteúdo

Revisão

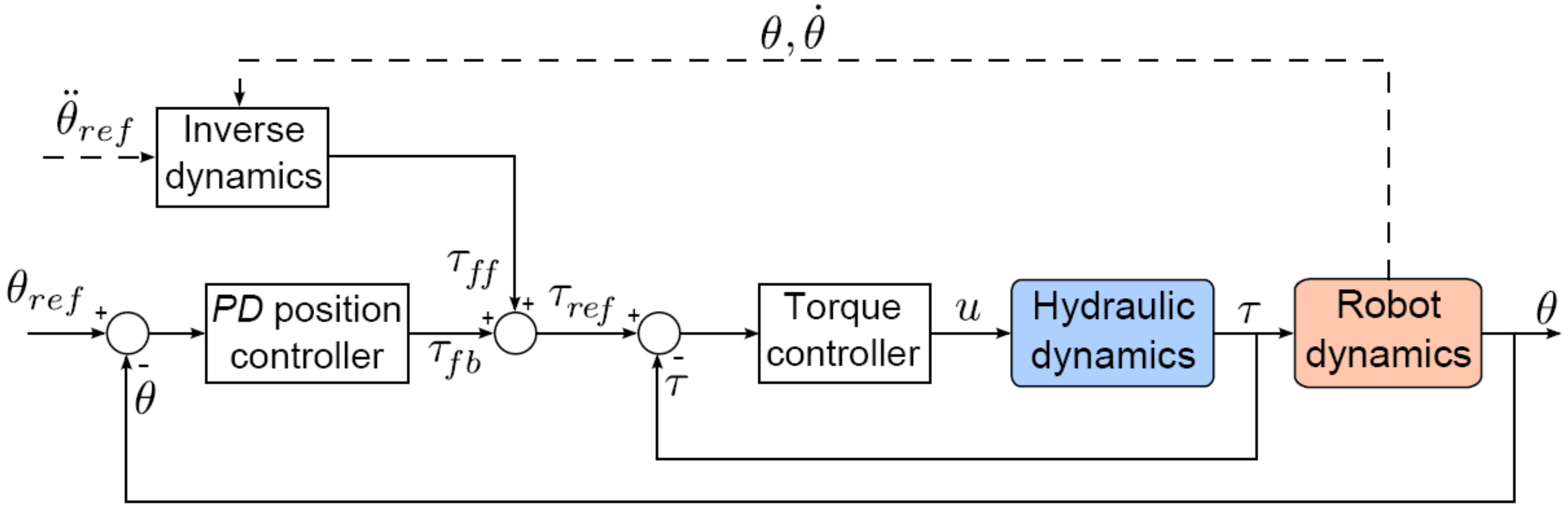
- Dinâmica de sistemas de base flutuante
- Restrições cinemáticas
- Dinâmica inversa projetada com QR

Dinâmica

Conclusão

Controle rígido vs. Controle complacente

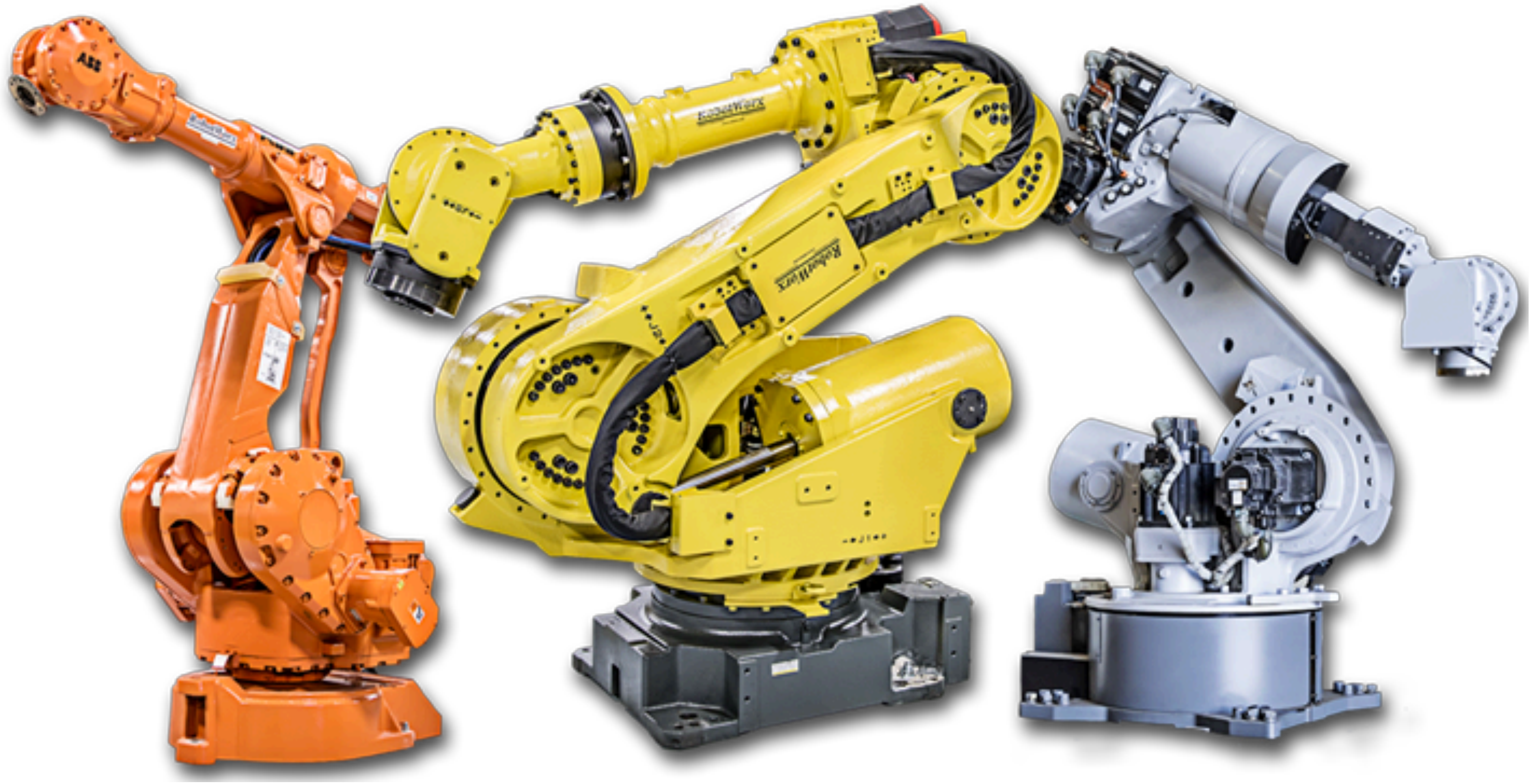
Controle de impedância com dinâmica inversa



Feedforward: responsável pelo seguimento nominal de **referência**

Feedback: responsável pela rejeição de **distúrbios** e por determinar **impedância** mecânica

Controle de impedância com dinâmica inversa



$$\mathbf{M}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{h}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) - \boldsymbol{\tau} = 0$$

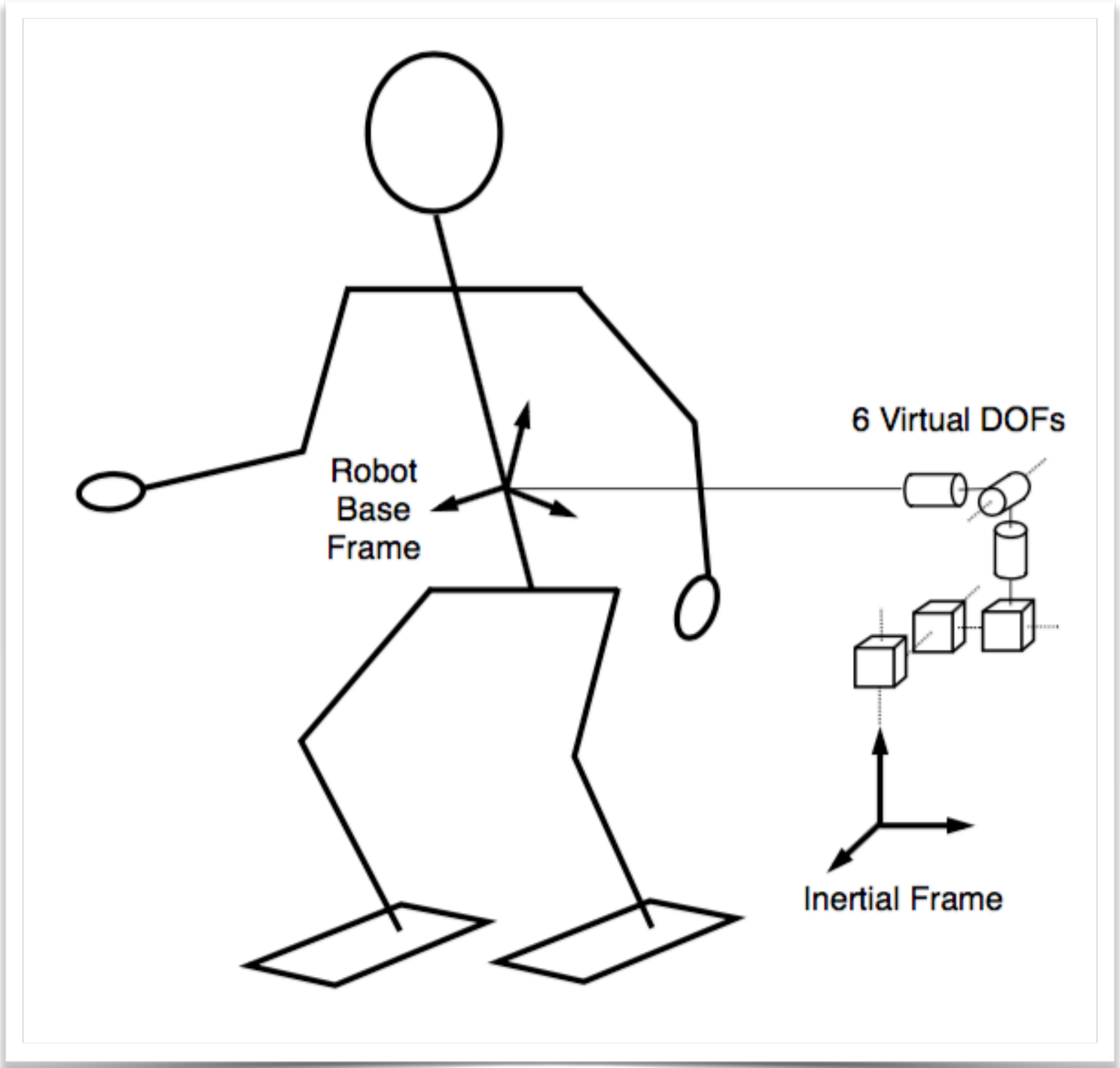
$$\boldsymbol{\tau}_{ff} = \mathbf{M}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}}_{\mathbf{ref}} + \mathbf{h}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$$

Dinâmica de corpo rígido de sistemas de base flutuante

Diferenças para base fixa:

Base não atuada!

Restrições cinemáticas externas comutantes



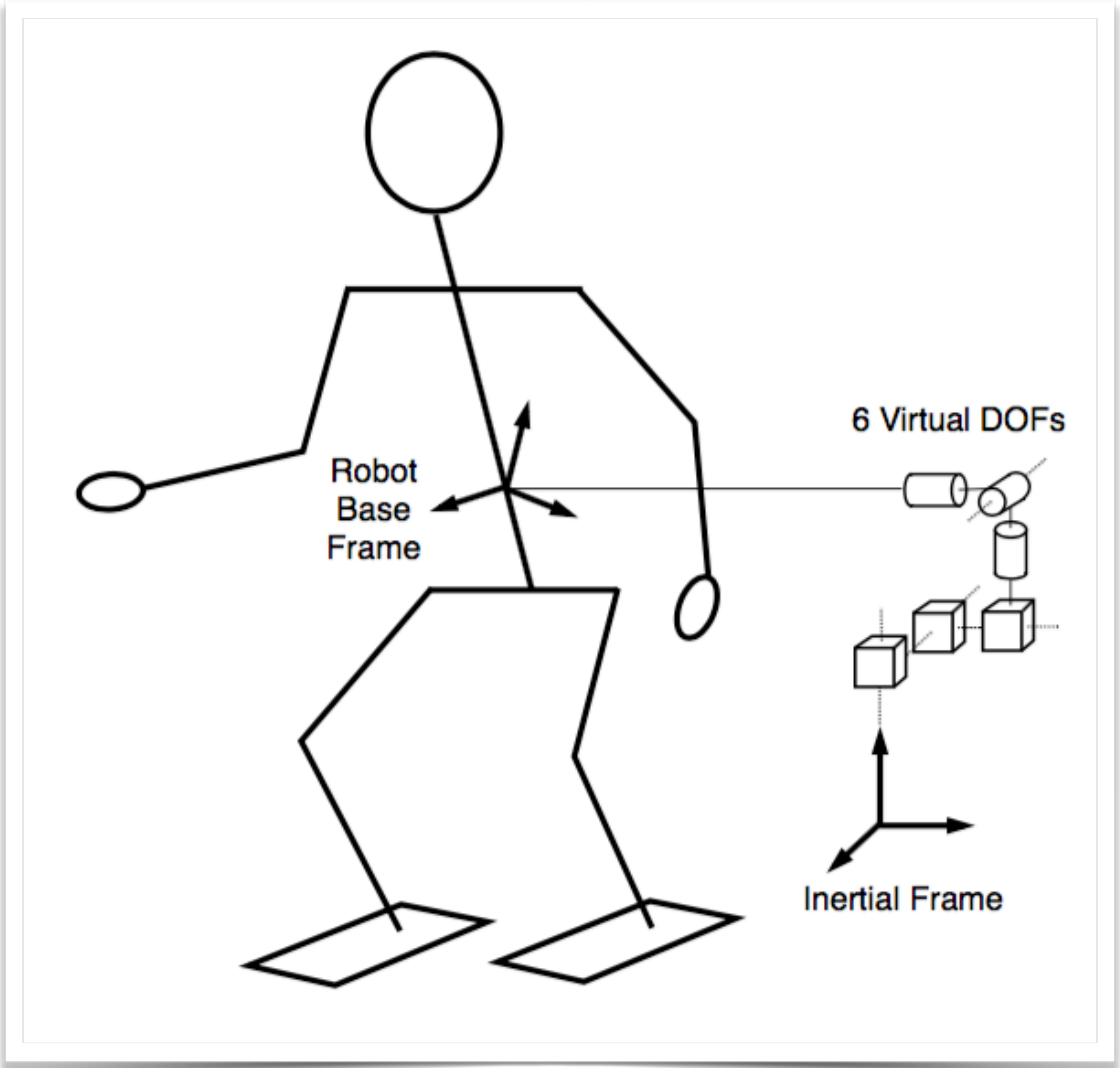
Dinâmica de corpo rígido de sistemas de base flutuante

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} \mathbf{q}_r^T & \mathbf{x}_b^T \end{bmatrix}^T \qquad \mathbf{q}_r \in \mathbb{R}^n$$

$$\mathbf{q} \in \mathbb{R}^{n+6} \qquad \mathbf{x}_b \in \mathbb{R}^6$$

$$\mathbf{M}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{h}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \mathbf{S}^T \tau + \mathbf{J}_C^T(\mathbf{q})\lambda$$

$\mathbf{M}(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^{n+6 \times n+6}$: the floating base inertia matrix
$\mathbf{h}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \in \mathbb{R}^{n+6}$: the floating base centripetal, Coriolis, and gravity forces.
$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{n \times n} & \mathbf{0}_{n \times 6} \end{bmatrix}$: the actuated joint selection matrix
$\tau \in \mathbb{R}^n$: the vector of actuated joint torques
$\mathbf{J}_C \in \mathbb{R}^{k \times n+6}$: the Jacobian of k linearly independent constraints
$\lambda \in \mathbb{R}^k$: the vector of k linearly independent constraint forces



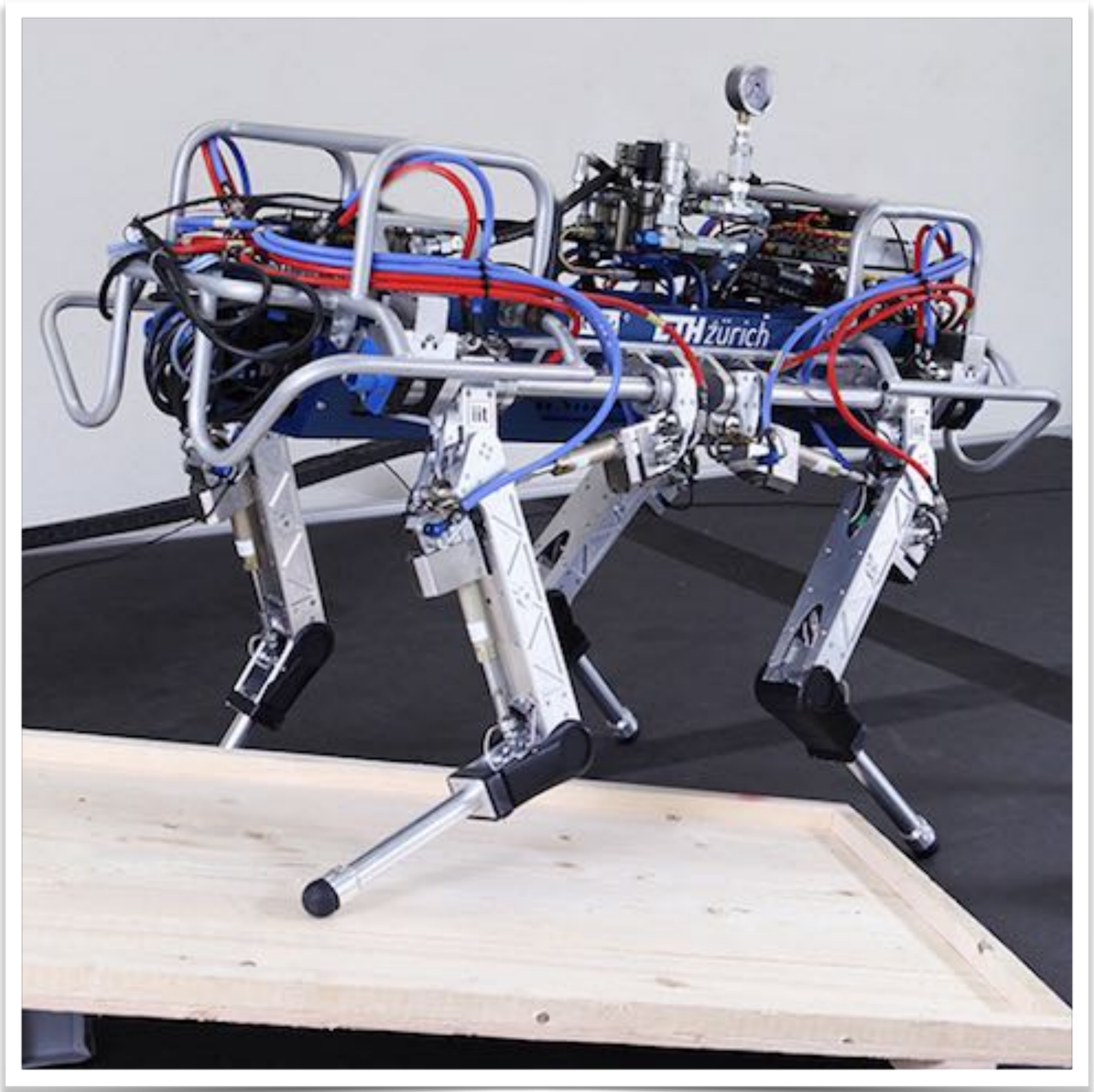
Dinâmica inversa de sistemas de base flutuante

$$\mathbf{M}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{h}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \mathbf{S}^T\tau + \mathbf{J}_C^T(\mathbf{q})\lambda$$

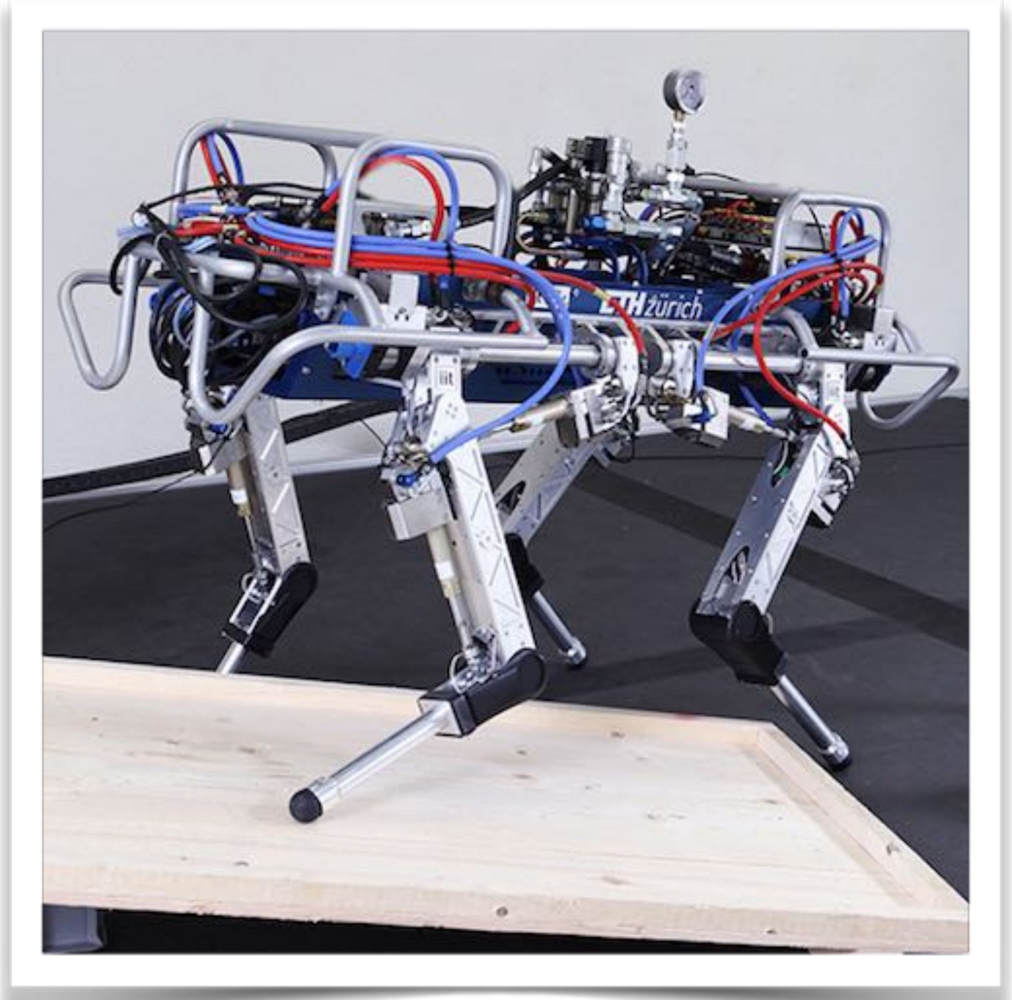
Calcular torque τ que produza $\ddot{q}_d$

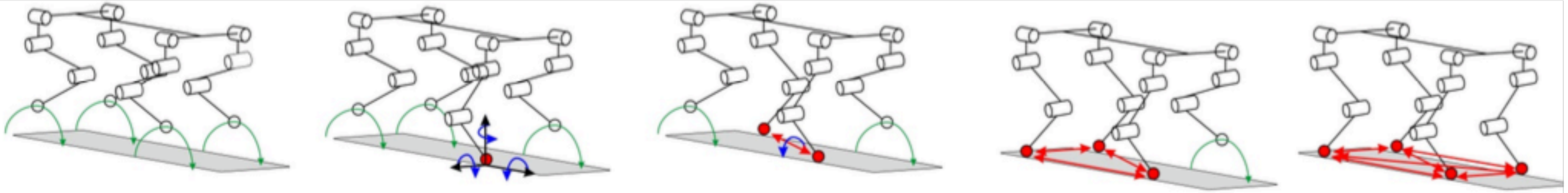
Precisamos conhecer λ ?

Restrições cinemáticas



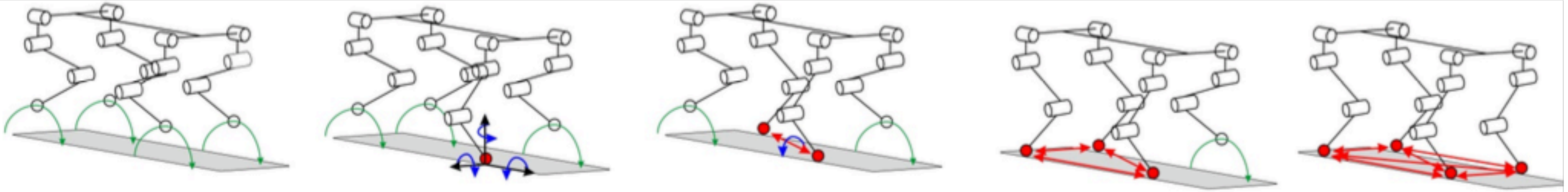
Restrições cinemáticas





Total constraints	0	3	6	9	12
Internal constraints	0	0	1	3	6
Uncontrollable DoFs	6	3	1	0	0

Restrições cinemáticas



Total constraints	0	3	6	9	12
Internal constraints	0	0	1	3	6
Uncontrollable DoFs	6	3	1	0	0

$k = 6$ robô completamente atuado

$k < 6$ robô sub-atuado

$k > 6$ robô super-atuado

Restrições cinemáticas

Revisão

Dinâmica

Conclusão

Pontos em contato não se movem:

$$\dot{\mathbf{x}}_C = \mathbf{J}_C \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{0}$$

$$\ddot{\mathbf{x}}_C = \mathbf{J}_C \ddot{\mathbf{q}} + \dot{\mathbf{J}}_C \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{J}_C \ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{b}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$$

$$\ddot{\mathbf{q}} = ?$$

$$\mathbf{J}_C \in \mathbb{R}^{k \times n+6}$$

$$\ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{J}_C^{+} \, \mathbf{b}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + (\mathbf{I} - \mathbf{J}_C^{+} \mathbf{J}_C) \ddot{\mathbf{q}}_0$$

Restrições cinemáticas

Revisão

Dinâmica

Conclusão

$$\ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{J}_C^{+}\,\mathbf{b}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + (\mathbf{I} - \mathbf{J}_C^{+}\mathbf{J}_C)\ddot{\mathbf{q}}_0$$

robô deve se movimentar no **espaço nulo** das **restrições!**

$$\mathbf{J}_C \in \mathbb{R}^{k \times n+6}$$

$$dim(\mathcal{N}(\mathbf{J}_C)) = n + 6 - k$$

dimensionalidade total do sistema reduzida de **k equações**

Dinâmica projetada no espaço nulo das restrições

$$\ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{J}_C^{+}\,\mathbf{b}(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}}) + (\mathbf{I} - \mathbf{J}_C^{+}\mathbf{J}_C)\ddot{\mathbf{q}}_0$$

$$\mathbf{M}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{h}(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}}) = \mathbf{S}^T\tau + \mathbf{J}_C^T(\mathbf{q})\lambda$$

$$\mathbf{P}(\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}}_d + \mathbf{h}) = \mathbf{P}\mathbf{S}^T\boldsymbol{\tau}$$

Classe de controladores

$$\mathbf{P}(\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}}_d + \mathbf{h}) = \mathbf{P}\mathbf{S}^T\boldsymbol{\tau}$$

$$\tau = ?$$

$$\tau = (PS^T)^+ P(M\ddot{q}_d + h) + (I - (PS^T)^+ PS^T)\tau_0$$

não depende das forças de contato!

Projetor utilizando decomposição QR

Revisão

Dinâmica

Conclusão

$$\mathbf{J}_C^T = \mathbf{Q}\begin{bmatrix} \mathbf{R} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

$$\boxed{\mathbf{M}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{h}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \mathbf{S}^T\tau + \mathbf{J}_C^T(\mathbf{q})\lambda}$$

Multiplicando por $\mathbf{Q}^T$

$$\mathbf{Q}^\mathbf{T}(\mathbf{M}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{h}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})) = Q^T\mathbf{S}^\mathbf{T}\boldsymbol{\tau} + \begin{bmatrix} R \\ 0 \end{bmatrix}\boldsymbol{\lambda}$$

Projetor utilizando decomposição QR

$$\mathbf{Q^T}(\mathbf{M}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{h}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})) = Q^T \mathbf{S^T} \boldsymbol{\tau} + \begin{bmatrix} R \\ 0 \end{bmatrix} \boldsymbol{\lambda}$$

$$\mathbf{S}_c \mathbf{Q}^T \left(\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{h}\right) = \mathbf{S}_c \mathbf{Q}^T \mathbf{S}^T \tau + \mathbf{R}\lambda$$

$$\mathbf{S}_u \mathbf{Q}^T \left(\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{h}\right) = \mathbf{S}_u \mathbf{Q}^T \mathbf{S}^T \tau$$

$$\mathbf{S}_c = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{k \times k} & \mathbf{0}_{k \times (n+6-k)} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{S}_u = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{(n+6-k) \times k} & \mathbf{I}_{(n+6-k) \times (n+6-k)} \end{bmatrix}$$

Projetor utilizando decomposição QR

$$\boxed{\mathbf{S}_u\mathbf{Q}^T\left(\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}}+\mathbf{h}\right)=\mathbf{S}_u\mathbf{Q}^T\mathbf{S}^T\tau}$$

$$\tau=\left(\mathbf{S}_u\mathbf{Q}^T\mathbf{S}^T\right)^+\mathbf{S}_u\mathbf{Q}^T\left[\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}}_d+\mathbf{h}\right]$$

$$\boxed{\tau=(PS^T)^+P(M\ddot{q}_d+h)+(I-(PS^T)^+PS^T)\tau_0}$$

$$\boxed{\mathbf{P}_{QR}=\mathbf{S}_u\mathbf{Q}^T}$$


iit
ADVR

Conteúdo

Revisão

Dinâmica

- **Bibliografia**

Conclusão

Referência bibliográfica

Revisão

Dinâmica

Conclusão

M. Mistry, J. Buchli, and S. Schaal, "Inverse dynamics control of floating base systems using orthogonal decomposition," ICRA, 2010.

Righetti, Ludovic, et al. "Inverse dynamics control of floating-base robots with external constraints: A unified view.". ICRA, 2011

That's all Folks!