Mat 0234. Medida e Integração.

IME-USP.Segundo semestre 2020

Lista 1

Anéis, Álgebras e σ-anéis e σ-álgebras

1. Seja $\boldsymbol{A}$ uma classe de conjuntos de um espaço X. Mostre que são equivalentes:
   (a) $\forall$ A e B $\in \boldsymbol{A}$ então A-B, A$\cup$B $\in \boldsymbol{A}$
   (b) $\forall$ A e B $\in \boldsymbol{A}$ então A$\cap$B and AΔ B $\in \boldsymbol{A}$
   (c) $B, C,\ A_1, A_2, \cdots, A_n \in \boldsymbol{A}$ então B-C, e $\cup_{j=1}^n A_j \in \boldsymbol{A}$
   (d) $B, C,\ A_1, A_2, \cdots, A_n \in \boldsymbol{A}$ então $\cap_{j=1}^n A_j$ e BΔ C $\in \boldsymbol{A}$
   Neste caso $\boldsymbol{A}$ chama-se um **anel**
   (e) Se $X \in \boldsymbol{A}$ $\boldsymbol{A}$ chama-se uma **álgebra**.
   (f) mostre que $\boldsymbol{A}$ é uma álgebra $\iff$ $\forall$ A e B $\in \boldsymbol{A}$ então X-A, A$\cup B \in \boldsymbol{A}$

2. Seja **A** a classe de conjuntos finitos de $\mathbb{N}$. Mostre que **A** é um anel.

3. Seja $\boldsymbol{A}$ a classe de conjuntos em $\mathbb{R}$ constituída pelas uniões finitas de intervalos semiabertos à esquerda(a,b] limitados e o conjunto vazio. Ou seja $\cup_{i=1}^n (a_i, b_i] \in \boldsymbol{A}$. Mostre que $\boldsymbol{A}$ é um anel.

4. Seja $\boldsymbol{A}$ a classe de conjuntos em $\mathbb{R}$ constituída pelas uniões finitas dos conjuntos $(a, b], (-\infty, b],\ (a, +\infty), (-\infty, +\infty), \emptyset$. Mostre que $\boldsymbol{A}$ é uma álgebra

5. Seja $\boldsymbol{A}$ a classe de conjuntos em [0,1] constituída pelas uniões finitas de intervalos semiabertos à esquerda(a,b] limitados, $\emptyset$ e pelo ponto 0. Mostre que $\boldsymbol{A}$ é uma álgebra.

6. Seja $\boldsymbol{A}$ a classe de conjuntos em $\mathbb{R}$ constituída pelas uniões finitas de intervalos abertos (a,b) limitados e o $\emptyset$. Ela é um anel ou álgebra?

7. Seja $\boldsymbol{A}$ a classe de conjuntos em $\mathbb{R}$ constituída pelas uniões finitas de intervalos fechados [a,b] limitados e o $\emptyset$. Ela é um anel ou álgebra?

8. Um σ-anel $\boldsymbol{A}$ de um espaço X é um anel com a seguinte propriedade: se $\forall\, j \in \mathbb{N},\ A_j \in \boldsymbol{A}$ temos que $\cup_{j=1}^{+\infty} A_j \in \boldsymbol{A}$.

9. Uma σ-álgebra $\boldsymbol{A}$ de um espaço X é uma álgebra com a seguinte propriedade: se $\forall\, j \in \mathbb{N},\ A_j \in \boldsymbol{A}$ temos que $\cup_{j=1}^{+\infty} A_j \in \boldsymbol{A}$.

10. Seja **A** uma classe de subconjuntos de um espaço X. Mostre que se **B** e **C** forem anéis (respectivamente σ-anéis) com $\mathbf{A} \subset \mathbf{B}, \mathbf{C}$ então $\mathbf{B} \cap \mathbf{C}$ também é um anel (respectivamente σ-anel) que contém **A**.

11. mesmo enunciado do exercício anterior, substituindo "anel"por "álgebra".

12. Seja **A** uma classe de subconjuntos de um espaço X. O **anel gerado por A** é o menor anel **B** que contém **A**. Ou seja, se **C** for outro anel que contém **A** então $\mathbf{B} \subset \mathbf{C}$. Mostre que este anel existe.

13. mesmo enunciado do exercício anterior, substituindo "anel"por álgebra, σ-anel, σ-álgebra.

14. Seja $f : X \to Y$ uma função, e **A** um anel de subconjuntos de Y. Mostre que $f^{-1}(A)$ é um anel.

15. No exercício anterior verifique que o mesmo acontece substituindo "anel"por álgebra, σ-anel, σ-álgebra.

16. Descreva a álgebra gerada pelos conjuntos [0;1], [1;2],[1,5;2)dentro do espaço X = [0,2]. Quantos elementos tem?

17. Mostre que as seguintes classes de conjuntos são σ- álgebras
    (a) $\wp(X)$.
    (b) $\{\emptyset, X\}$.
    (c) Dado qualquer $E \in X$ a classe $\{\emptyset, X, E, E^c\}$.

18. Uma partição de X é uma classe de conjuntos $A_j, j \leq n$ que verifica:
    a. $A_i \cap A_j = \varnothing \; se \; i \neq j$
    b. $\cup_1^n A_j = X$
    Mostre que a álgebra gerada por $A_j, j \leq n$ tem 2^n elementos.

19. Seja **B** a classe de subconjuntos de um espaço X tais que $E \in$ **A** se E ou E^c forem enumeráveis. Mostre que **B** é um anel.

20. Seja um espaço métrico (topológico) X e $\mathcal{A}$ a σ - álgebra gerada pelos conjuntos abertos de X. Ela é chamada de σ - álgebra dos **borelianos**

21. Mostre que a σ-álgebra dos Borelianos de $\mathbb{R}$ é gerada por
    (a) os intervalos abertos (a,b)
    (b) os intervalos fechados [a,b]
    (c) os intervalos semi-abertos [a,b) ou os intervalos semi-abertos (a,b]
    (d) os intervalos semi-infinitos fechados $[a, +\infty)$ ou $(-\infty, a]$
    (e) os intervalos semi-infinitos abertos $(a, +\infty)$ ou $(-\infty, a)$
    Solução: Sejam $\mathcal{F}_j$ as famílias de conjuntos acima e $\mathcal{G}_j$ as σ - álgebras geradas por cada família de conjuntos acima. Vejamos que $\mathcal{G}_{j+1} \supset \mathcal{G}_j$ e $\mathcal{G}_1 \supset \mathcal{G}_5$ mostrando que $\mathcal{G}_{j+1} \supset \mathcal{F}_j$. Logo as $\mathcal{G}_j$ são iguais.
    $\mathcal{G}_2 \supset \mathcal{F}_1$. Com efeito, (a,b)=$\cup_1^{+\infty}[a + \frac{1}{n}, b - \frac{1}{n}]$
    $\mathcal{G}_3 \supset \mathcal{F}_2$. Com efeito, [a,b]=$\cap_1^{+\infty}(a - \frac{1}{n}, b]$. Com a família dos [a,b) é análogo.
    $\mathcal{G}_4 \supset \mathcal{F}_3$. Com efeito, (a,b]=$(-\infty, a]^c \cap (-\infty, b]$
    $\mathcal{G}_5 \supset \mathcal{F}_4$. Com efeito, $[a, +\infty) = (-\infty, a)^c$. Análogo $(-\infty, a]$.
    $\mathcal{G}_1 \supset \mathcal{F}_5$. Com efeito, $(a, +\infty) = \cup_1^{+\infty}(a, a + n)$. Análogo $(-\infty, a)$.

22. Se $X = R^2$ enuncie uma afirmação semelhante à anterior.

23. Um conjunto A é um F_σ se ele for união enumerável de fechados. Um conjunto B é um G_δ se ele for interseção enumerável de abertos.
    Mostre que os conjuntos F_σ e G_δ pertencem à σ-álgebra dos Borelianos.

24. Seja $\mathcal{A}$ uma σ - álgebra no espaço X e $B \in \mathcal{A}$. Mostre que a classe $\mathcal{C} = \{B \cap D\}$ onde $D \in \mathcal{A}$, é uma σ- álgebra no espaço B.

25. Seja $\mathcal{A}$ uma σ - álgebra no espaço X e(B_n) uma sequência de conjuntos de $\mathcal{A}$. Então $B = \cap_{j=1}^{\infty} B_j \in \mathcal{A}$.

    (a) Seja (A_n) uma sequência de conjuntos de um espaço X. E $A = \cap_{n=1}^{\infty} \cup_{j=n}^{\infty} A_j$. Ele consiste de todos os $x \in X \backslash x \in A_j$ para infinitos valores de j. A chama-se o **lim sup** A_n

    (b) Seja (A_n) uma sequência de conjuntos de um espaço X. E $A = \cup_{n=1}^{\infty} \cap_{j=n} A_j^{\infty}$. Ele consiste de todos os $x \in X \backslash x \in A_j$ exceto para finitos valores de j. A chama-se o **lim inf** A_n

    (c) Se lim sup $A_n =$ lim inf A_n o valor comum chama-se o **lim** A_n

    (d) Seja (F_n) uma sequência de conjuntos de um espaço X.
    ela denomina-se **Monótona Decrescente** se $F_n \supseteq F_{n+1} \forall n \in \mathbb{N}$

    (e) Seja (G_n) uma sequência de conjuntos de um espaço X.
    ela denomina-se **Monótona Crescente** se $G_n \subseteq G_{n+1} \forall n \in \mathbb{N}$

    (f) nos dois casos anteriores a sequência denomina-se **Monótona**

    (g) uma classe $\mathcal{M}$ de conjuntos de um espaço X se diz **Monótona** se o lim de qualquer sequência monótona de conjuntos de $\mathcal{M}$ está em $\mathcal{M}$.

    (h) a classe monótona $\mathcal{M}$ gerada por uma família de conjuntos $\mathcal{F}$ é a classe monótona minimal que contém $\mathcal{F}$. Mostre que ela existe e é única.

26. Uma álgebra $\mathcal{A}$ é uma classe monótona , se e somente se ela for uma σ-álgebra.

27. Mostre que se (H_n) for monótona então lim sup $H_n =$ lim inf H_n

28. Dê um exemplo de uma (H_n) tal que lim sup $H_n = X$ e lim inf $H_n = \varnothing$
    Solução : seja $H_{2n} = X$ e $H_{2n+1} = \varnothing$

29. De um exemplo de uma (H_n) tal que lim inf H_n=lim sup H_n mas H_n não é monótona
    Solução: seja $H_{2n} = (\frac{-1}{n}, \frac{1}{n})$ e $H_{2n+1} = (\frac{-1}{2n}, \frac{1}{2n})$

30. Seja $\mathcal{A}$ uma σ-álgebra. Se ela tiver infinitos conjuntos então

    card $(\mathcal{A}) \geq c =$ card$(\mathbb{R})$
    Solução: enumeramos conjuntos disjuntos (H_n). Logo existe uma bijeção das uniões dos (H_n) com $\wp(\mathbb{N})$. Estas uniões são diferentes entre si porque os (H_n) são disjuntos. Como card $(\wp(\mathbb{N})) \gneqq$ card $(\mathbb{N})$ segue o resultado.