EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS DE 1^a ORDEM EXATAS

1. Funções Implícitas

Dada uma equação do tipo $F(x,y) = 0$, podemos, às vezes "resolver para uma das variáveis como função da outra.

Exemplo 1.1. *Dada a função;* $F(x,y) = yx^2 + 2xy - 2$*, temos* $F(x,y) = 0 \Leftrightarrow y = y(x) = \frac{2}{x^2+2x}$ *(ou* $x = -y \pm \sqrt{y^2+2y}$*).*

Embora seja difícil encontrar uma solução explícita, na maioria dos casos, o *Teorema das Funções Implícitas* garante que esta solução sempre existe, observadas certas condições.

Teorema 1.2. *Seja* $f : U \to \mathbb{R}$ *uma função de classe* C^1*, definida num aberto* $U \subset \mathbb{R}^2$*, e* $(x_0, y_0) \in U$ *tal que* $f(x_0, y_0) = c$*,* $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$*. Então existe um intervalo* I *contendo* x_0 *e uma função* $g : I \to J$*, de classe* C^1*. tal que, para todo* $x \in I$*,* $f(x,y) = c$ *se e somente se* $y = g(x)$*. E, para todo* $x \in I$*, temos* $g'(x) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}}(x, g(x))$*.*

Observação 1.3. *Os gráficos 1 e 1 abaixo ilustram a necessidade da hipótese* $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$*.*

Date: September 10, 2020.

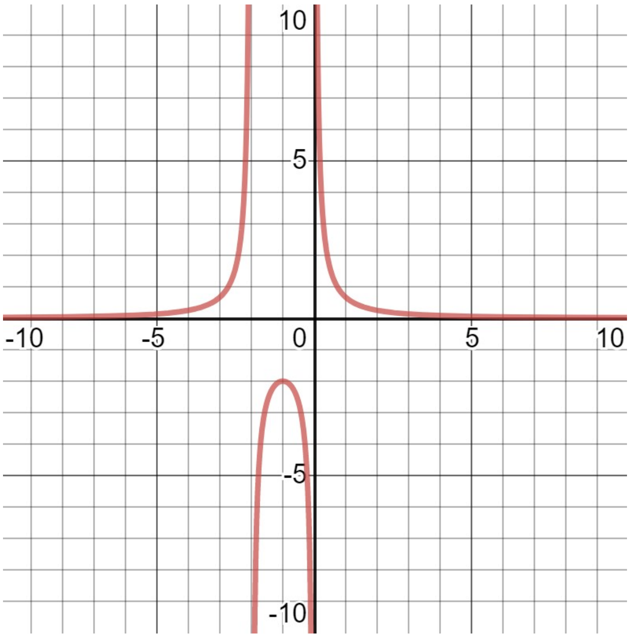

FIGURE 1. Função definida implicitamente por $yx^2 + 2xy - 2 = 0$.

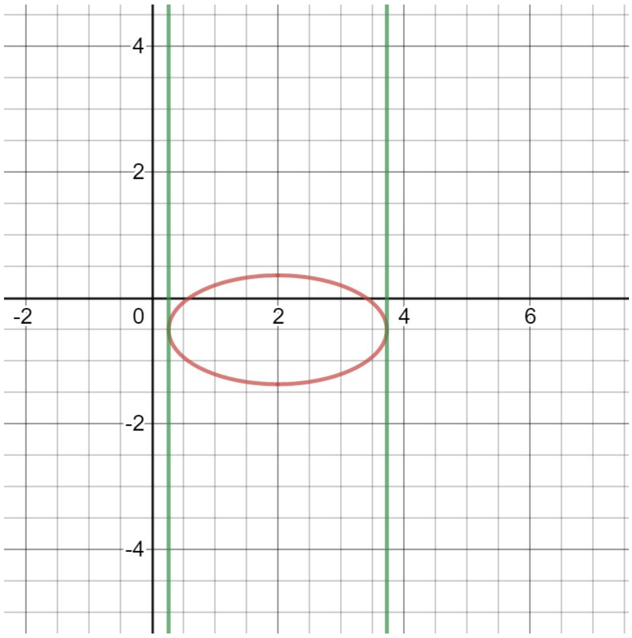

FIGURE 2. Função definida implicitamente por $(x-2)^2 + (2y+1)^2 = 3$.

2. Equações exatas

Definição 2.1. *A equação diferencial $P(x,y) + Q(x,y)y' = 0$ é dita exata em $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ se existe uma função $\Phi : \Omega \to \mathbb{R}$ tal que $\frac{\partial \Phi}{\partial x} = P$ e $\frac{\partial \Phi}{\partial y} = Q$, ou seja, $\nabla \Phi = (P, Q)$. A função Φ é então denominada uma integral primeira para a equação, ou um potencial para o campo $P\vec{i} + Q\vec{j}$.*

É conveniente usar a notação de Leibniz: $P(x,y) + Q(x,y)\frac{d\,y}{d\,x} = 0$ e frequentemente escreveremos a equação na "forma diferencial" :

$$P(x,y)\,d\,x + Q(x,y)\,d\,y = 0, \tag{1}$$

P e Q definidas em um subconjunto $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, aberto.

Exemplo 2.2. $4xy + 2x^2\frac{dy}{dx} = 0, \quad \Phi(x, y) = 2x^2y.$

Suponhamos que Φ é uma integral primeira de classe C^1 da equação $P(x, y) + Q(x, y)\frac{dy}{dx} = 0$ em Ω e seja $y(x)$ dada implicitamente pela equação $\Phi(x, y) = c$. Então temos,

$0 = \frac{d}{dx}(\Phi(x.y(x)) = \frac{\partial\Phi}{\partial x}(x, y(x)) + \frac{\partial\Phi}{\partial y}\frac{dy}{dx}(x, y(x)) = P(x.y(x)) + Q(x, y(x))(x.y(x))\frac{dy}{dx}(x, y(x))$. Portanto $y(x)$ é solução da equação no intervalo onde estiver definida.

Reciprocamente, se $y : I \to \mathbb{R}$ for solução, segue das igualdades que $\Phi(x, y(x)) = c$. Ou seja, as soluções da equação são dadas implicitamente pelas curvas de nível de Φ.

Observemos também que poderíamos, igualmente, resolver a equação para x, como função de y, obtendo uma solução da equação: $P(x, y)\frac{dx}{dy} + Q(x, y) = 0$. Esta simetria entre as variáveis é uma das razões pelas quais é preferível usar a forma diferencial (3), no estudo de equações exatas.

Exemplo 2.3. *Consideremos novamente a equação* $4xy+2x^2\frac{dy}{dx} = 0$ *Como* $\Phi(x, y) = 2x^2y$. *é uma integral primeira, as soluções são dadas implicitamente, pelas curvas* $2x^2y = c$. *Resolvendo para* y, *obtemos as soluções explícitas* $y = \frac{c}{x^2}$. *Notemos que, nesta forma, as soluções não estão definidas para* $x = 0$. *Resolvendo para* x, *obtemos* $x = \pm\sqrt{\frac{c/2}{y}}$ *que, agora, não estão definidas para* $y = 0$.

Duas questões importantes são:

- Como saber se a equação é exata?
- Sabendo que é exata, como encontrar o potencial?

Para a primeira, temos o seguinte critério:

Proposição 2.4. *Suponhamos que a equação* (3) *seja exata no domínio* Ω *e* P *e* Q *sejam de classe* C^1 Ω . *Então* $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$. *em* Ω.

Prova. Nesse caso, o potencial Φ é de classe C^2 em Ω e segue do teorema de Schwartz que $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ em Ω $\square$.

Exemplo 2.5. *Na equação* $4xy + 2x^2 \frac{d\,y}{d\,x} = 0$, *temos:*
$\frac{\partial}{\partial x}(2x^2) = 4x = \frac{\partial}{\partial y}(4xy)$.

[1]

Quanto à segunda questão, devemos resolver o sistema:

$$\begin{cases} \frac{\partial \Phi}{\partial x} = P \\ \frac{\partial \Phi}{\partial y} = Q \end{cases} \tag{2}$$

Vamos ilustrar o procedimento em um exemplo

Exemplo 2.6. *Encontrar a solução geral da equação:* $y\,d\,x + (x + \frac{2}{y})\,d\,y = 0$

2.1. **Equações de variáveis separáveis.** Um caso particular especialmente simples é o de *equações com variáveis separadas*:

$$P(x)\,d\,x + Q(y)\,d\,y = 0, \tag{3}$$

P e Q definidas em intervalos abertos. Neste caso, $\Phi(x,y) = \int P(x)\,d\,x + \int Q(y)\,d\,y$ é uma integral primeira e as soluções são dadas implicitamente por: $\int P(x)\,d\,x + \int Q(y)\,d\,y = C \leftrightarrow \int P(x)\,d\,x = -\int Q(y)\,d\,y + C$.

[1] A recíproca da Proposição (2.4) não é verdadeira em geral. De fato, pode-se mostrar que a equação $\frac{-y}{x^2+y^2}\,d\,x + \frac{x}{x^2+y^2}\,d\,y$ não é exata no domínio $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, embora $\frac{\partial}{\partial x}\frac{x}{x^2+y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\frac{y}{x^2+y^2}$ em Ω. (Entretanto a função $\arctan(y/x)$ é um potencial em $\tilde{\Omega} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \neq 0\}$.) A recíproca passa a ser verdadeira, porém se acrescentarmos a hipótese adicional de que o domínio Ω seja *simplesmente conexo.*

Ou seja, escrevendo a equação na forma $P(x)\,d\,x = -Q(y)\,d\,y$, basta integrar os dois lados da equação em relação às variáveis x e y, respectivamente.

Exemplo 2.7. *Encontrar a solução geral da equação:* $\ln x \cos y\,d\,x + x tg\,y\,d\,y = 0$