Aula 2 - Teorema Fundamental do Cálculo

Prof. Rogério Augusto dos Santos Fajardo

Instituto de Matemática e Estatística

MAT1352 – Cálculo para funções de uma variável real II

Teorema 1 (Teorema Fundamental do Cálculo – parte 1)
Se $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *é contínua, a função* $g : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *dada por:*

$$g(x) = \int_a^x f(t)dt$$

é contínua em $[a,b]$*, derivável em* $]a,b[$ *e* $g'(x) = f(x)$*, para todo* $x \in]a,b[$.

Corolário 1 (Teorema Fundamental do Cálculo – parte 2)
Se $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *é contínua e* $F : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *é contínua, derivável em* $]a,b[$ *e tal que*

$$F'(x) = f(x),$$

para todo $x \in]a,b[$*, então*

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

Lema 1

Seja $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *contínua.*

(a) *Se* $t \in [a, b]$, $\displaystyle\int_a^b f(x)dx = \int_a^t f(x)dx + \int_t^b f(x)dx.$

(b) *Se* $m \leq f(x) \leq M$, *para todo* $x \in [a, b]$,

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a).$$

Demonstração do Teorema 1

- Seja $g(x) = \int_a^x f(t)dt$.
- Sejam $x \in]a, b[$ e $h > 0$ tal que $x + h \in]a, b[$.
- Pelo Lema 1, parte (a), temos:
- $\int_a^{x+h} f(t)dt = \int_a^x f(t)dt + \int_x^{x+h} f(t)dt$.
- Isto é, $g(x+h) = g(x) + \int_x^{x+h} f(t)dt$.
- Logo, $g(x+h) - g(x) = \int_x^{x+h} f(t)dt \ (*)$.

- Pelo Teorema de Weierstrass, existem $t(h), s(h) \in [x, x+h]$ tal que $f(t(h)) \leq f(y) \leq f(s(h))$, para todo $y \in [x, x+h]$.
- Pelo Lema 1, parte (b), temos, para todo $y \in [x, x+h]$:
- $h \cdot f(t(h)) \leq \displaystyle\int_x^{x+h} f(t)dt \leq h \cdot f(s(h))$.
- De $(*)$ segue que $h \cdot f(t(h)) \leq g(x+h) - g(x) \leq h \cdot f(s(h))$.
- Logo, $f(t(h)) \leq \dfrac{g(x+h) - g(x)}{h} \leq f(s(h))$ $(**)$.
- Como f é contínua e $t(h), s(h) \in [x, x+h]$, temos $\lim_{h \to 0^+} f(t(h)) = \lim_{h \to 0^+} f(t(h)) = f(x)$.
- Logo, por $(**)$ e pelo Teorema do Confronto temos: $\lim_{h \to 0^+} \dfrac{g(x+h) - g(x)}{h} = f(x)$.
- Analogamente provamos que $\lim_{h \to 0^-} \dfrac{g(x+h) - g(x)}{h} = f(x)$.
- Logo, $g'(x) = f(x)$.

- Falta mostrar que g é contínua em a e em b.
- Repetindo os argumentos anteriores temos $\lim_{h\to 0^+} \dfrac{g(a+h)-g(a)}{h} = f(a)$.
- Logo, assim como na prova de que funções deriváveis são contínuas, temos:
- $\lim_{h\to 0^+} g(a+h) - g(a) = 0$.
- Portanto, $\lim_{h\to 0^+} g(a+h) = g(a)$.
- Da mesma forma, $\lim_{h\to 0^-} g(b+h) = g(b)$.
- Logo, g é contínua. $\blacksquare$

Lema 2
Sejam $F, G : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *funções contínuas que são deriváveis em* $]a, b[$. *Suponha que, para todo* $x \in]a, b[$ *temos:*

$$F'(x) = G'(x).$$

Então existe uma constante $c \in \mathbb{R}$ *tal que, para todo* $x \in [a, b]$,

$$F(x) = G(x) + c.$$

Demonstração:

- Sejam F e G como no enunciado e $f = F - G$.
- Para $x \in]a, b[$ temos
  $f'(x) = (F - G)'(x) = F'(x) - G'(x) = 0.$
- Se existem $x_1, x_2 \in [a, b[$ tais que $f(x_1) \neq f(x_2)$, pelo Teorema do Valor Médio existe $x \in]a, b[$ tal que
  $f'(x) = \dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \neq 0$, contradizendo que $f' = 0$ em $]a, b[$.
- Logo, existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) = c$, para todo $x \in]a, b[$.
- Como f é contínua em $[a, b]$ (diferença entre duas funções contínuas), então $f(a) = f(b) = c$.
- Concluímos, portanto, que $F(x) - G(x) = c$, para todo $x \in [a, b]$. $\blacksquare$.

Demonstração do Corolário 1

- Sejam f e F como no enunciado.
- Seja $g(x) = \int_a^x f(t)dt$, para $x \in [a, b]$.
- Pelo Teorema 1, $g'(x) = f(x)$, para todo $x \in]a, b[$.
- Logo, pelas hipóteses sobre F e pelo Lema 2, existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $g(x) = F(x) + c$, para todo $x \in]a, b[$.
- Temos $g(b) = \int_a^b f(x)dx$.
- Como $g(a) = 0$, temos $\int_a^b f(x)dx = g(b) - g(a)$.
- Logo, $\int_a^b f(x)dx = (F(b) + c) - (F(a) + c) = F(b) - F(a)$. $\blacksquare$

Observação:

- Na demonstração do Teorema Fundamental do Cálculo pouco usamos (diretamente) a definição de integral.
- Só utilizamos o Lema 1 e o fato de funções contínuas serem integráveis.
- Isso significa que qualquer outra noção de integral com essas propriedades satisfazem o Teorema Fundamental do Cálculo.

Exemplo 1

Calcule a área da região da parábola $y = 4x - x^2$ *que fica acima do eixo* x.

Exemplo 2

Calcule a área, em módulo, das regiões compreendidas entre o eixo x e a parábola $y = 4x - x^2$ entre os pontos $x = -1$ e $x = 5$.

Definição 1

Dizemos que uma função F é uma *primitiva* de uma função f se:

- $dom(F) = dom(f)$;
- F é contínua;
- Se $]a, b[\subseteq dom(F)$, F é derivável em $]a, b[$ e $F'(x) = f(x)$, para todo $x \in]a, b[$.

Observação 1

A maioria dos livros define primitiva de f simplesmente como uma função F tal que $F' = f$, mas isso pode dar problema, se seguirmos rigorosamente a definição, em funções definidas em um intervalo fechado, como no caso do Teorema Fundamental do Cálculo.

Integral indefinida

- Chamamos de *integral indefinida* de f como o conjunto de todas as primitivas de f.
- Denotamos a integral indefinida de f por $\displaystyle\int f(x)dx$.
- Pelo Lema 2, sabemos que todas as primitivas de uma função diferem por apenas uma constante.
- E também a soma por uma constante não altera o fato de ser primitiva.
- Por isso, se F é uma primitiva de f, por abuso de notação podemos escrever:
- $\displaystyle\int f(x)dx = F(x) + C;$
- sendo C uma notação para representar uma constante indeterminada.
- Formalmente, é o conjunto $\{F + C : C \in \mathbb{R}\}$.