MAT0315 - Introdução à Análise

Segundo Semestre de 2020
Período Diurno

Martha S. Monteiro

IME-USP

Aula 3 (10/09/2020)

Corpo ordenado

O conjunto dos números reais é caracterizado por ser o único corpo ordenado completo (a menos de isomorfismo).

Nosso grande objetivo nas próximas aulas é dar sentido a essa frase.

Axiomas de corpo

Um *corpo* é um conjunto K munido de duas operações, *adição* e *multiplicação*, satisfazendo os seguintes axiomas:

- (A1) A adição é associativa: $(x+y)+z = x+(y+z), \forall x, y, z \in K$.
- (A2) A adição é comutativa: $x+y = y+x, \forall x, y \in K$.
- (A3) Existe em K um elemento neutro para a adição, indicado por 0, tal que $0+x = x, \forall x \in K$.
- (A4) Para cada $x \in K$ existe em K um elemento oposto, indicado por $-x$, tal que $x+(-x) = 0$.
- (M1) A multiplicação é associativa: $(xy)z = x(yz), \forall x, y, z \in K$.
- (M2) A multiplicação é comutativa: $xy = yx, \forall x, y \in K$.
- (M3) Existe em K um elemento neutro para a multiplicação, indicado por 1, tal que $1 \neq 0$ e que $1x = x, \forall x \in K$.
- (M4) Para cada $x \in K$ tal que $x \neq 0$ existe em K um elemento inverso, indicado por x^{-1}, tal que $x \cdot x^{-1} = 1$.
- (D) Propriedade distributiva: $x(y+z) = xy+xz, \forall x, y, z \in K$.

Exemplos de corpos

- $\mathbb{Q}$
- $\mathbb{R}$
- $\mathbb{C} = \{z = a + bi : a, b \in \mathbb{R}\}$, sendo $i = \sqrt{-1}$.

  Para $z = a + bi$ e $w = c + di$ elementos quaisquer de $\mathbb{C}$, definem-se:

  - $z + w = (a + c) + (b + d)i$
  - $zw = (ac - bd) + (ad + bc)i$

  Você pode verificar facilmente que o elemento neutro da adição é $\mathbf{0} = 0 + 0i$ e o elemento neutro da multiplicação é $\mathbf{1} = 1 + 0i$.

  Além disso, o oposto de $z = a + bi$ é $(-a) + (-b)i$.

  Se $z \neq \mathbf{0}$, seu inverso é $z^{-1} = \dfrac{a}{a^2 + b^2} + \dfrac{-b}{a^2 + b^2} i$

Exemplo de corpo finito

- $\mathbb{Z}_5 = \{0, 1, 2, 3, 4\}$, munido das operações:

$+$	0	1	2	3	4
0	0	1	2	3	4
1	1	2	3	4	0
2	2	3	4	0	1
3	3	4	0	1	2
4	4	0	1	2	3

$\times$	0	1	2	3	4
0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4
2	0	2	4	1	3
3	0	3	1	4	2
4	0	4	3	2	1

Observando as tabelas acima, responda:

- qual o oposto de 1? $-1 = 4$
- qual o oposto de 3? $-3 = 2$
- qual o inverso de 2? $2^{-1} = 3$
- qual o inverso de 4? $4^{-1} = 4$

Algumas consequências dos axiomas de corpo

Em qualquer corpo K valem as seguintes propriedades:

(P1) Cancelamento na adição: Se $a + b = a + c$ então $b = c$.

(P2) Unicidade do elemento neutro da adição: Se $a + b = a$ então $b = 0$.

(P3) Unicidade do oposto: Se $a + b = 0$ então $b = -a$.

(P4) Cancelamento na multiplicação: Se $c \neq 0$ e $ac = bc$ então $a = b$.

(P5) O oposto de 0 é 0.

Algumas consequências dos axiomas de corpo

Em qualquer corpo K valem as seguintes propriedades:

(P6) O produto de qualquer elemento por 0 é igual a 0.

(P7) Se o produto de dois elementos é 0 então um dos fatores é 0.

(P8) Para qualquer $a \in K$, valem:

- (i) $(-1)a = -a$
- (ii) $-(-a) = a$

(P9) Para quaisquer elementos a e b, valem:

- (i) $(-a)b = -(ab) = a(-b)$
- (ii) $(-a)(-b) = ab$

Algumas consequências dos axiomas de corpo

- Como consequência de (P6), não existe um número 0^{-1} que satisfaz $0 \cdot 0^{-1} = 1$. Consequentemente, não existe $\dfrac{a}{0}$, ou seja, não é possível definir divisão por 0.
- A propriedade (P7) é usada frequentemente na resolução de equações.

  Por exemplo, para resolver a equação $x^2 - 7x + 10 = 0$ basta saber que essa equação é equivalente a $(x-5)(x-2) = 0$. Por (P7), um dos dois fatores deve ser 0 e, portanto, $x = 5$ ou $x = 2$.
- De modo análogo, vemos que as soluções da equação $(x^2 - 7x + 10)\cos x = 0$ são $x = 5$ ou $x = 2$ ou $x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Algumas consequências dos axiomas de corpo

Um exemplo do uso da propriedade distributiva é o algoritmo de multiplicação entre dois inteiros que aprendemos na escola. Por exemplo, a conta

$$\begin{array}{cc} 2 & 3 \\ \times & 4 \\ \hline 9 & 2 \end{array}$$

é nada mais do que uma maneira prática de usar as propriedades associativa e distributiva na multiplicaçção de 4 por 23. Observe:

$$23 \times 4 = (20+3) \times 4 \overset{(D)}{=} 20 \times 4 + 3 \times 4 = 80 + 12 =$$

$$= 80 + (10+2) \overset{(A1)}{=} (8+1) \times 10 + 2 = 90 + 2 = 92$$

Algumas consequências dos axiomas de corpo

Analogamente,

$$\begin{array}{cccc} & & 2 & 3 \\ & \times & 5 & 4 \\ \hline & & 9 & 2 \\ 1 & 1 & 5 & \\ \hline 1 & 2 & 4 & 2 \end{array}$$

Quais propriedades estão sendo usadas em cada passagem?