Alguns comentários sobre os exercícios de revisão pedidos até agora.

1. Sejam X_0, X_1 v.a. independentes, $X_0 \sim \text{Poisson}(\lambda_1)$, $X_1 \sim \text{Poisson}(\lambda_2)$. Qual é a distribuição de probabilidade de $Z = X_0 + X_1$?

É um dos raros exemplos de situação onde podemos achar diretamente a distribuição da soma de duas v.a., sem precisar de resultados envolvendo a função geradora.

$$P(Z=k) = \sum_{\ell=0}^{k} P(Z=k \mid X_1=\ell)\, P(X_1=\ell) = \ldots$$

(complete...)

$$= \frac{e^{-(\lambda_1+\lambda_2)} (\lambda_1+\lambda_2)^k}{k!} \quad \text{Poisson}(\lambda_1+\lambda_2)$$

2. Sejam T_1, T_2 e T_3 três v.a. independentes com distribuição exponencial com parâmetros, respectivamente, λ_1, λ_2 e λ_3. a) Determine $P(T_1 < \min\{T_2, T_3\})$. b) Determine $P(T_1 < T_2 | \min\{T_1, T_2\} \leq t)$.

É um exercício de integrais. Comece mostrando que $\min\{T_1, T_2\} \sim \exp(\lambda_1+\lambda_2)$

3. O tempo de funcionamento de um certo tipo de lâmpada segue uma distribuição exponencial de média 100 horas. Suponha também que os tempos de funcionamento de lâmpadas distintas sejam independentes. (lembre que, se T é uma variável aleatória com distribuição exponencial então sua função densidade de probabilidade é dada por $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$, $x \geq 0$ e $E(T) = \frac{1}{\lambda}$.) a) Uma lâmpada é acesa. Qual é a probabilidade de que ela funcione por mais de 100 horas? b) Três lâmpadas são acesas no mesmo instante. Qual é a probabilidade de que pelo menos uma delas funcione por mais de 100 horas? c) Numa caixa há 5 lâmpadas sendo que 2 estão queimadas e 3 estão funcionando normalmente. Escolho uma dessas lâmpadas ao acaso. Qual é a probabilidade que esta lâmpada funcione por mais de 100 horas?

Novamente, envolve cálculos simples envolvendo a importante v.a. exponencial.

4. Após um discussão política, três indivíduos, digamos, srs. A, B e C, decidem resolver sua desavença através de um "duelo triplo". Sr. A acerta seu alvo com probabilidade $\frac{3}{4}$ em cada tiro; sr. B acerta com probabilidade $\frac{1}{2}$ e o sr. C acerta com probabilidade $\frac{1}{4}$. Assuma independência e que, em cada rodada deste duelo triplo, cada participante sobrevivente atira no melhor oponente vivo, ou seja, atira naquele que acerta seu alvo com maior probabilidade. Portanto, na primeira rodada, B e C atiram em A e A atira em B. Os tiros sao simultâneos. Descreva a cadeia de Markov correspondente, com espaço de estados = "conjunto dos indivíduos sobreviventes numa dada rodada" (portanto, há 8 estados). Qual é a probabilidade de que o sr. C sobreviva o duelo?

Se X_n descreve o "estado da cadeia" no n-ésimo passo, começamos descrevendo esse espaço de estados S. Um elemento $\omega \in S$ precisa me descrever, para cada indivíduo A, B e C sua "presente situação". Para não sermos macábros, vamos imaginar que o duelo é de brincadeira (paintball, talvez) e, em cada passo, um jogador pode estar "participando" ou "foi eliminado do jogo". Um bit por jogador. Então $\omega = (\omega_A, \omega_B, \omega_C)$, com $\omega_i \in \{0,1\}$, $i = A, B$ ou C, e S tem 8 elementos.

O que você precisa verificar para garantir que $\{X_n\}_{n \geq 0}$ é uma cadeia de Markov (em tempo discreto)?

Qual é a Matriz de transição?

Classifique os estados dessa cadeia; ela é irredutível?; tem distribuição de probabilidade invariante? Única? Como determino a (as) medida(s) invariantes? Em termos da cadeia, o que significa "C sobrevive ao duelo"?

Você consegue "verificar" por simulação seus resultados teóricos?

5. Um sistema de comunicação é tal que, se um símbolo é transmitido corretamente, a probabilidade de que o símbolo seguinte seja correto é de 0,9. Se, no entanto, um símbolo for transmitido incorretamente, a probabilidade de o próximo também o seja é de 0,5. A transmissão pode ser modelada pela sequência markoviana, $\{X_1, X_2, \ldots\}$ onde $X_i = 1$ se o i-ésimo símbolo for transmitido corretamente, e $X_i = 0$ se o i-ésimo símbolo for incorreto. Suponha que a probabilidade de que o primeiro símbolo seja transmitido corretamente seja 0,7. a) Calcule a Matriz de transição. b) Calcule $P(X_3 = 1|\pi_0)$, onde π_0 é a distribuição inicial dada(a probabilidade de que o primeiro símbolo seja transmitido corretamente é 0,7). c) Após muito tempo qual é a proporção de símbolos transmitida corretamente?

Como o exercício anterior, o objetivo é recordar a definição de Cadeia de Markov em tempo discreto e resultados envolvendo medidas de probabilidade invariantes e comportamento da cadeia após tempos muito longos. Preciso revisar estas coisas?

6. Três bolas numeradas de 1 até 3 são distribuidas em duas urnas A e B. A cada instante, um dado honesto é lançado. Se o número que aparece na face de cima for de 1 até 3, a bola de número correspondente é trocada de urna; se, por outro lado, a face que sai para cima for 4, 5 ou 6, as urnas permanecem como estão até o instante seguinte, quando o processo todo se repete. Seja $X_n \in \{0,1,2,3\}$ o número de bolas na urna A no instante n. a) Determine a matriz de transição da cadeia de Markov $\{X_n\}_{n\geq 0}$. b) Seja π a distribuição de probabilidade em $\{0,1,2,3\}$ dada por $\pi(k) = \binom{3}{k}(\frac{1}{2})^3$. Essa distribuição é estacionária?

Esse exemplo envolve o "modelo de urnas de Ehrenfest", um modelo que teve importância muito grande nas origens da teoria de mecânica estatística e que tem propriedades bastante surpreendentes.

O que você tem que verificar para garantir que a distribuição Bin(3, ½) é invariante? Esta cadeia de Markov é reversível? Qual é a diferença entre "invariante" e "reversível"?

7. Certo aparelho pode estar em três estados: 0=funcionando, 1=quebrado e aguardando início de serviço de reparo e 2=quebrado e sendo consertado. Os tempos de permanência (em minutos) em cada estado têm distribuições geométricas independentes com médias μ_a min, μ_b min e μ_c min, resp. Ao final do tempo de permanência num estado a escolha do estado seguinde se faz conforme a matriz de transição dada por $Q(0,1) = Q(1,2) = Q(2,0) = 1$ e $Q(i,j) = 0$ caso contrário. Se X_n = estado do aparelho ("funcionando", "quebrado e aguardando início de serviço de reparo" ou "quebrado e sendo consertado"), mostre que $\{X_n\}_{n\geq 0}$ é uma cadeia de Markov e determine sua matrix de transição.

Esse exercício envolve ainda cadeia de Markov em tempo discreto. Mas os tempos

entre sucessivas transições envolvem a v.a.
com distribuição geométrica, que é o análogo
discreto da distribuição exponencial (Porquê?)

Uma construção simples de uma cadeia de
Markov em tempo contínuo $\{X_t\}_{t\geq 0}$ com
espaço de estados S (discreto, ou seja, finito ou
infinito enumerável) é obtida através do proce-
dimento sugerido no problema:

I) para cada $i \in S$ associo um número $q_i \geq 0$
que vai ser o parâmetro dos sucessivos tempos
de permanência neste estado, assumindo indep.
Ou seja, para cada $i \in S$, tenho
$T_i^1, T_i^2, \ldots$ com $T_i^k \sim exp(q_i)$, $k \geq 1$, indep.

sendo T_i^1 = "tempo de permanência no estado i após
a 1ª visita", e

T_i^k = "tempo de permanência no estado i após
a k-ésima visita", ...
v.a. exponenciais independentes com parâ-
metro $q_i \geq 0$.

II) Após cada permanência num estado $i \in S$ a escolha do próximo estado é feita conforme uma cadeia de Markov em tempo discreto com matriz de transição Q. Ou seja, a cadeia salta de i para j com probabilidade Q_{ij}.

Essa cadeia de Markov em tempo discreta, com matriz de transição Q é chamada de "cadeia imersa" em $\{X_t\}_{t \geq 0}$.

Exercícios:

1) Mostre que a taxa de transição de i para j, na cadeia em tempo contínuo $\{X_t\}_{t\geq 0}$, é dada por

$$q_i Q_{ij} \quad , \quad i \neq j$$

O que acontece para $i=j$?

2) Como fica essa construção para o processo de Poisson?