



ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Elementos de Máquinas para Automação

PMR 3307 – A8

Falha por instabilidade - Flambagem

2020.2



Cronograma de aulas

Dia	S	Aula	Tópico	Prof.
18.08	3ª	A1	Introdução a disciplina Modelagem, carregamento e equilíbrio	RS
21.08	6ª	A2	Comportamento mecânico dos materiais	RS
25.08	3ª	A3	Composição de tensões Estado plano de tensões – Círculo de Mohr	RS
28.08	6ª	A4	Teorias de Falha: 1) Falha por deformação excessiva; fundamentos	RS
01.09	3ª	A5	Teorias de Falha: 2) Falha por deformação permanente: von Mises, Tresca, Coulomb-Mohr;	RS
04.09	6ª	A6	Teorias de Falha: 3) Falha por fadiga: Parte - 1	RS
08.09	3ª	A7	Teorias de Falha: 3) Falha por fadiga: Parte - 2	RS
11.09	6ª	A8	Teorias de Falha: 4) Falha por instabilidade: flambagem	RS
15.09	3ª	A9	Teorias de Falha: 5) Falha por impacto: Parte - 1	RS
18.09	6ª	A10	Teorias de Falha: 6) Falha por impacto: Parte - 2	RS
22.09	3ª	A11	Teorias de Falha: 6) Falha por desgaste excessivo	RS
25.09	6ª	A12	Fixações cubo-eixo	NG
29.09	3ª	A13	Especificação e dimensionamento de elementos de fixação: Rebites	NG
02.10	6ª	A14	Especificação e dimensionamento de elementos de fixação: Parafusos: Parte - 1	NG
06.10	3ª	A15	Especificação e dimensionamento de elementos de fixação: Parafusos: Parte - 2	NG
09.10	6ª	A16	Especificação e dimensionamento de elementos de transmissão: Fusos	NG
13.10	3ª	A17	Análise e dimensionamento de componentes mecânicos: Mancais: Parte - 1	NG
16.10	6ª	A18	Análise e dimensionamento de componentes mecânicos: Mancais: Parte - 2	NG
20.10	3ª	A19	Análise e dimensionamento de componentes mecânicos: Molas: Parte - 1	NG
23.10	6ª	A20	Análise e dimensionamento de componentes mecânicos: Molas: Parte - 2	NG
27.10	3ª	A21	Análise e dimensionamento de componentes mecânicos: Freios e embreagens	NG
30.10	6ª	A22	Análise e dimensionamento de componentes mecânicos: Correias e Correntes	NG
03.11	3ª	A23	Análise e dimensionamento de componentes mecânicos: Engrenagens: Parte - 1	RS
06.11	6ª	A24	Análise e dimensionamento de componentes mecânicos: Engrenagens: Parte - 2	RS
10.11	3ª	A25	Análise e dimensionamento de componentes mecânicos: Engrenagens: Parte - 3	RS
13.11	6ª	A26	Análise e dimensionamento de componentes mecânicos: Engrenagens: Parte - 4	RS
17.11	3ª	---	Feriado municipal – Consciência Negra	
20.11	6ª	A27	Análise e dimensionamento de componentes mecânicos: Guias de escorregamento	RS
24.11	3ª	A28	Análise e dimensionamento de componentes mecânicos: Guias lineares	RS
27.11	6ª	A29	Apresentação dos trabalhos	RS
01.12	3ª	A30	Apresentação dos trabalhos	
04.12	6ª	A29	Apresentação dos trabalhos	
08.12	3ª	A30		
11.12	6ª	A31		
14.12	2ª		Encerramento do semestre 2020-2	



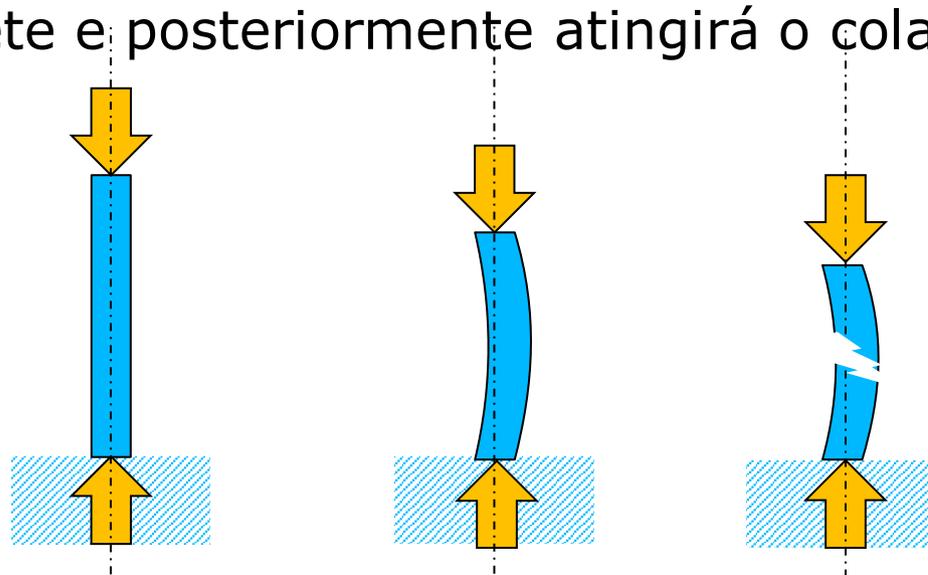
Tópicos

- ▶ Problema de elementos sujeitos a compressão
- ▶ Flambagem de Coluna longas com carregamento concêntrico/axial
- ▶ Equação para coluna de Euler
- ▶ Flambagem de Coluna intermediárias com carregamento central
- ▶ Flambagem de Colunas com carregamentos NÃO concêntricos
- ▶ Flambagem de Colunas curtas sob compressão



Problema de elementos sujeitos a compressão

- ▶ O projeto e análise de elementos de máquinas sujeitos a compressão difere significativamente daquele aplicado a elementos sujeitos a carregamentos de tração e torção.
- ▶ Se pegarmos um eixo ou barra longa e aplicarmos gradativamente uma força compressiva em cada uma das extremidades, em princípio nada acontecerá. Até o ponto onde esta flete e posteriormente atingirá o colapso.





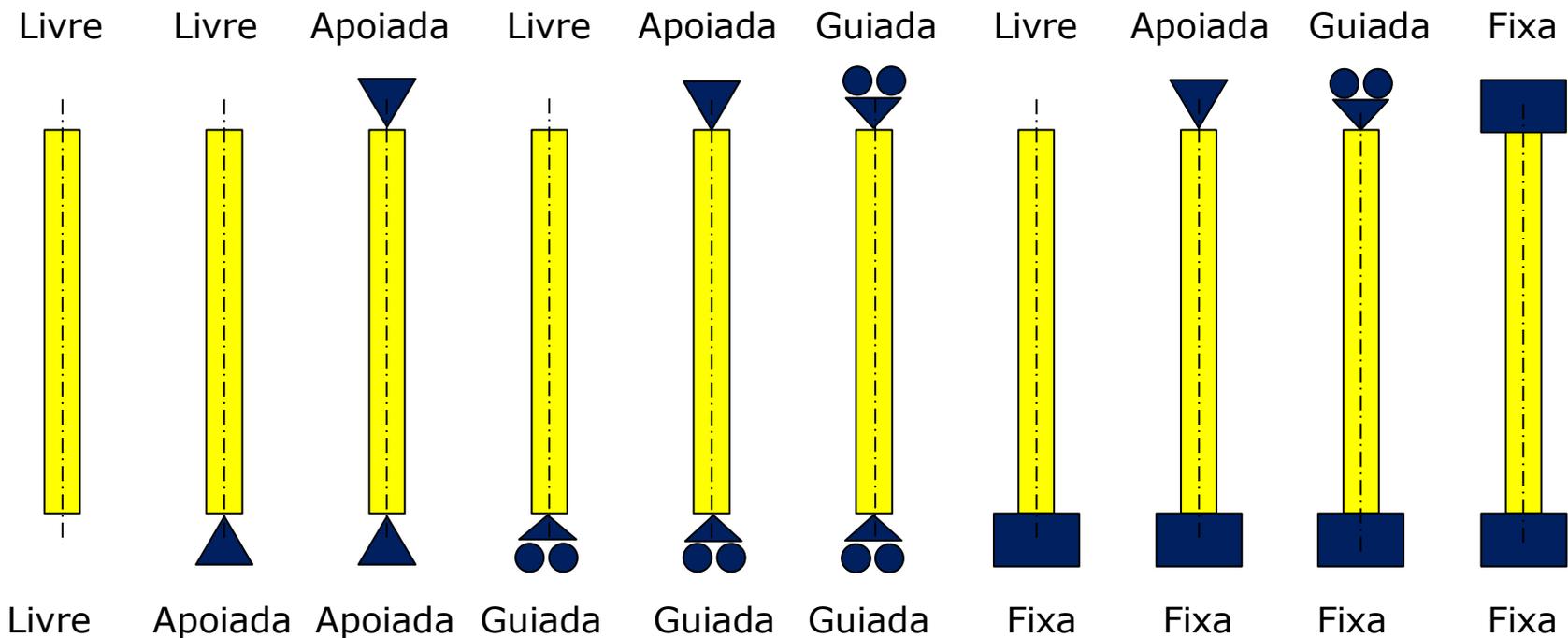
Problema de elementos sujeitos a compressão

- ▶ O termo coluna será aplicado a todos elementos com elevada relação l/D , exceto aqueles onde a falha ocorrerá por compressão pura.
- ▶ As colunas podem ser divididas em:
 - ▶ Coluna longas com carregamento central
 - ▶ Colunas intermediárias com carregamento central
 - ▶ Colunas com carregamentos excêntricos
 - ▶ Eixos/barras ou colunas curtas com carregamento excêntrico



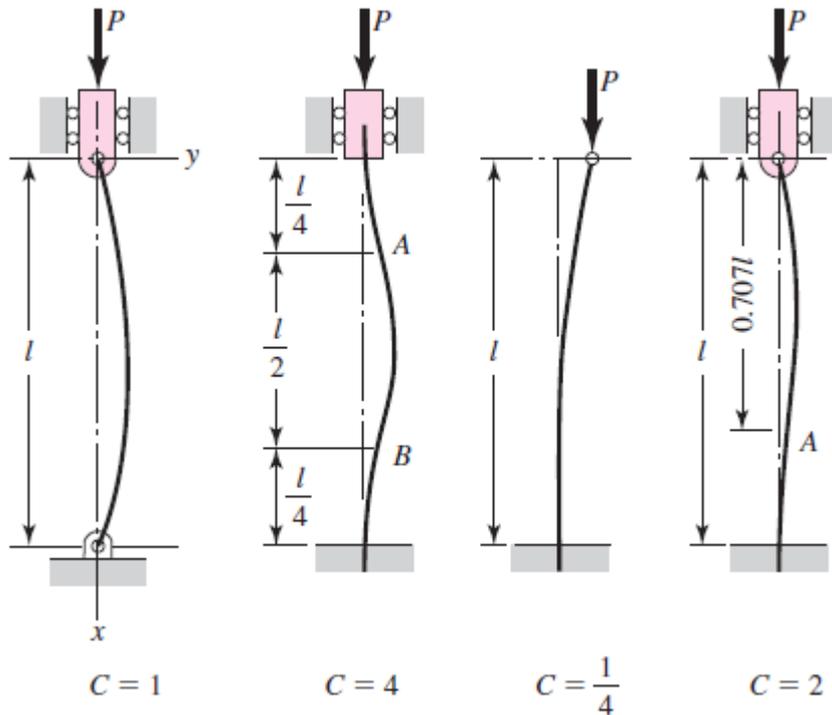
Flambagem de Coluna longas com carregamento concêntrico/axial

- ▶ O primeiro passo na análise de colunas é identificar o tipo de sujeição da mesma





Equação de coluna de Euler



$$P_{cri} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I}{l^2}$$

Equação de
coluna de Euler

$C =$ constante de condição de apoio
(end-condition constant)

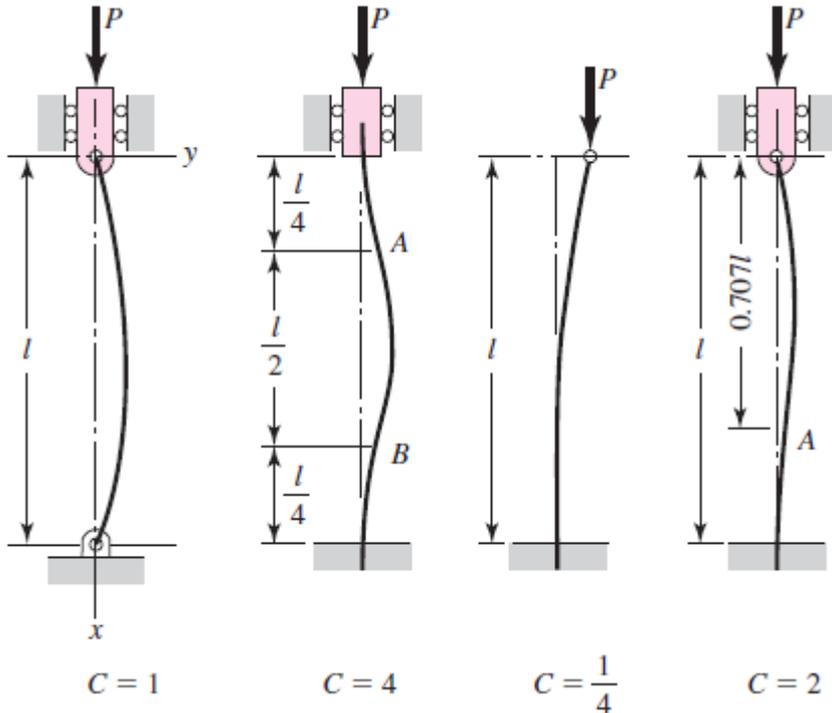
$C = f(\text{forma do apoio})$

- $\rightarrow C = C_{teórico}$
- $\rightarrow C = C_{efetivo}$

$$P_{cri} = \frac{C \cdot \pi^2 \cdot E \cdot I}{l^2}$$



Equação de coluna de Euler



$$P_{cri} = \frac{C \cdot \pi^2 \cdot E \cdot I}{l^2}$$

$$I = A \cdot k^2$$

k = raio de giro

A = área da seção

$$\frac{P_{cri}}{A} = \frac{C \cdot \pi^2 \cdot E}{\left(\frac{l}{k}\right)^2}$$

$\frac{l}{k}$ = índice de esbeltez da coluna





Flambagem de Coluna longas com carregamento central

Condições de apoio	Comprimento Efetivo Teórico L_{eff}^T	Comprimento efetivo de Euler L_{eff}^E	C Teórico	C efetivo	Forma do modo de flambagem
Livre - Livre	L	1,2.L	1	0,694	$\sin (\pi x/L)$
Apoiada - Livre	L	1,2.L	1	0,694	$\sin (\pi x/L)$
Apoiada-Apoiada	L	L	1	1	$\sin (\pi x/L)$
Guiada - Livre	2.L	2,1.L	0,25	0,227	$\sin (\pi x/2L)$
Guiada - Apoiada	2.L	2.L	0,25	0,25	$\cos (\pi x/2L)$
Guiada - Guiada	L	1,2.L	1	0,694	$\cos (\pi x/L)$
Fixa - Livre	2.L	2,1.L	0,25	0,227	$1-\cos (\pi x/2L)$
Fixa - Apoiada	0,7.L	0,8.L	2,041	1,562	$\sin kx - kL \cos kx + kL(1-x/L)$
Fixa - Guiada	L	1,2.L	1	0,694	$1 - \cos (\pi x/L)$
Fixa - Fixa	0,5.L	0,65.L	4	2,367	$1 - \cos (2\pi x/L)$

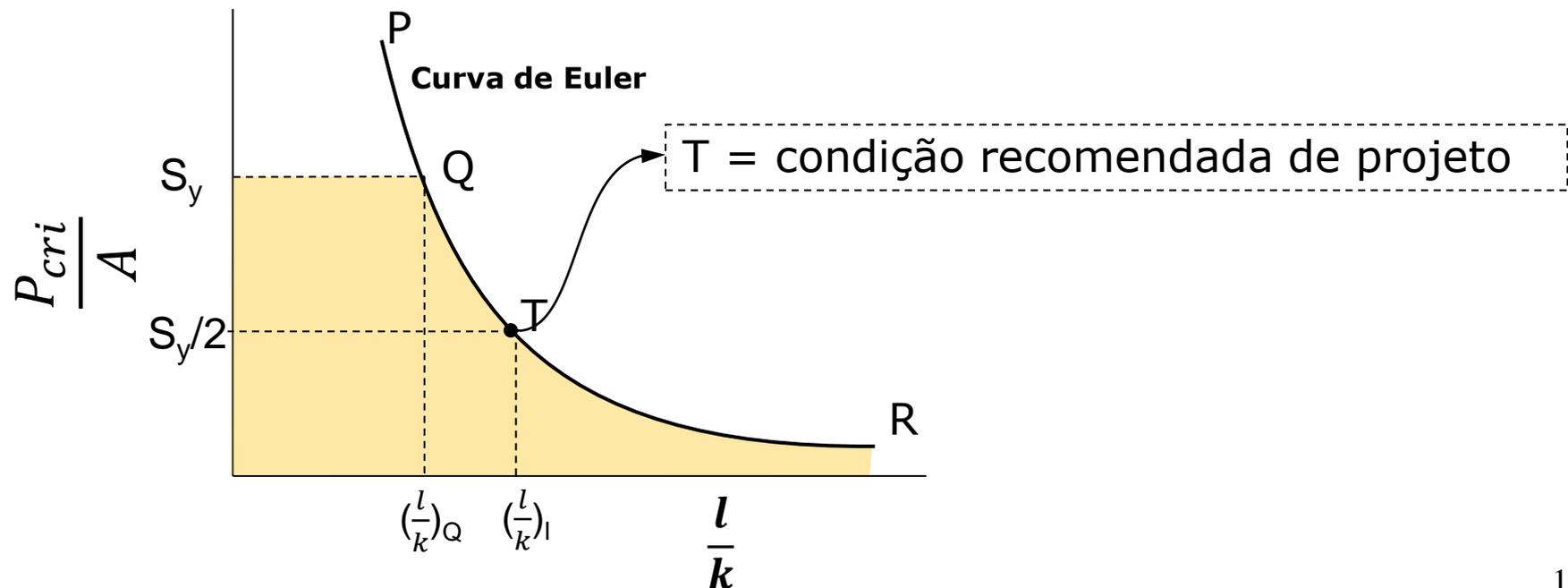


Flambagem de Coluna longa com carregamento axial

$$\frac{P_{cri}}{A} = \frac{C \cdot \pi^2 \cdot E}{(l/k)^2}$$

$\frac{P_{cri}}{A}$ \Rightarrow é o carregamento crítico unitário, e exprime a quantidade de área necessária para uma coluna suporte o carregamento

Plotando temos:





Flambagem de Coluna intermediárias com carregamento central

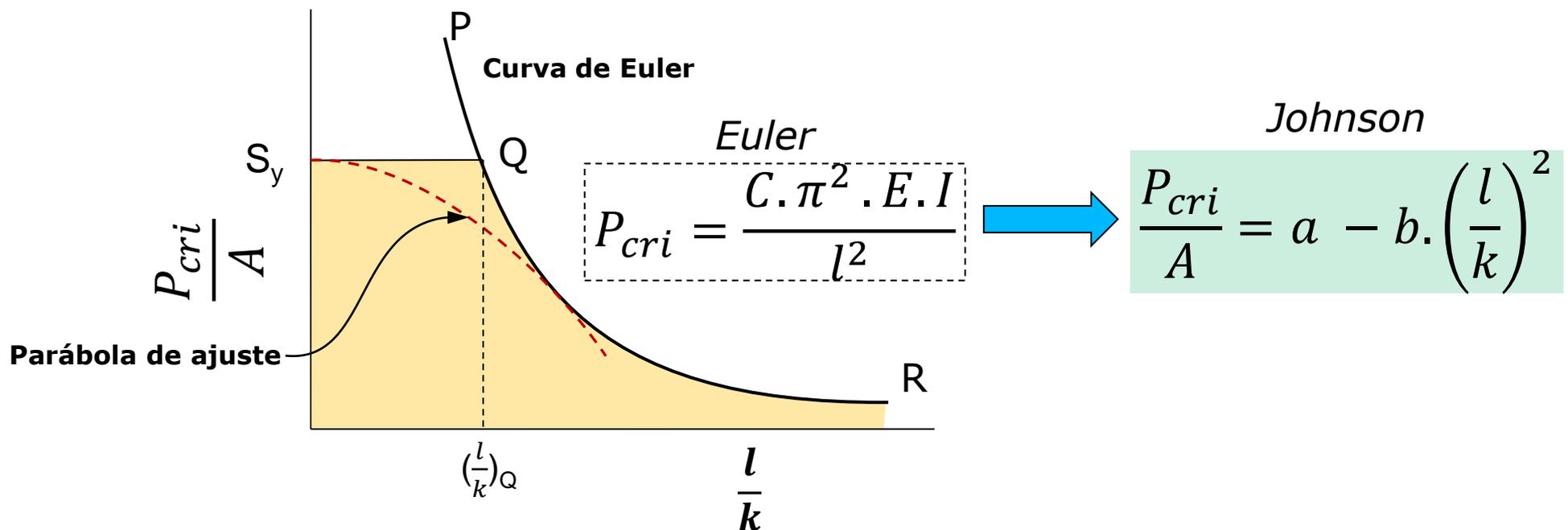
- ▶ Existem uma série problemas envolvendo eixos, barras e colunas onde a solução de Euler para elementos longos não é aplicável.
- ▶ Desta forma recomenda-se a solução parabólica ou de formula de *Johnson (J. B. Johnson)*
- ▶ *Equação preferida por projetistas de máquinas, estruturas de aços, automotivos, aeronáuticos, entre outros*

$$\frac{P_{cri}}{A} = a - b \cdot \left(\frac{l}{k}\right)^2 \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{l}{k}\right)_l = \left(\frac{2 \cdot \pi^2 \cdot C \cdot E}{S_y}\right)^{\frac{1}{2}}$$



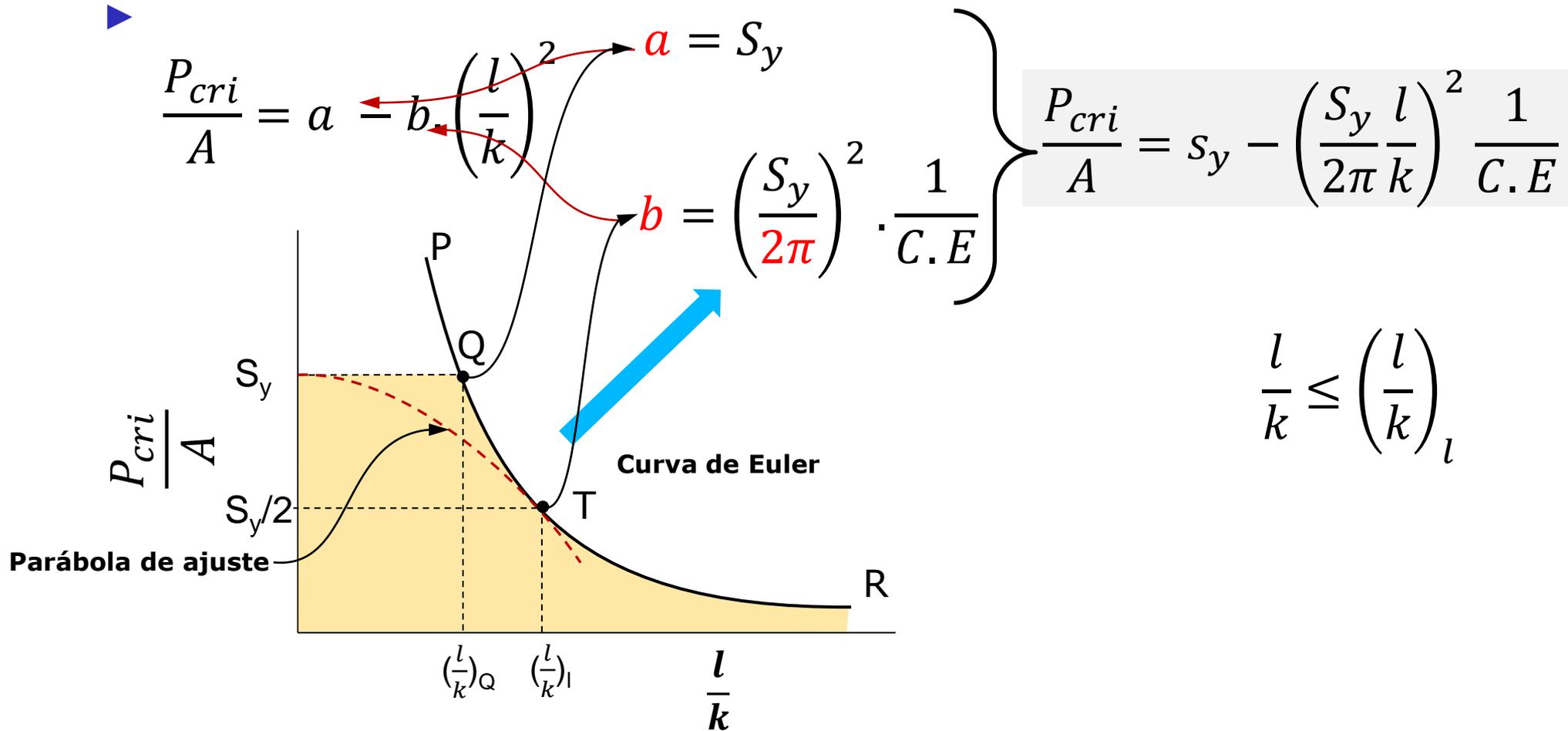
Flambagem de Coluna intermediárias com carregamento axial

- ▶ Onde na solução parabólica **a** e **b** são parâmetros (constantes) de ajustagem curva de Euler





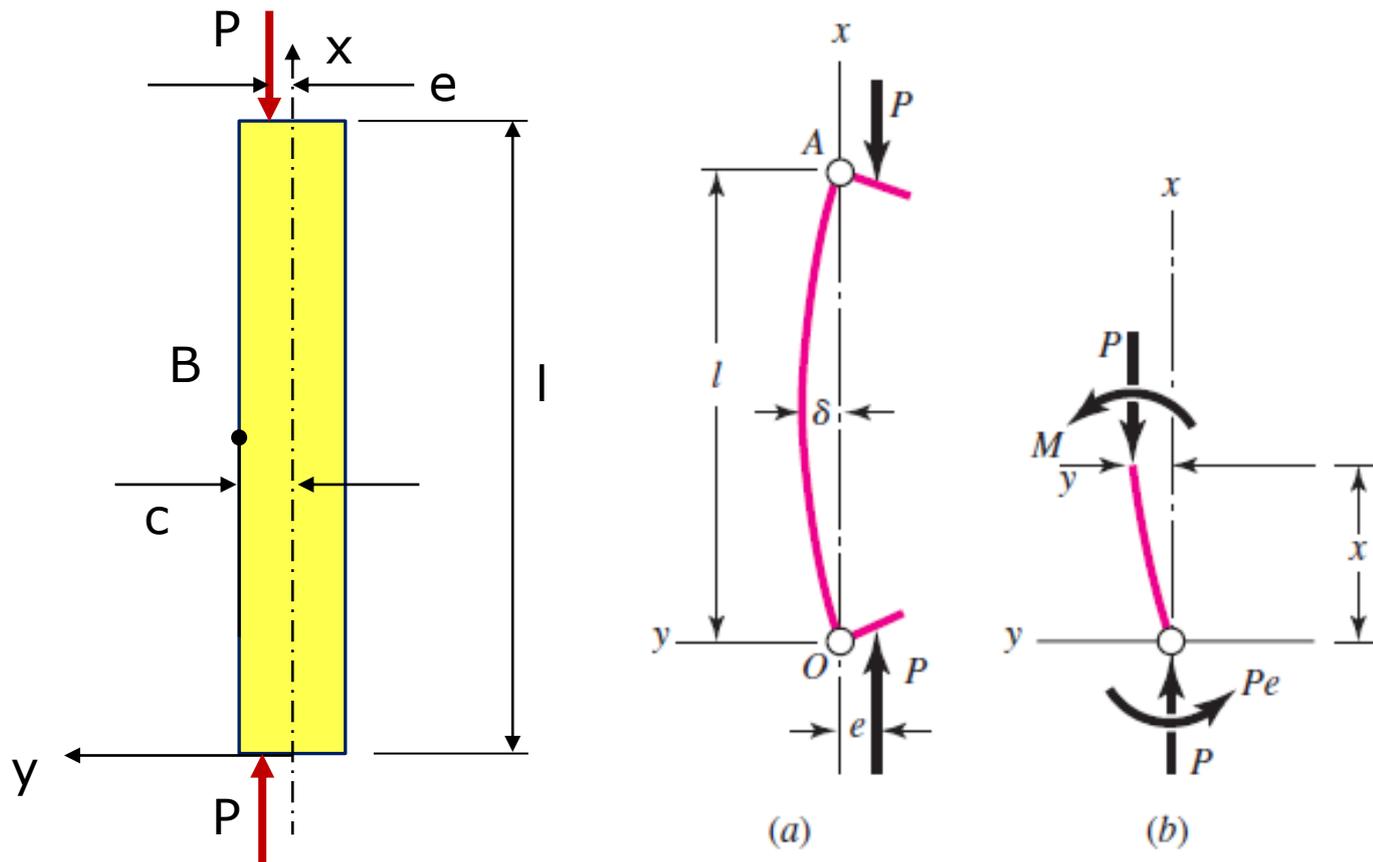
Flambagem de Coluna intermediárias com carregamento axial





Flambagem de Colunas com carregamentos NÃO concêntricos

- ▶ O resultado em termos diferenciais fica:

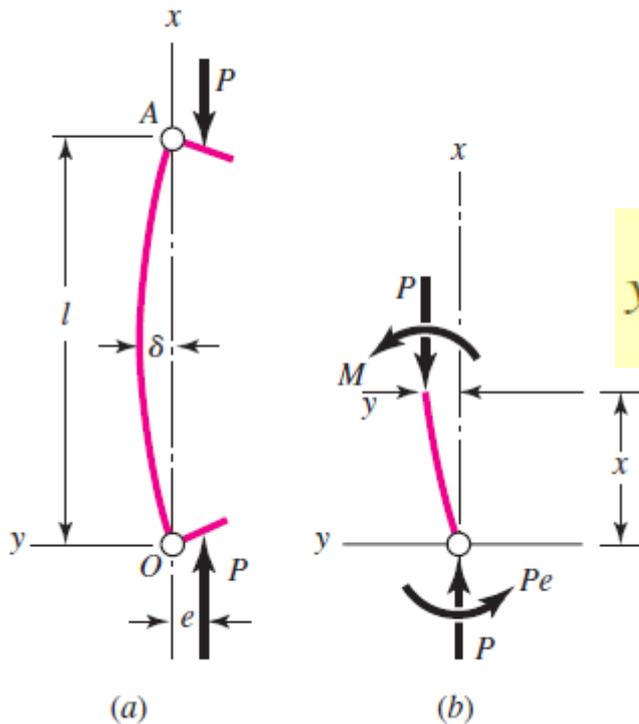




Flambagem de Colunas com carregamentos NÃO concêntricos

- ▶ O resultado em termos diferenciais fica:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{P}{EI}y = -\frac{Pe}{EI}$$



- ▶ Diferenciando para as condições de contorno $y=0$ em $x=0$

$$y = e \left[\tan\left(\frac{l}{2} \sqrt{\frac{P}{EI}}\right) \sin\left(\sqrt{\frac{P}{EI}} x\right) + \cos\left(\sqrt{\frac{P}{EI}} x\right) - 1 \right]$$

- ▶ Para $x=l/2$ (onde ocorre a máxima flambagem)

$$\delta = e \left[\sec\left(\sqrt{\frac{P}{EI}} \frac{l}{2}\right) - 1 \right]$$

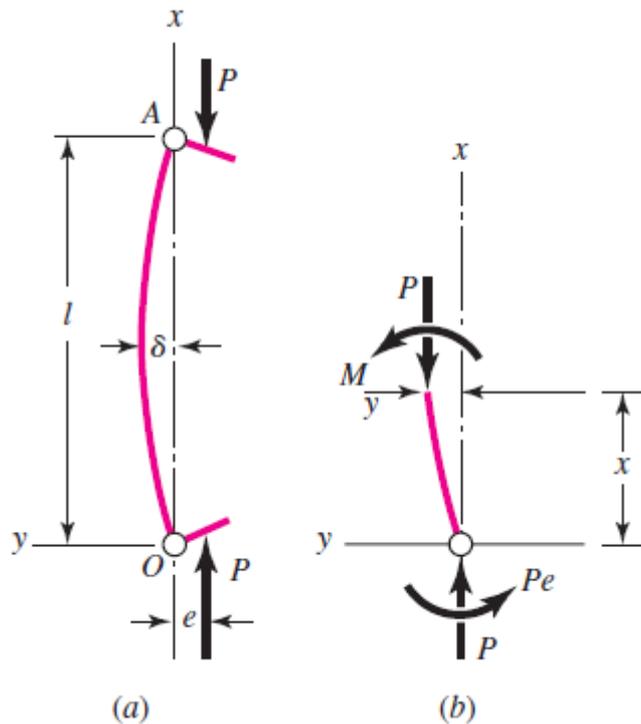


Flambagem de Colunas com carregamentos NÃO concêntricos

- ▶ Para $x=l/2$ (onde ocorre a máxima flambagem)

▶ :

$$\delta = e \left[\sec \left(\sqrt{\frac{P}{EI}} \frac{l}{2} \right) - 1 \right]$$



- ▶ Torna-se

$$M_{\max} = -P(e + \delta) = -Pe \sec \left(\frac{l}{2} \sqrt{\frac{P}{EI}} \right)$$

- ▶ E a máxima tensão compressiva no ponto de máxima flambagem torna-se

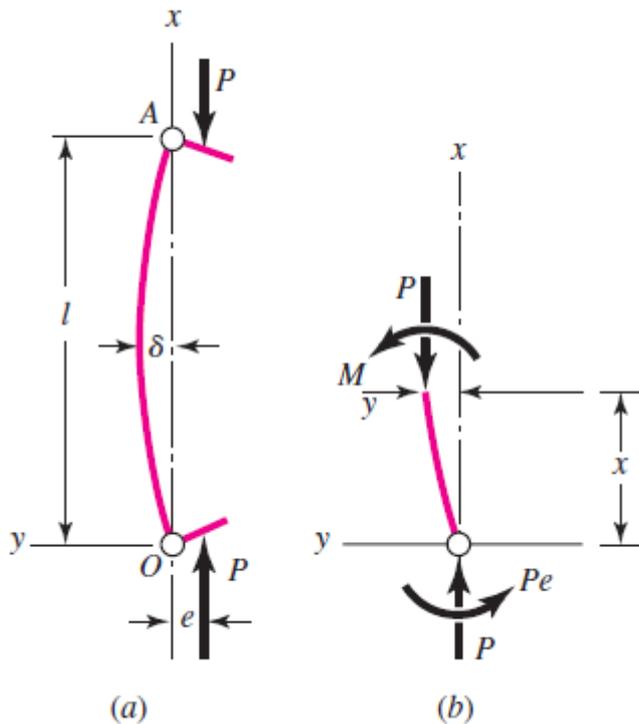
$$\sigma_c = \frac{P}{A} - \frac{Mc}{I} = \frac{P}{A} - \frac{Mc}{Ak^2}$$



Flambagem de Colunas com carregamentos NÃO concêntricos

► Reescrevendo:

$$\sigma_c = \frac{P}{A} - \frac{Mc}{I} = \frac{P}{A} - \frac{Mc}{Ak^2}$$



► Em termos de M_{max} temos:

$$\sigma_c = \frac{P}{A} \left[1 + \frac{ec}{k^2} \sec \left(\frac{l}{2k} \sqrt{\frac{P}{EA}} \right) \right]$$

► Impondo uma tensão compressiva de escoamento S_{yc}

$$\frac{P}{A} = \frac{S_{yc}}{1 + (ec/k^2) \sec[(l/2k)\sqrt{P/AE}]}$$

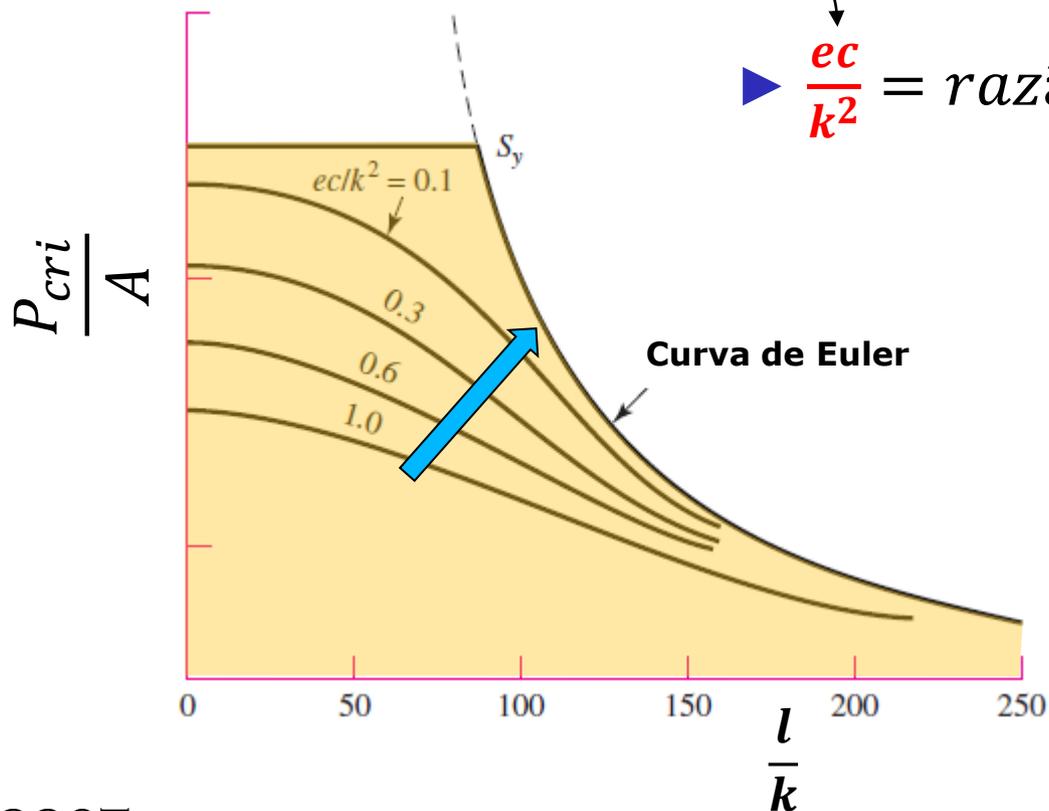


Flambagem de Colunas com carregamentos NÃO concêntricos

► Onde :

$$\frac{P}{A} = \frac{S_{yc}}{1 + (ec/k^2) \sec[(l/2k)\sqrt{P/AE}]}$$

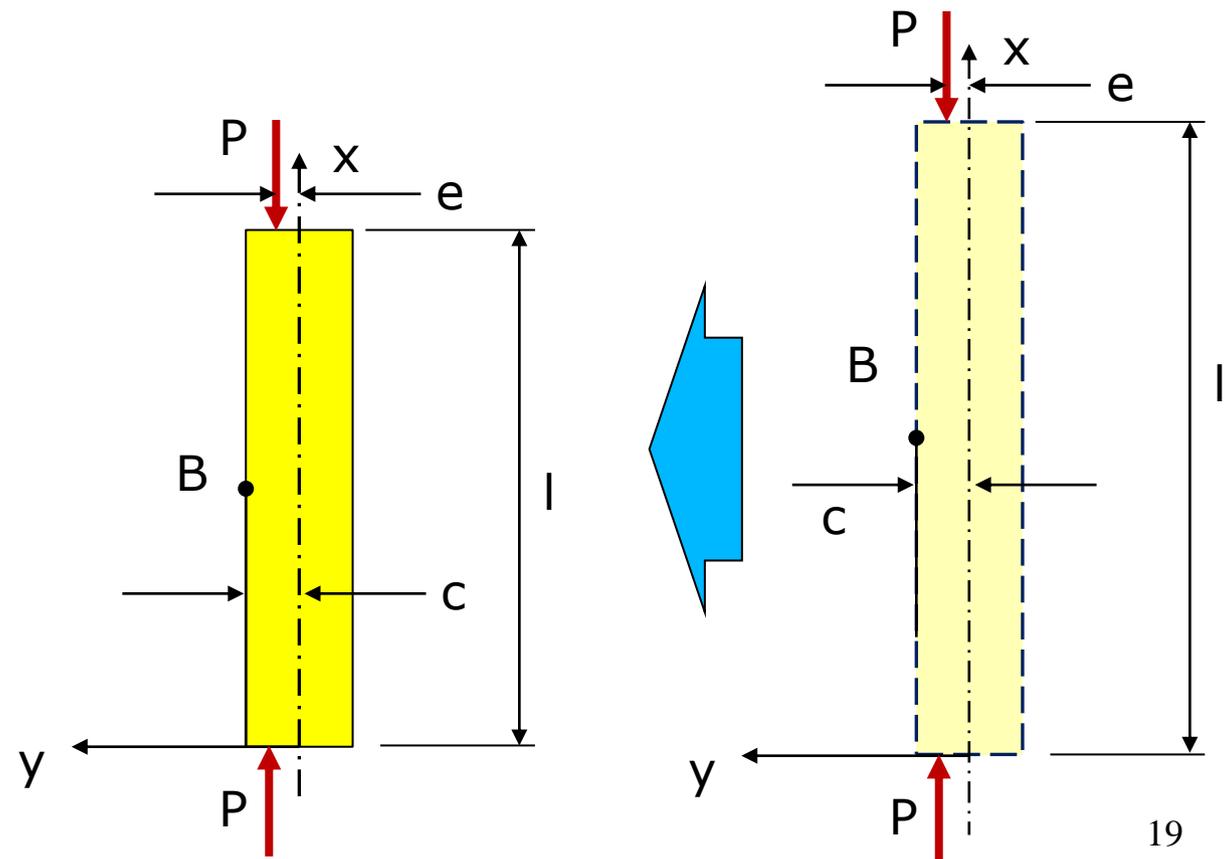
► $\frac{ec}{k^2} = \text{razão de excentricidade}$





Flambagem de Colunas curtas sob compressão

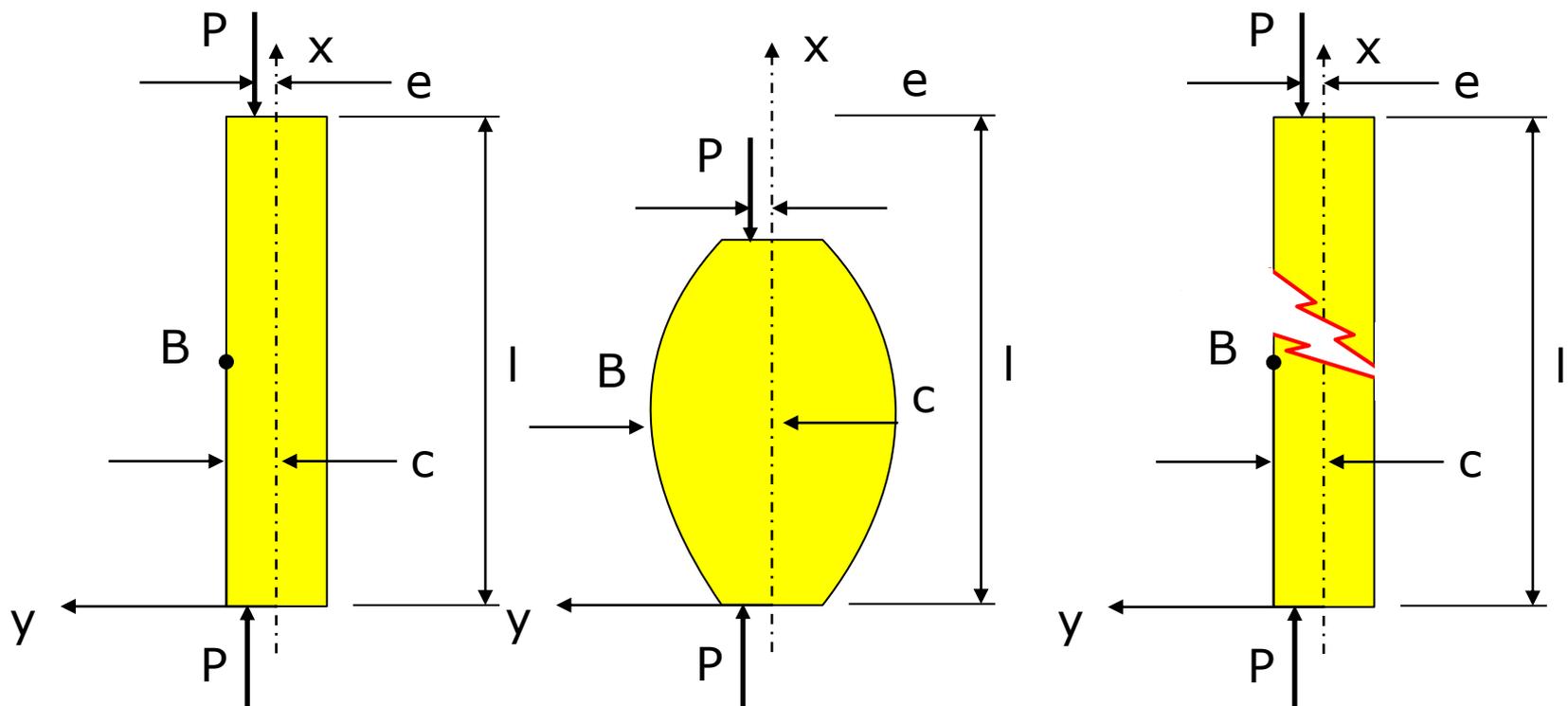
- ▶ Uma coluna/barra curta sob carregamento de compressão pura, gerado por uma força P axialmente, irá se encurtar de acordo com a Lei de Hooke, até a tensão atingir o limite elástico do material





Flambagem de Colunas curtas sob compressão

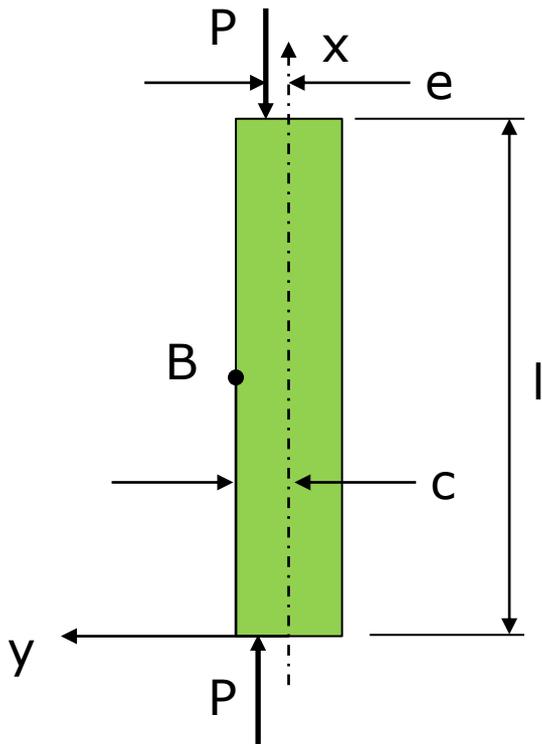
- ▶ No limite elástico, se a força P continuar a aumentar o elemento ou se deforma em forma de barril ou fratura





Flambagem de Colunas curtas sob compressão

- ▶ Para vigas/barras curtas a máxima tensão de compressão na direção x é dada por:



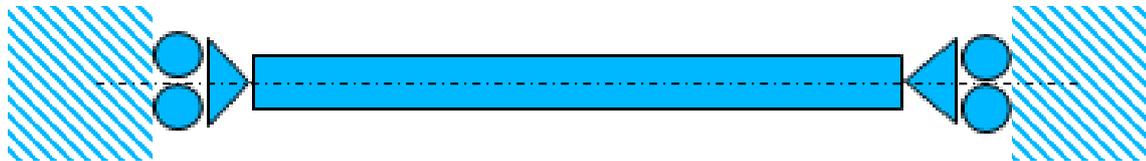
$$\sigma_c = \frac{P}{A} + \frac{Mc}{I} = \frac{P}{A} + \frac{PecA}{IA} = \frac{P}{A} \left(1 + \frac{ec}{k^2} \right)$$

Onde: $k = \left(\frac{I}{A} \right)^{1/2}$ → raio de giro da coluna
 c = coordenada do ponto B
 e = excentricidade da força aplicada



Exemplo 1

- ▶ Uma barra com 1,5m de comprimento deve ser projetada para uma carregamento estimado de 22kN.
- ▶ Utilizando um fator de projeto $n_d=4$, o material selecionado apresenta uma tensão de escoamento de 500MPa e um modulo de elasticidade de 207 GPa, determine o diâmetro necessário para a barra.
- ▶ A condição de montagem da barra é guiada-guiada ($C=1$)





Exemplo 1

- ▶ Dados: $l=1,5m$
- ▶ $P = 22kN$.
- ▶ $Nd = 4$
- ▶ $Sy = 500MPa$
- ▶ $E = 207 Gpa$
- ▶ $C = 1$
- ▶ Diâmetro?

- ▶ Aplicando o fator de segurança

$$P_{cri} = nd.P \quad P_{cri} = 4.22 = 88kN$$

- ▶ Considerando a fórmula de Euler

$$P_{cri} = \frac{C.\pi^2.E.I}{l^2}$$

$$\frac{P_{cri}.l^2}{C.\pi^2.E} = \frac{\pi.D^4}{64}$$

$$\frac{P_{cri}.l^2}{C.\pi^2.E} = I$$

$$D = \left(\frac{64.P_{cri}.l^2}{C.\pi^3.E} \right)^{\frac{1}{4}}$$

$$I = \frac{\pi.D^4}{64}$$

$$D = 37,5mm$$



FIM DA AULA