Universidade de São Paulo

FFCLRP: Introdução `a Probabilidade

Prof: Fernando FF

Ribeirão Pretro
2020

Questões sobre probabilidade

1. O que é probabilidade
2. Para que estudar probabilidade
3. Por que é difícil aprender probabilidade
4. Qual a principal hipótese para definirmos uma probabilidade elementar?

O Espaço Amostral

Experimentos que ao serem repetidos nas mesmas condições não produzem o mesmo resultado são denominados **experimentos aleatórios**.

- O conjunto de resultados possíveis de um experimento aleatório é chamado de espaço amostral sendo representado
- por um conjunto Ω: O espaço amostral do lançamento de um dado é E = {1, 2, 3, 4, 5, 6}. Para duas moedas:O espaço amostral é o conjunto E={Ca Ca Ca Co Co Co Co Ca).

Um subconjunto de Ω será chamado de Evento E, que quando constituído de um único elemento será

Probabilidade Clássica

Considere um espaço amostral com **n** eventos simples que são igualmente prováveis. Seja A um evento de **E** composto de **m** eventos simples A probabilidade de A, denotada por P(A), é definida por:

$$P = P(A) = \frac{m}{n}$$

$m \longrightarrow$ n° de casos favoráveis

$n \longrightarrow$ n° total de casos possíveis

Propriedades (axiomas)

A probabilidade assim definida, é uma função na classe dos eventos ou, o que é equivalente, na classe dos subconjuntos do espaço amostral e satisfaz as propriedades:

i) $0 \leq P(A) \leq 1$, para todo A $\subset$ E;

ii) Se A e B são eventos mutuamente exclusivos, então,

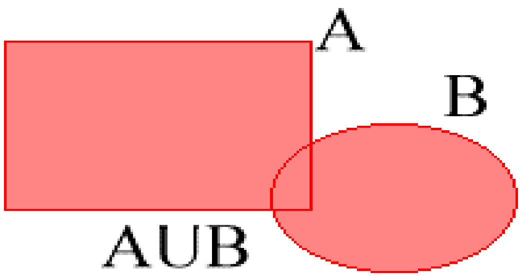
$$P(A \cup B) = P(A) + P(B);$$

iii) P(E) = 1.

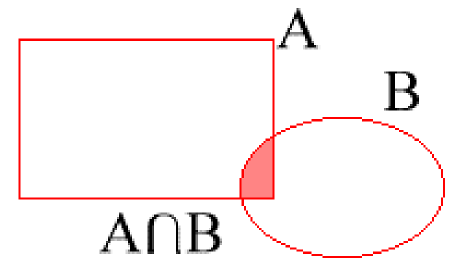
Conjunto dos elementos que pertencem a A, mas não pertencem a B (diferença de A e B ou seja A \ B):

Operações com Conjuntos

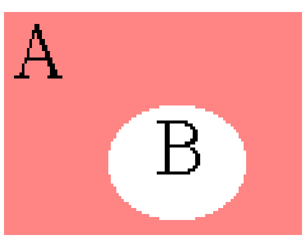
$$A \cup B = \{x : x \in A \ \ ou \ \ x \in B\}$$

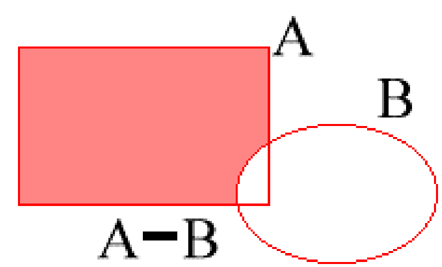


$$A \cap B = \{x : x \in A \ \ \ e \ \ \ x \in B\}$$



$$B^C = \{x : x \in U, \ \ x \notin B\}$$





Resultados Importantes

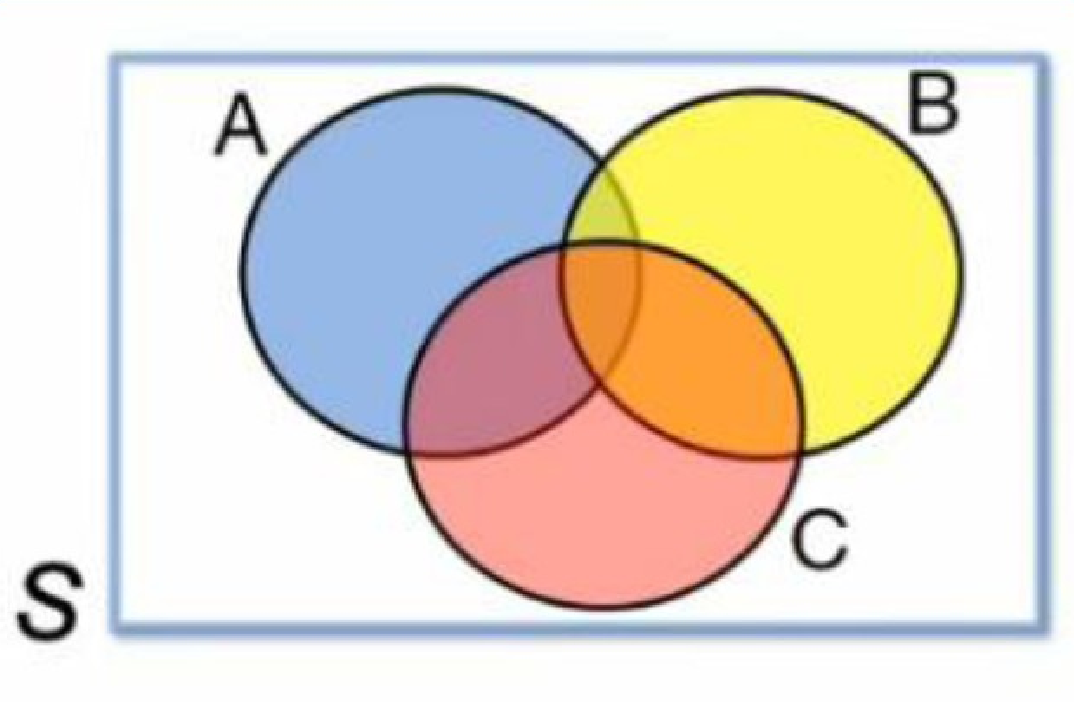
- $P(\phi) = 0$

- $P(A^C) = 1 - P(A)$

- $P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$

- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Regra da Adição



$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$$

ESPAÇOS FINITOS EQUIPROVÁVEIS

Experimento em que os vários resultados do espaço amostral estão associados a probabilidades iguais.

Selecione aleatoriamente uma carta de um baralho comum de 52 cartas.

Sejam A = {a carta é uma espada} e B = {a carta é uma figura}

Calcule:

$$P(A), \quad P(B) \quad e \quad P(A \cap B)$$

Temos:

$$P(A) = \frac{\textit{número de espadas}}{\textit{número de cartas}} = \frac{13}{52}$$

$$P(B) = \frac{\textit{número de figuras}}{\textit{número de cartas}} = \frac{12}{52}$$

$$P(A \cap B) = \frac{\textit{número de figuras de espadas}}{\textit{número de cartas}} = \frac{3}{52}$$

Exercícios

1. Uma bola será retirada de uma sacola contendo 5 bolas verdes e 7 bolas amarelas.Qual a probabilidade desta bola ser verde?

2. Em uma caixa há 2 fichas amarelas, 5 fichas azuis e 7 fichas verdes. Se retirarmos uma única ficha, qual a probabilidade dela ser verde ou amarela?

Exercícios

1. Uma bola será retirada de uma sacola contendo 5 bolas verdes e 7 bolas amarelas.Qual a probabilidade desta bola ser verde?

2. Em uma caixa há 2 fichas amarelas, 5 fichas azuis e 7 fichas verdes. Se retirarmos uma única ficha, qual a probabilidade dela ser verde ou amarela?

O evento de se obter ficha verde possui 7 elementos e o espaço amostral possui 14 elementos, que é o número total de fichas, então a probabilidade do evento obter ficha verde ocorrer é igual a 7/14

Analogamente, a probabilidade do evento obter ficha amarela, que possui 2 elementos, é igual a 2/14:

Note que não existe elementos na intersecção, logo a probabilidade será igual a 9/14

Probabilidade de eventos independentes e Probabiliade Condicional

TEOREMA DA MULTIPLICAÇÃO

a) Eventos independentes: A ocorrência de um dos eventos não afeta a probabilidade da ocorrência de outro

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$ se ***A*** e ***B*** são independentes

P(A e B e C e D)= P(A)P(B)P(C)P(D)

TEOREMA DA MULTIPLICAÇÃO

$P(A \cap B) = P(A)P(B)$ se ***A*** e ***B*** são independentes

1. Uma urna tem duas bolinhas azuis e três vermelhas. Qual probabilidade de tirarmos duas bolinhas vermelhas no experimento com reposição? (retira a bolinha, anota a cor e devolve para a urna).

Probabilidade de tirar uma bola vermelha na primeira tentativa é .

Como houve reposição, a urna continua a mesma. Logo a probabilidade de retirar novamente uma vermelha é a mesma .

Conclusão, pela regra da multiplicação,
P(V,V)=P(V)*P(V)=3/5*3/5=9/25

TEOREMA DA MULTIPLICAÇÃO

2. Um casal pretende ter filhos. Sabe-se que a cada mês a probabilidade da mulher engravidar é de 20%. Qual é a probabilidade dela vir a engravidar somente no quarto mês de tentativas?

Este exercício trata de eventos consecutivos e independentes (pelo menos enquanto ela não engravida), então a probabilidade de que todos eles ocorram, é dado pelo produto de todas as probabilidades individuais. Como a mulher só deve engravidar no quarto mês, então a probabilidade dos três meses anteriores deve ser igual à probabilidade dela não engravidar no mês, logo:

$$P = 0{,}8 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}2 \Rightarrow P = 0{,}1024$$

0,1024 multiplicado por **100%** é igual a **10,24%**.

A probabilidade de uma cirurgia de joelho ser bemsucedida é de 0,85. Encontre a probabilidade de três cirurgias de joelho serem bem-sucedidas.

A probabilidade de uma cirurgia de joelho ser bemsucedida é de 0,85. Encontre a probabilidade de três cirurgias de joelho serem bem-sucedidas.
Depois encontre a probabilidade
De nenhuma ser bem sucedida.

Solução:

A probabilidade de cada cirurgia de joelho ser bem-sucedida é de 0,85. A chance de sucesso de uma cirurgia é independente das chances das outras cirurgias.

$$P(3 \text{ cirurgias bem-sucedidas}) = (0{,}85)(0{,}85)(0{,}85) \approx 0{,}614$$

A probabilidade de uma cirurgia de joelho ser bemsucedida é de 0,85. Encontre a probabilidade de três cirurgias de joelho serem bem-sucedidas.
Depois encontre a probabilidade De nenhuma ser bem sucedida.
Em seguida, encontre a probabilidade de ao menos uma ser bem sucedida?

Solução:

Devido ao fato de a probabilidade de sucesso de uma cirurgia ser de 0,85, a probabilidade de falha de uma cirugia é $1 - 0{,}85 = 0{,}15$

$$P(\text{nenhuma das 3 cirurgias ser bem-sucedida}) = (0{,}15)(0{,}15)(0{,}15) \approx 0{,}003$$

A probabilidade de uma cirurgia de joelho ser bemsucedida é de 0,85. Encontre a probabilidade de três cirurgias de joelho serem bem-sucedidas.
Depois encontre a probabilidade De nenhuma ser bem sucedida.
Em seguida, encontre a probabilidade de pelo menos uma ser bem sucedida?

Solução:

Solução:

"Pelo menos uma" significa uma ou mais. O complemento do evento "pelo menos uma bem-sucedida" é o evento "nenhuma é bem-sucedida". Usando a regra dos complementos

$$P(\text{pelo menos 1 é bem-sucedida}) = 1 - P(\text{nenhuma é bem-sucedida})$$
$$\approx 1 - 0{,}003$$
$$= 0{,}997$$

Selecione aleatoriamente uma carta de um baralho comum de 52 cartas.

Sejam A = {a carta é uma espada} e B = {a carta é uma figura}

Calcule:

$$P(A), \quad P(B) \quad e \quad P(A \cap B)$$

Selecione aleatoriamente uma carta de um baralho comum de 52 cartas.

Sejam A = {a carta é uma espada} e B = {a carta é uma figura}

Calcule: $P(A), \quad P(B) \quad e \quad P(A \cap B)$

$$P(A) = \frac{número\ de\ espadas}{número\ de\ cartas} = \frac{13}{52}$$

$$P(B) = \frac{número\ de\ figuras}{número\ de\ cartas} = \frac{12}{52}$$

$$P(A \cap B) = \frac{número\ de\ figuras\ de\ espadas}{número\ de\ cartas} = \frac{3}{52}$$

Exercícios

Alguns amigos estão em uma lanchonete. Sobre a mesa há duas travessas. Em uma delas há 3 pastéis e 5 coxinhas. Na outra há 2 coxinhas e 4 pastéis. Se ao acaso alguém escolher uma destas travessas e também ao acaso pegar um dos salgados, qual a probabilidade de se ter pegado um pastel?

A probabilidade de escolhermos 1 dentre 2 travessas é igual 1/2.

A probabilidade de escolhermos um pastel na primeira travessa é 3 em 8, ou seja, é 3/8 e como a probabilidade de escolhermos a primeira travessa é 1/2, temos:

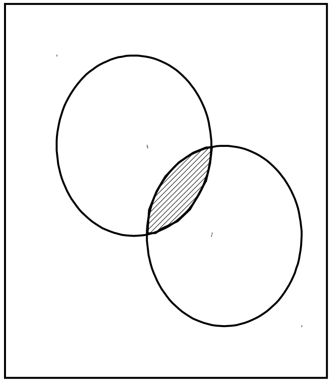
$$P(A) = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{8} \Rightarrow P(A) = \frac{3}{16}$$

A probabilidade de escolhermos um pastel na segunda travessa é 4 em 6, isto é 4/6 e como a probabilidade de escolhermos a segunda travessa é igual a 1/2, temos:

$$P(B) = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{6} \Rightarrow P(B) = \frac{1}{3}$$

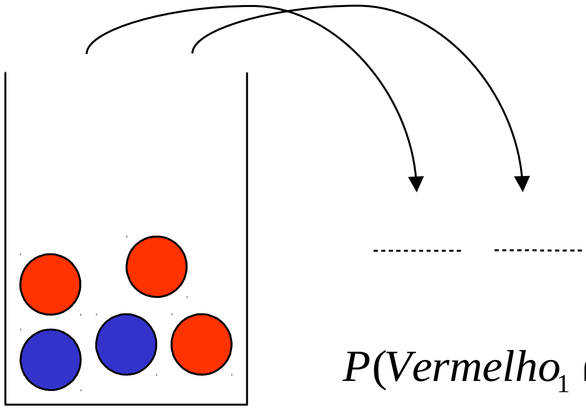
Então a probabilidade de escolhermos um pastel é igual a:

Probabilidade



$A \cap B$

Exemplo:

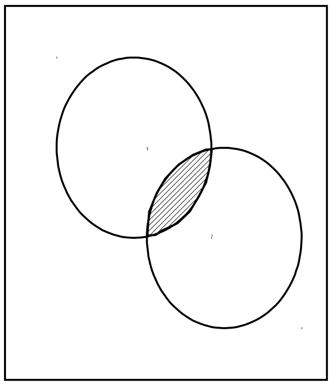


$P(Vermelho_1 \cap Vermelho_2) =$

Conisdere o sorteio de duas bolinhas.

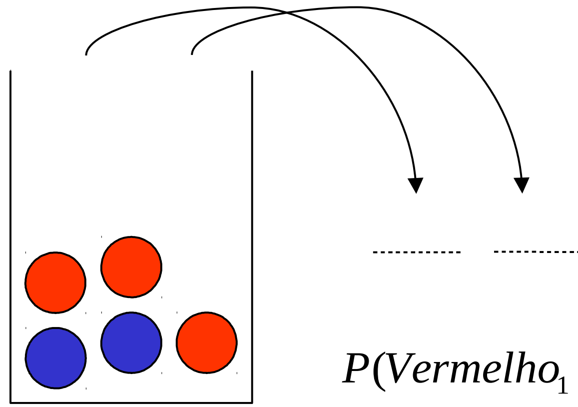
Qual a probabilidade de escolher duas bolinhas vermelhas?

Probabilidade

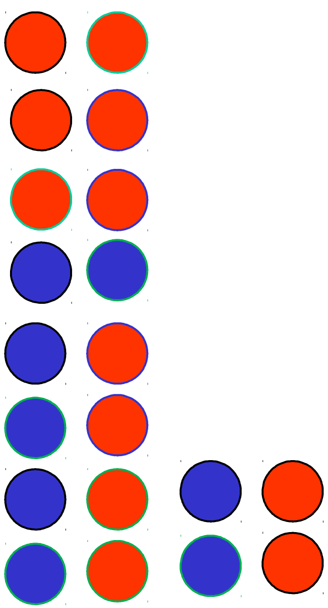


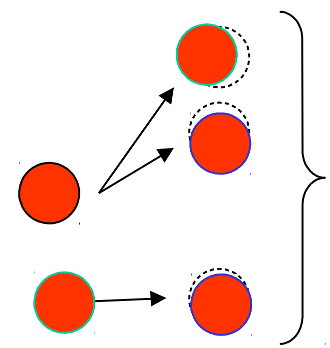
$A \cap B$

Exemplo:

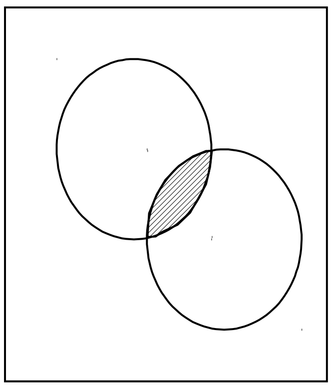


$$P(Vermelho_1 \cap Vermelho_2) = \frac{3}{10}$$



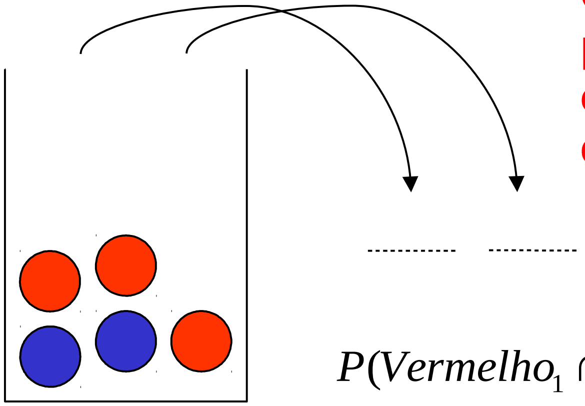


Probabilidade: resolvendo de outra forma



$$A \cap B$$

Exemplo:



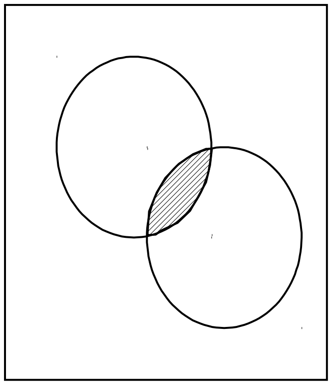
Qual a probabilidade de escolher dois objetos vermelhos?

$$P(Vermelho_1 \cap Vermelho_2) = \frac{?}{?}$$

A primeira bola retirada é vermelha. A probabilidade desse evento é:

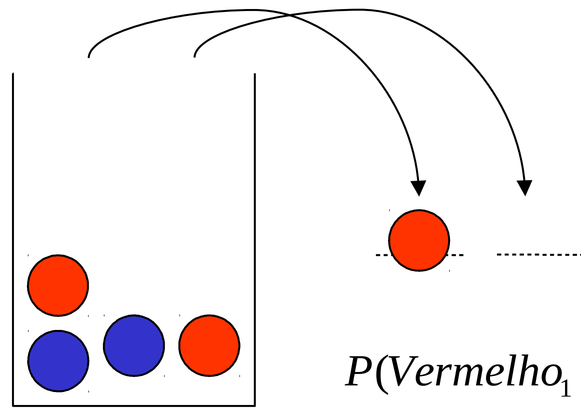
$$P(V\ sair\ na\ primeira\ retirada) = \frac{3}{5}$$

Probabilidade: resolvendo de outra forma



$A \cap B$

Exemplo:



Qual a probabilidade de escolher dois objetos vermelhos?

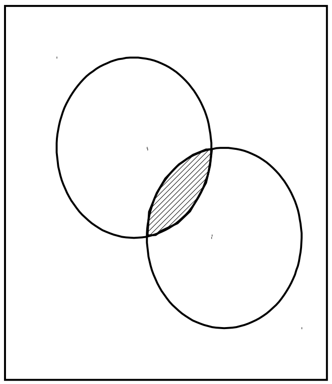
$$P(Vermelho_1 \cap Vermelho_2) = \frac{?}{?}$$

$$\mathbf{P}(\mathbf{A} \cap \boldsymbol{B}) = \boldsymbol{P}(\boldsymbol{A})\boldsymbol{P}(\boldsymbol{B}|\boldsymbol{A})$$

A segunda bola retirada é vermelha, sabend que já saiu uma vermelha
A probabilidade desse evento é:

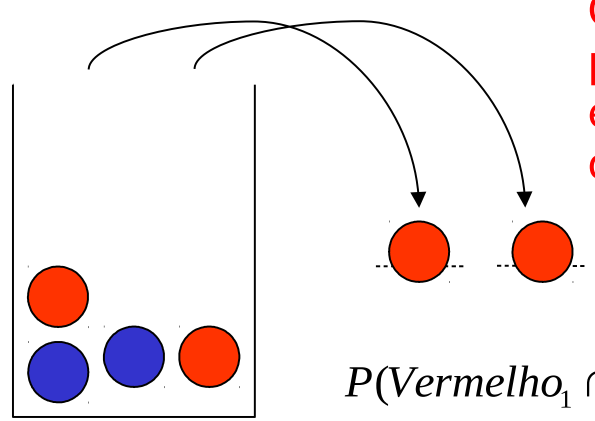
$$P(V\ sair\ segunda\ retirada|V saiu\ na\ primeira\ retirada) = \frac{2}{4}$$

Probabilidade: resolvendo de outra forma



$$A \cap B$$

Exemplo:



Qual a probabilidade de escolher dois objetos vermelhos?

$$P(Vermelho_1 \cap Vermelho_2) =$$

$$\mathbf{P(A\cap B)} = \boldsymbol{P(A)P(B|A)}$$

A probabilidade de sair duas vermelhas, usando a regra da multiplicação:
A probabilidade desse evento é:

$$\mathbf{P(A\cap B)} = \frac{3}{5}\frac{2}{4} = \frac{6}{20} = \frac{3}{10}$$

Probabilidade Condicional

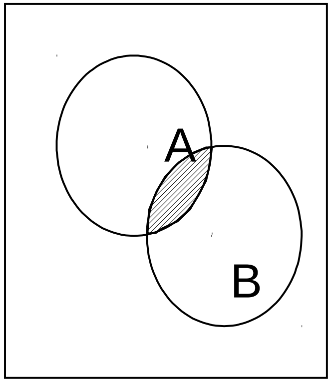
É a probabilidade de A relativa ao Subespaço B

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

B = novo espaço amostral

Probabilidade Condicional: Denotado P(A|B) (leia “probabilidade de A, dado B”)

Probabilidade da Intersecção e condicional



$$A \cap B$$

$$\begin{aligned} P(A \cap B) &= P(A).P(B/A) \\ &= P(B).P(A/B) \end{aligned}$$

Informação=redução do espaço amostral

P(A/B) $\rightarrow$ B é o espaço amostral enquanto $A \cap B$ é o evento

P(B/A) $\rightarrow$ A é o espaço amostral enquanto $A \cap B$ é o evento

Exercícios

Em uma escola de idiomas com 2000 alunos, 500 alunos fazem o curso de inglês, 300 fazem o curso de espanhol e 200 cursam ambos os cursos. Selecionando-se um estudante do curso de inglês, qual a probabilidade dele também estar cursando o curso de espanhol?

Chamemos de A o evento que representa o curso de espanhol e B o evento que representa o curso de inglês. Podemos calcular a probabilidade de ocorrer A dado que ocorreu B através da fórmula da probabilidade condicional.

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Probabilidade de estudar inglês : $P(B) = \frac{500}{2000}$

Probabilidade de estudar espanhol e inglês ao mesmo tempo

$P(A \cap B) = \frac{200}{2000}$ **, logo**

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{200/2000}{500/2000} = \frac{200}{500} = \frac{2}{5}$$

Exercício

A tabela abaixo exibe os resultados de um estudo no qual pesquisadores examinaram o QI de uma criança e a presença de um gene específico nela. Encontre a probabilidade de a criança ter um QI alto, dado que a criança tenha o gene.

	Gene presente	Gene não presente	Total
QI alto	33	19	52
QI normal	39	11	50
Total	72	30	102

Exercício

72 crianças têm o gene. Então, o espaço amostral consiste em 72 crianças

	Gene presente	Gene não presente	Total
QI Adulto	33	19	52
QI normal	39	11	50
Total	72	30	102

$$P(B|A) = \frac{33}{72} \approx 0,458.$$

Exercício

- Encontre a probabilidade de que a criança não tenha o gene.
- Encontre a probabilidade de que a criança não tenha o gene, dado que a criança tenha QI normal.

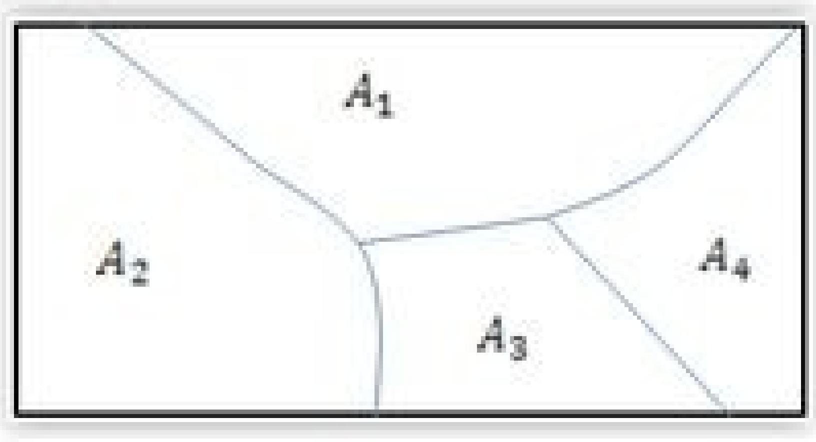
Exercício

- Encontre a probabilidade de que a criança não tenha o gene. R. 0,294
- Encontre a probabilidade de que a criança não tenha o gene, dado que a criança tenha QI normal. R. 0,22

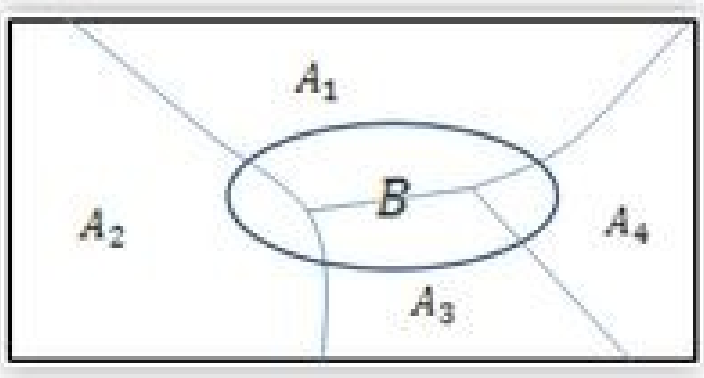
Exercício

Duas cartas são selecionadas em sequência de um baralho padrão. Encontre a probabilidade de que a segunda carta seja uma dama, dado que a primeira carta é um rei. (Assuma que o rei não é reintegrado ao baralho.)

Probabilidade Total

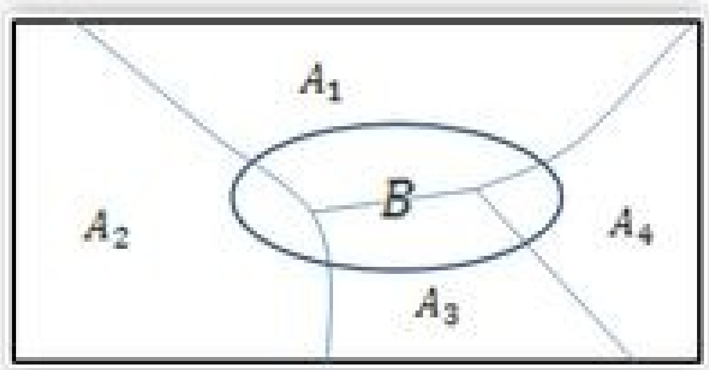


Probabilidade Total



$$P(B) = P(A_1 \cap B) + P(A_2 \cap B) + P(A_3 \cap B) + P(A_4 \cap B)$$

Probabilidade Total



P (B) = P($A_1 \cap$ **B) + P (**$A_2 \cap$ **B) + P(**$A_3 \cap$ **B) + P(** $A_4 \cap$ **B**)

P(B)=P($B|A_1)$ **P (**$A_1) +$ **P(** $B|A_2)$ **P (**$A_2)$ **+P(** $B|A_3)$ **P (**$A_3) +$ **P(** $B|A_4)$ **P (**$A_4)$

$$P(B) = \sum_{i=1}^{4} P(B|A_i)\mathbf{P}\ (A_i)$$

$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(B|A_i)\mathbf{P}\ (A_i)$$

Exemplo

Uma companhia multinacional tem três fábricas que produzem o mesmo tipo de produto. A fábrica I é responsável por 30% do total produzido, a fábrica II produz 45% do total, e o restante vem da fábrica III. Cada uma das fábricas, no entanto, produz uma proporção de produtos que não atendem aos padrões estabelecidos pelas normas internacionais. Tais produtos são considerados "defeituosos" e correspondem a 1%, 2% e 1,5%, respectivamente, dos totais produzidos por fábrica.

No centro de distribuição, é feito o controle de qualidade da produção combinada das fábricas.

Exemplo

Uma companhia multinacional tem três fábricas que produzem o mesmo tipo de produto. A fábrica I é responsável por 30% do total produzido, a fábrica II produz 45% do total, e o restante vem da fábrica III. Cada uma das fábricas, no entanto, produz uma proporção de produtos que não atendem aos padrões estabelecidos pelas normas internacionais. Tais produtos são considerados "defeituosos" e correspondem a 1%, 2% e 1,5%, respectivamente, dos totais produzidos por fábrica.

Qual é a probabilidade de encontrar um produto defeituoso durante a inspeção de qualidade?
Resp.: Seja o evento $A = \{\text{Produto Defeituoso}\}$ e $F_i = \{\text{Produto da Fábrica } i\}$. Sabemos, pelo enunciado, que $P(F_1) = 0{,}3$, $P(F_2) = 0{,}45$ e $P(F_3) = 0{,}25$. Além disso, sabemos que $P(A|F_1) = 0{,}01$, $P(A|F_2) = 0{,}02$ e $P(A|F_3) = 0{,}015$.

Exemplo

Qual é a probabilidade de encontrar um produto defeituoso durante a inspeção de qualidade?

Resp.: Seja o evento $A = \{\text{Produto Defeituoso}\}$ e $F_i = \{\text{Produto da Fábrica } i\}$. Sabemos, pelo enunciado, que $P(F_1) = 0{,}3$, $P(F_2) = 0{,}45$ e $P(F_3) = 0{,}25$. Além disso, sabemos que $P(A|F_1) = 0{,}01$, $P(A|F_2) = 0{,}02$ e $P(A|F_3) = 0{,}015$.

Então, pela lei da probabilidade total,

$$P(A) = P(A|F_1)P(F_1) + P(A|F_2)P(F_2) + P(A|F_3)P(F_3) =$$

$$= 0{,}3 * 0{,}01 + 0{,}45 * 0{,}02 + 0{,}25 * 0{,}015 = 0{,}01575$$

Teorema de Bayes

$$\mathbf{P}(A_k \mid B) = \frac{P(A_k)P(B|A_k)}{\sum_{i=1}^{n} P(A_i)P(B|A_i)}$$

Exemplo

Qual é a probabilidade de encontrar um produto defeituoso durante a inspeção de qualidade?
Resp.: Seja o evento $A = \{\text{Produto Defeituoso}\}$ e $F_i = \{\text{Produto da Fábrica } i\}$. Sabemos, pelo enunciado, que $P(F_1) = 0{,}3$, $P(F_2) = 0{,}45$ e $P(F_3) = 0{,}25$. Além disso, sabemos que $P(A|F_1) = 0{,}01$, $P(A|F_2) = 0{,}02$ e $P(A|F_3) = 0{,}015$.

Então, pela lei da probabilidade total,

$$P(A) = P(A|F_1)P(F_1) + P(A|F_2)P(F_2) + P(A|F_3)P(F_3) =$$

$$= 0{,}3 * 0{,}01 + 0{,}45 * 0{,}02 + 0{,}25 * 0{,}015 = 0{,}01575$$

Se durante a inspeção, encontramos um produto defeituoso, qual é a probabilidade que ele tenha sido produzido na fábrica II?

Exemplo

Então, pela lei da probabilidade total,

$$P(A) = P(A|F_1)P(F_1) + P(A|F_2)P(F_2) + P(A|F_3)P(F_3) =$$

$$= 0{,}3 * 0{,}01 + 0{,}45 * 0{,}02 + 0{,}25 * 0{,}015 = 0{,}01575$$

Se durante a inspeção, encontramos um produto defeituoso, qual é a probabilidade que ele tenha sido produzido na fábrica II?

Resp.: Aqui, aplicaremos o Teorema de Bayes usando o item anterior para encontrar $P(A)$:

$$P(F_2|A) = \frac{P(A|F_2)P(F_2)}{P(A)} = \frac{0{,}02 * 0{,}45}{0{,}01575} = 0{,}5714$$

O gerente de Recursos Humanos de uma empresa escolhe estagiários oriundos de dois cursos de Administração. No curso Alpha, a proporção de alunos com boa formação em informática é de 60%, enquanto no outro curso (Beta),essa proporção cai para 40%. Um estagiário acaba de ser contratado. A probabilidade de que tenha boa formação em informática é 0,44.Qual é a probabilidade do gerente ter escolhido o estagiário do curso Alpha?

Um exemplo muito utilizado para exemplificar a aplicação do teorema de Bayes e como ele pode prevenir falsos positivos é dado pelo pesquisador em inteligência artificial, Eliezer Yudkowski. Se trata de um exemplo com mamografias. Recomendam-se que a partir dos 40 anos que mulheres façam mamografias anualmente. Nessa idade, cerca de 1% das mulheres são portadoras de um tumor assintomático de mama. Sabe-se que a mamografia apresenta resultado positivo em 80 % das mulheres com câncer de mama, mas que esse resultado ocorre em 9,6% das mulheres sem o câncer.

Se uma mulher jovem fizer uma mamografia e o resultado der positivo, qual a probabilidade dela realmente ter câncer?

Probabilidade como frequência

O conceito frequencista de probabilidade diz que probabilidade é "*o número de vezes que um evento ocorre sobre o número de tentativas, no limite de uma série infinita de repetições equiprováveis*".

Probabilidade como frequência

- **Quando definimos probabilidade em termos de frequência, assumimos que todas as repetições possuem a mesma probabilidade!**

- **Ela não pode ser aplicada a situações que não podem ser repetidas. Dessa maneira, não faz sentido se perguntar qual a probabilidade de os dinossauros terem sido extintos pelo impacto de um meteoro no final do mesozoico, pois esse foi um evento histórico único.**

- **Ela assume um limite de repetições infinita para a convergência para o verdadeiro valor, o que não existe na prática. Como podemos saber se o número de medidas que realizamos foi realmente** suficiente? Como podemos saber se a nossa amostra é satisfatória ou não?