



ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

# Elementos de Máquinas para Automação

**PMR 3307 – A8**

**Falha por instabilidade - Flambagem**

**2020.2**



## Cronograma de aulas

Dia	S	Aula	Tópico	Prof.
18.08	3ª	A1	<b>Introdução a disciplina</b> Modelagem, carregamento e equilíbrio	RS
21.08	6ª	A2	Comportamento mecânico dos materiais	RS
25.08	3ª	A3	Composição de tensões Estado plano de tensões – Círculo de Mohr	RS
28.08	6ª	A4	Teorias de Falha: 1) Falha por deformação excessiva; fundamentos	RS
01.09	3ª	A5	Teorias de Falha: 2) Falha por deformação permanente: von Mises, Tresca, Coulomb-Mohr;	RS
04.09	6ª	A6	Teorias de Falha: 3) Falha por fadiga: Parte - 1	RS
08.09	3ª	A7	Teorias de Falha: 3) Falha por fadiga: Parte - 2	RS
11.09	6ª	A8	Teorias de Falha: 4) Falha por instabilidade: flambagem	RS
15.09	3ª	A9	Teorias de Falha: 5) Falha por impacto: Parte - 1	RS
18.09	6ª	A10	Teorias de Falha: 6) Falha por impacto: Parte - 2	RS
22.09	3ª	A11	Teorias de Falha: 6) Falha por desgaste excessivo	RS
25.09	6ª	A12	Fixações cubo-eixo	NG
29.09	3ª	A13	Especificação e dimensionamento de elementos de fixação: Rebites	NG
02.10	6ª	A14	Especificação e dimensionamento de elementos de fixação: Parafusos: Parte - 1	NG
06.10	3ª	A15	Especificação e dimensionamento de elementos de fixação: Parafusos: Parte - 2	NG
09.10	6ª	A16	Especificação e dimensionamento de elementos de transmissão: Fusos	NG
13.10	3ª	A17	Análise e dimensionamento de componentes mecânicos: Mancais: Parte - 1	NG
16.10	6ª	A18	Análise e dimensionamento de componentes mecânicos: Mancais: Parte - 2	NG
20.10	3ª	A19	Análise e dimensionamento de componentes mecânicos: Molas: Parte - 1	NG
23.10	6ª	A20	Análise e dimensionamento de componentes mecânicos: Molas: Parte - 2	NG
27.10	3ª	A21	Análise e dimensionamento de componentes mecânicos: Freios e embreagens	NG
30.10	6ª	A22	Análise e dimensionamento de componentes mecânicos: Correias e Correntes	NG
03.11	3ª	A23	Análise e dimensionamento de componentes mecânicos: Engrenagens: Parte - 1	RS
06.11	6ª	A24	Análise e dimensionamento de componentes mecânicos: Engrenagens: Parte - 2	RS
10.11	3ª	A25	Análise e dimensionamento de componentes mecânicos: Engrenagens: Parte - 3	RS
13.11	6ª	A26	Análise e dimensionamento de componentes mecânicos: Engrenagens: Parte - 4	RS
17.11	3ª	---	<b>Feriado municipal – Consciência Negra</b>	
20.11	6ª	A27	Análise e dimensionamento de componentes mecânicos: Guias de escorregamento	RS
24.11	3ª	A28	Análise e dimensionamento de componentes mecânicos: Guias lineares	RS
27.11	6ª	A29	Apresentação dos trabalhos	RS
01.12	3ª	A30	Apresentação dos trabalhos	
04.12	6ª	A29	Apresentação dos trabalhos	
08.12	3ª	A30		
11.12	6ª	A31		
14.12	2ª		<b>Encerramento do semestre 2020-2</b>	



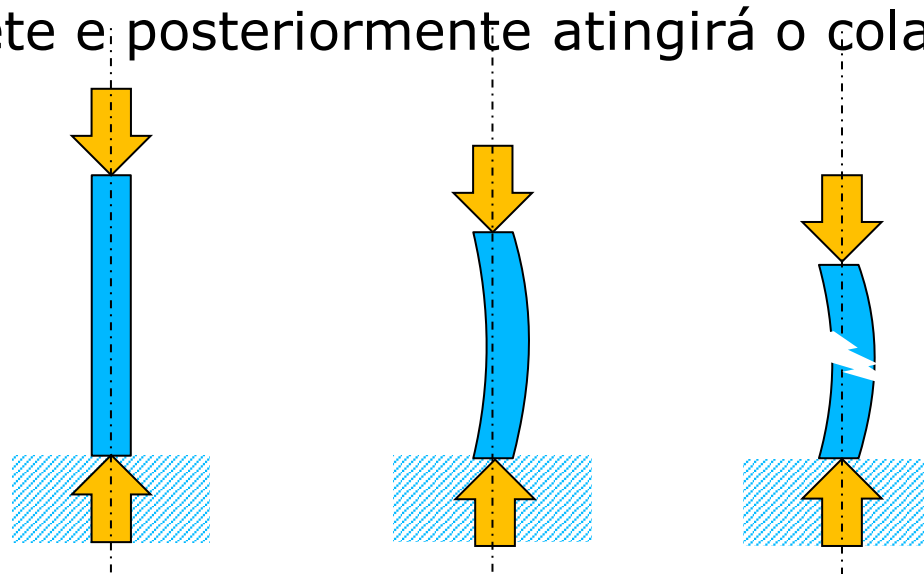
## Tópicos

- ▶ Problema de elementos sujeitos a compressão
- ▶ Flambagem de Coluna longas com carregamento concêntrico/axial
- ▶ Equação para coluna de Euler
- ▶ Flambagem de Coluna intermediárias com carregamento central
- ▶ Flambagem de Colunas com carregamentos NÃO concêntricos
- ▶ Flambagem de Colunas curtas sob compressão



## Problema de elementos sujeitos a compressão

- ▶ O projeto e análise de elementos de máquinas sujeitos a compressão difere significativamente daquele aplicado a elementos sujeitos a carregamentos de tração e torção.
- ▶ Se pegarmos um eixo ou barra longa e aplicarmos gradativamente uma força compressiva em cada uma das extremidades, em princípio nada acontecerá. Até o ponto onde esta flete e posteriormente atingirá o colapso.





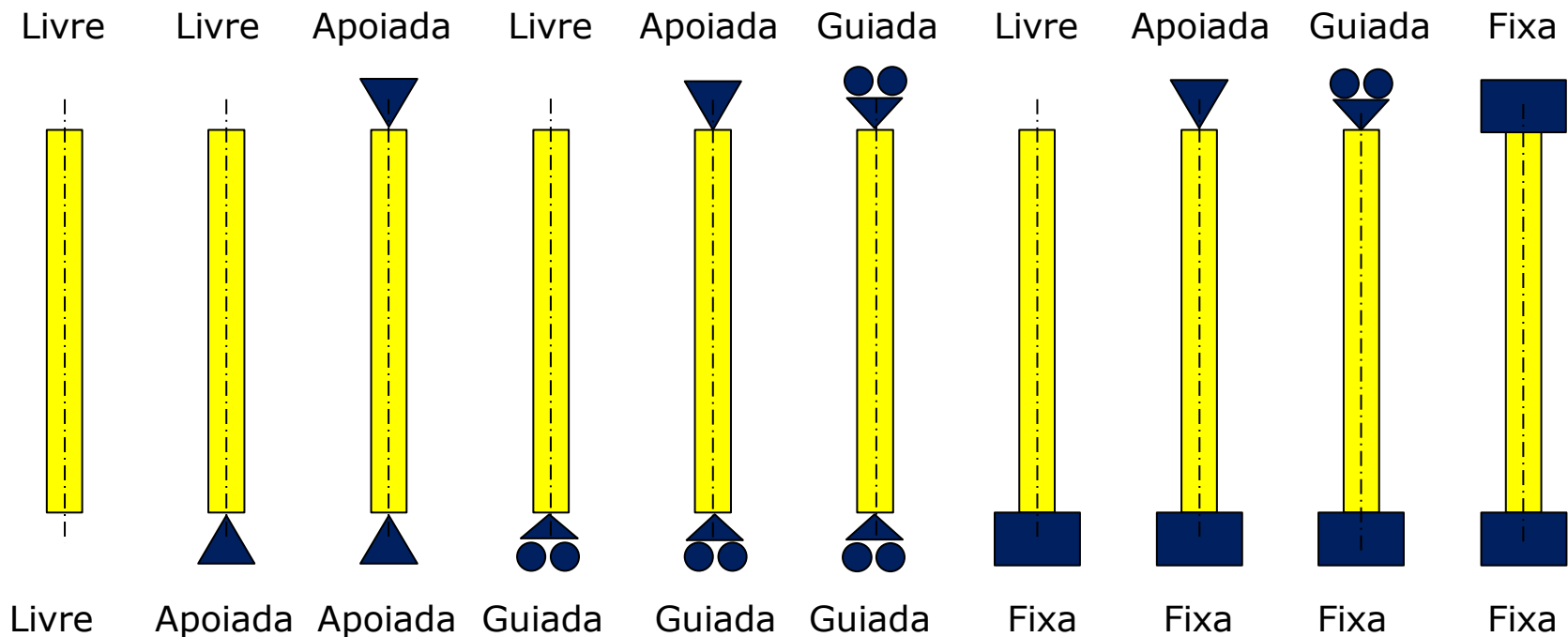
## **Problema de elementos sujeitos a compressão**

- ▶ O termo coluna será aplicado a todos elementos com elevada relação  $l/D$ , exceto aqueles onde a falha ocorrerá por compressão pura.
- ▶ As colunas podem ser divididas em:
  - ▶ Coluna longas com carregamento central
  - ▶ Colunas intermediárias com carregamento central
  - ▶ Colunas com carregamentos excêntricos
  - ▶ Eixos/barras ou colunas curtas com carregamento excêntrico



## Flambagem de Coluna longas com carregamento concêntrico/axial

- ▶ O primeiro passo na análise de colunas é identificar o tipo de sujeição da mesma





## Equação de coluna de Euler



$$P_{cri} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I}{l^2}$$

Equação de  
coluna de Euler

$C =$  constante de condição de apoio  
(end-condition constant)

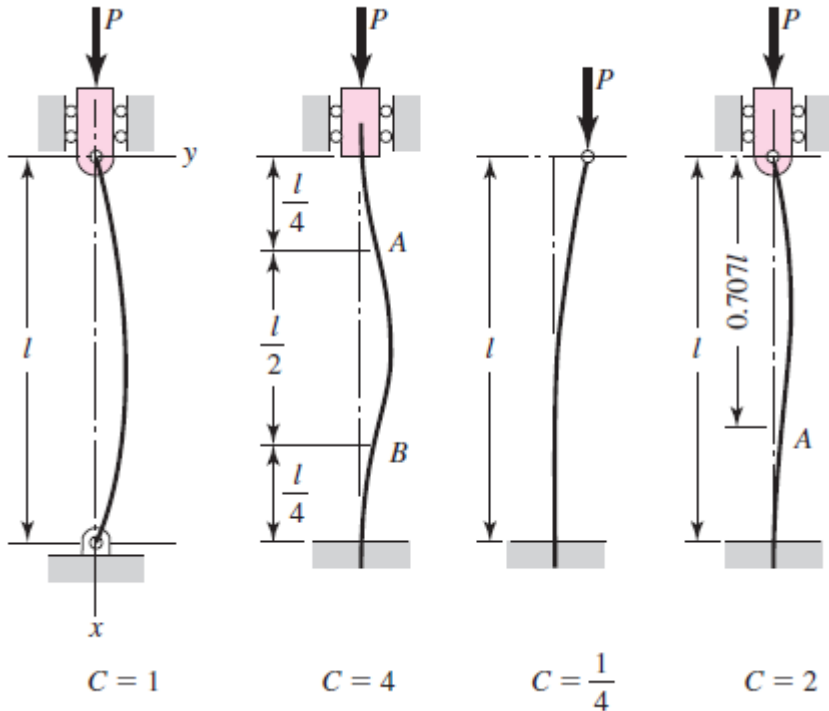
$C = f(\text{forma do apoio})$

- $C = C_{teórico}$
- $C = C_{efetivo}$

$$P_{cri} = \frac{C \cdot \pi^2 \cdot E \cdot I}{l^2}$$



## Equação de coluna de Euler



$$P_{cri} = \frac{C \cdot \pi^2 \cdot E \cdot I}{l^2}$$

$$I = A \cdot k^2$$

k = raio de giro

A = área da seção

$$\frac{P_{cri}}{A} = \frac{C \cdot \pi^2 \cdot E}{\left(\frac{l}{k}\right)^2}$$

$\frac{l}{k}$  = índice de esbeltez da coluna







## Flambagem de Coluna longas com carregamento central

Condições de apoio	Comprimento Efetivo Teórico $L_{eff}^T$	Comprimento efetivo de Euler $L_{eff}^E$	C Teórico	C efetivo	Forma do modo de flambagem
Livre - Livre	L	1,2.L	1	0,694	$\sin (\pi x/L)$
Apoiada - Livre	L	1,2.L	1	0,694	$\sin (\pi x/L)$
Apoiada-Apoiada	L	L	1	1	$\sin (\pi x/L)$
Guiada - Livre	2.L	2,1.L	0,25	0,227	$\sin (\pi x/2L)$
Guiada - Apoiada	2.L	2.L	0,25	0,25	$\cos (\pi x/2L)$
Guiada - Guiada	L	1,2.L	1	0,694	$\cos (\pi x/L)$
Fixa - Livre	2.L	2,1.L	0,25	0,227	$1-\cos (\pi x/2L)$
Fixa - Apoiada	0,7.L	0,8.L	2,041	1,562	$\sin kx - kL \cos kx + kL(1-x/L)$
Fixa - Guiada	L	1,2.L	1	0,694	$1 - \cos (\pi x/L)$
Fixa - Fixa	0,5.L	0,65.L	4	2,367	$1 - \cos (2\pi x/L)$

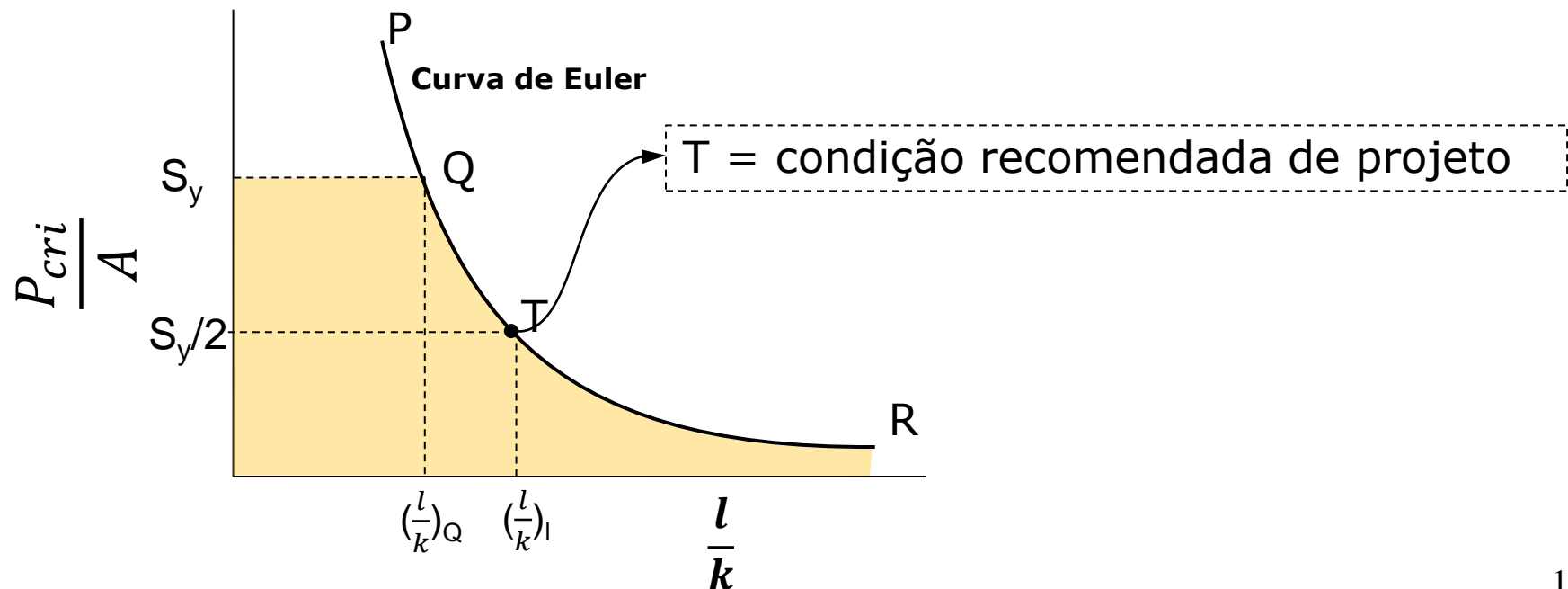


## Flambagem de Coluna longa com carregamento axial

$$\frac{P_{cri}}{A} = \frac{C \cdot \pi^2 \cdot E}{(l/k)^2}$$

$\frac{P_{cri}}{A}$   $\Rightarrow$  é o carregamento crítico unitário, e exprime a quantidade de área necessária para uma coluna suporte o carregamento

Plotando temos:





## Flambagem de Coluna intermediárias com carregamento central

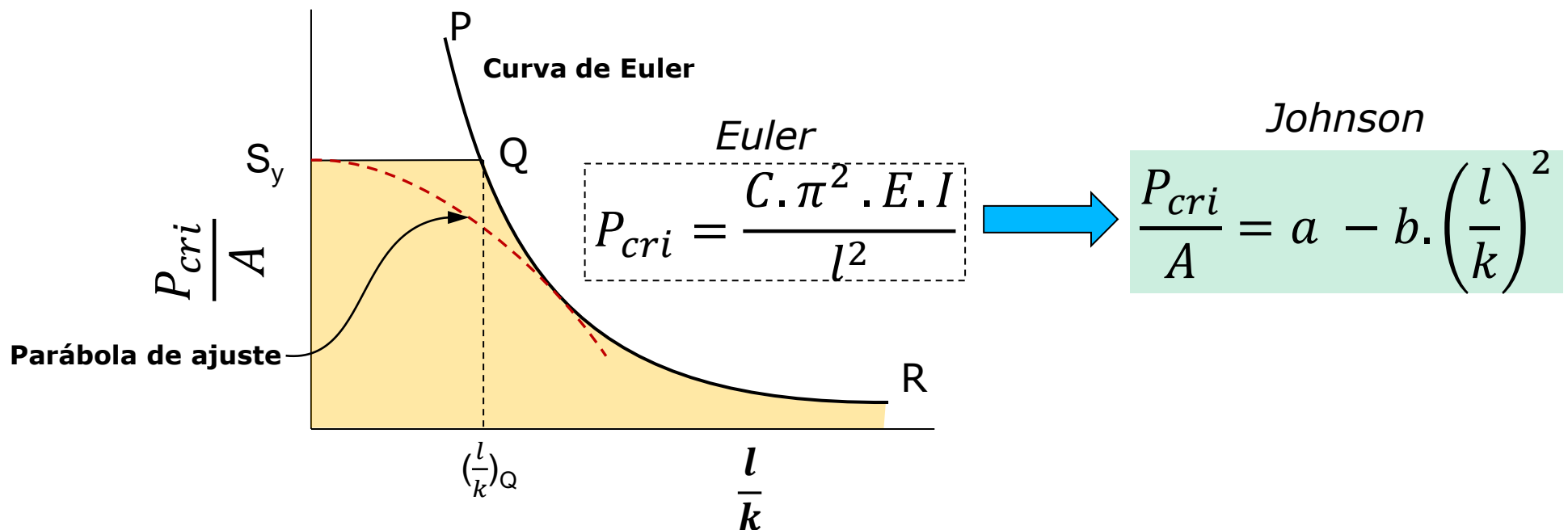
- ▶ Existem uma série problemas envolvendo eixos, barras e colunas onde a solução de Euler para elementos longos não é aplicável.
- ▶ Desta forma recomenda-se a solução parabólica ou de formula de *Johnson (J. B. Johnson)*
- ▶ *Equação preferida por projetistas de máquinas, estruturas de aços, automotivos, aeronáuticos, entre outros*

$$\frac{P_{cri}}{A} = a - b \cdot \left(\frac{l}{k}\right)^2 \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{l}{k}\right)_l = \left(\frac{2 \cdot \pi^2 \cdot C \cdot E}{S_y}\right)^{\frac{1}{2}}$$



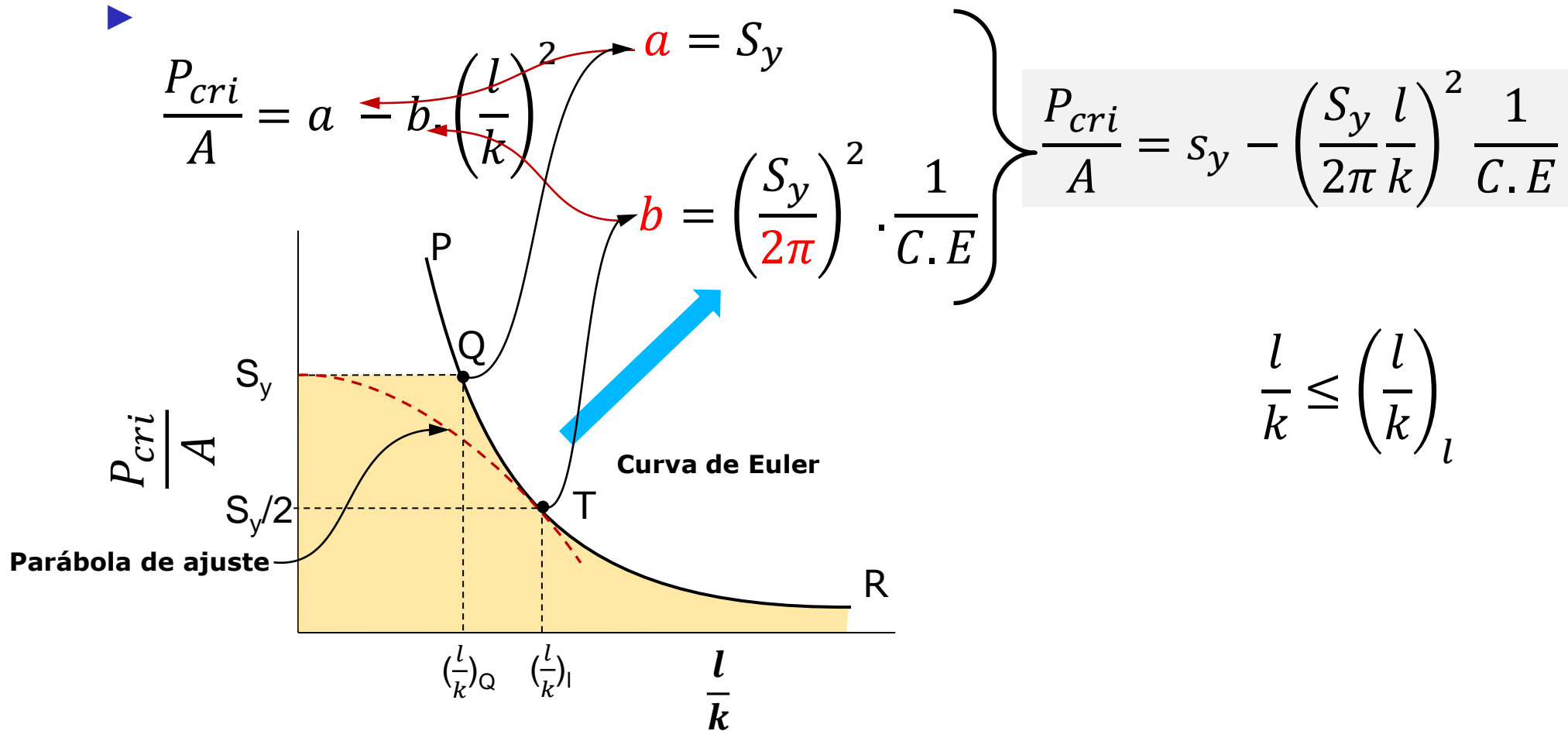
## Flambagem de Coluna intermediárias com carregamento axial

- ▶ Onde na solução parabólica **a** e **b** são parâmetros (constantes) de ajustagem curva de Euler





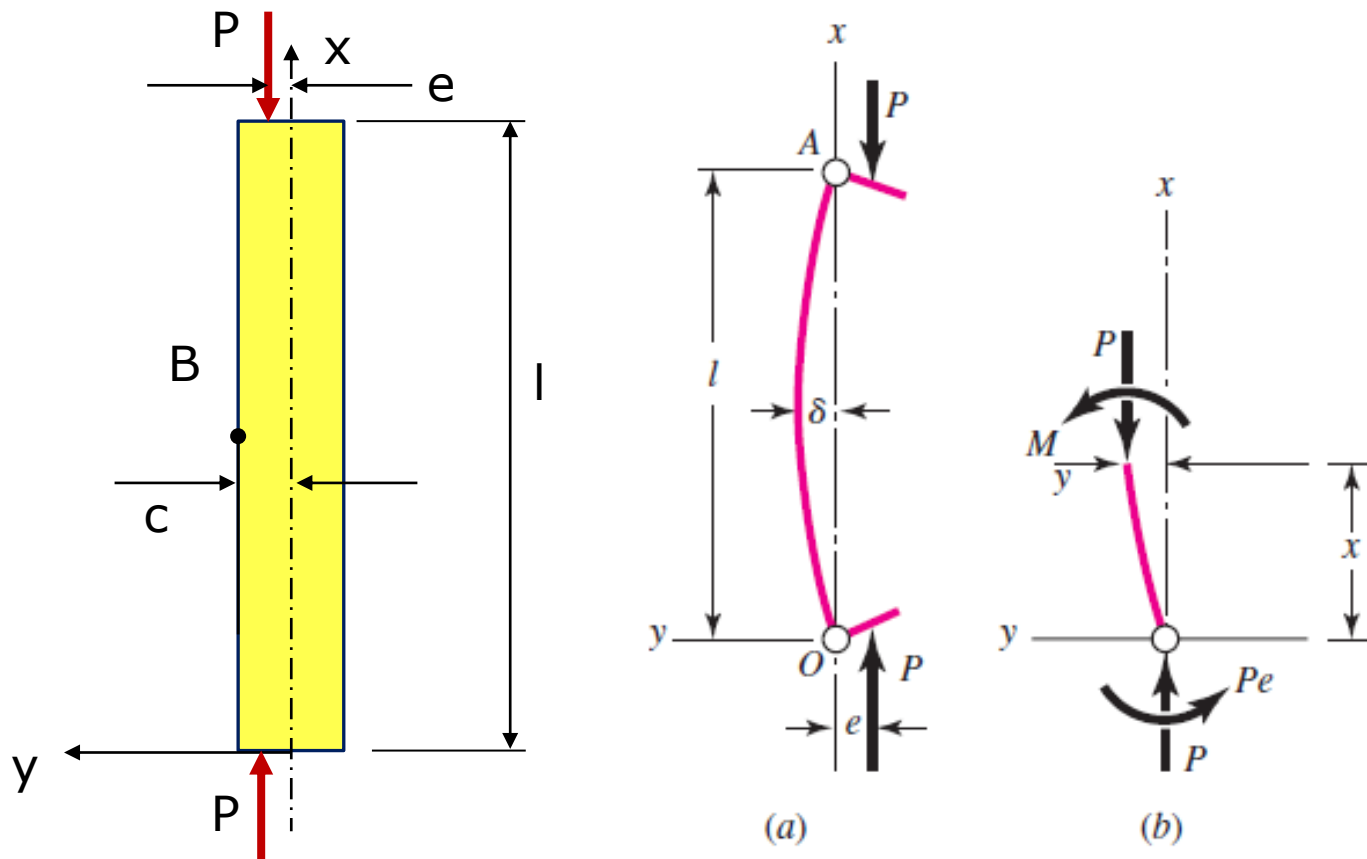
## Flambagem de Coluna intermediárias com carregamento axial





## Flambagem de Colunas com carregamentos NÃO concêntricos

- ▶ O resultado em termos diferenciais fica:

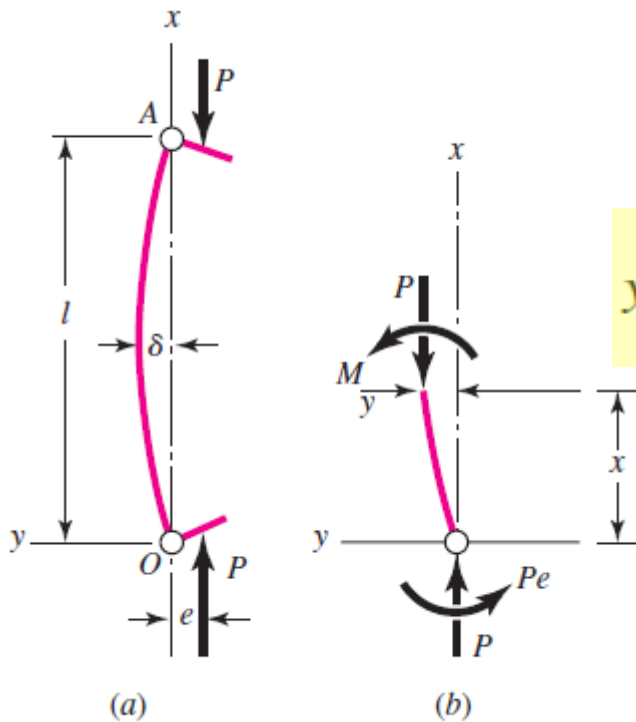




## Flambagem de Colunas com carregamentos NÃO concêntricos

► O resultado em termos diferenciais fica:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{P}{EI}y = -\frac{Pe}{EI}$$



► Diferenciando para as condições de contorno  $y=0$  em  $x=0$

$$y = e \left[ \tan\left(\frac{l}{2} \sqrt{\frac{P}{EI}}\right) \sin\left(\sqrt{\frac{P}{EI}} x\right) + \cos\left(\sqrt{\frac{P}{EI}} x\right) - 1 \right]$$

► Para  $x=l/2$  (onde ocorre a máxima flambagem )

$$\delta = e \left[ \sec\left(\sqrt{\frac{P}{EI}} \frac{l}{2}\right) - 1 \right]$$

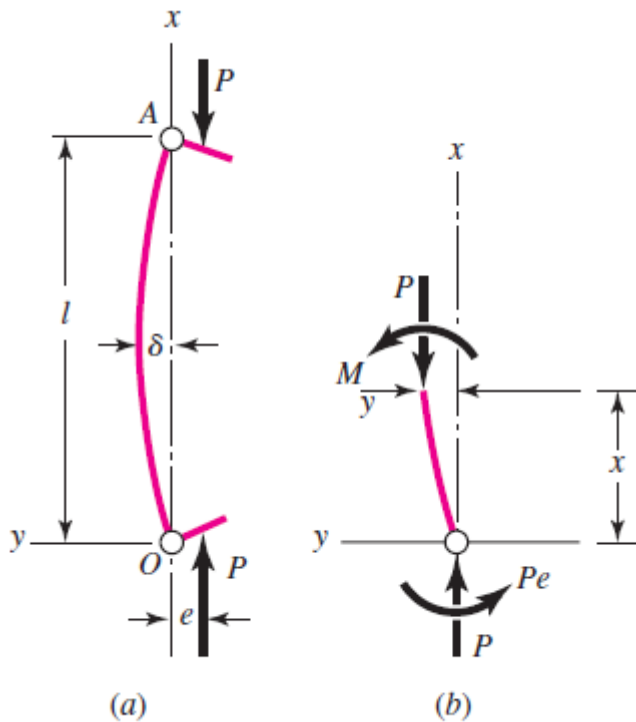


## Flambagem de Colunas com carregamentos NÃO concêntricos

- ▶ Para  $x=l/2$  (onde ocorre a máxima flambagem )

▶ :

$$\delta = e \left[ \sec \left( \sqrt{\frac{P}{EI}} \frac{l}{2} \right) - 1 \right]$$



- ▶ Torna-se

$$M_{\max} = -P(e + \delta) = -Pe \sec \left( \frac{l}{2} \sqrt{\frac{P}{EI}} \right)$$

- ▶ E a máxima tensão compressiva no ponto de máxima flambagem torna-se

$$\sigma_c = \frac{P}{A} - \frac{Mc}{I} = \frac{P}{A} - \frac{Mc}{Ak^2}$$

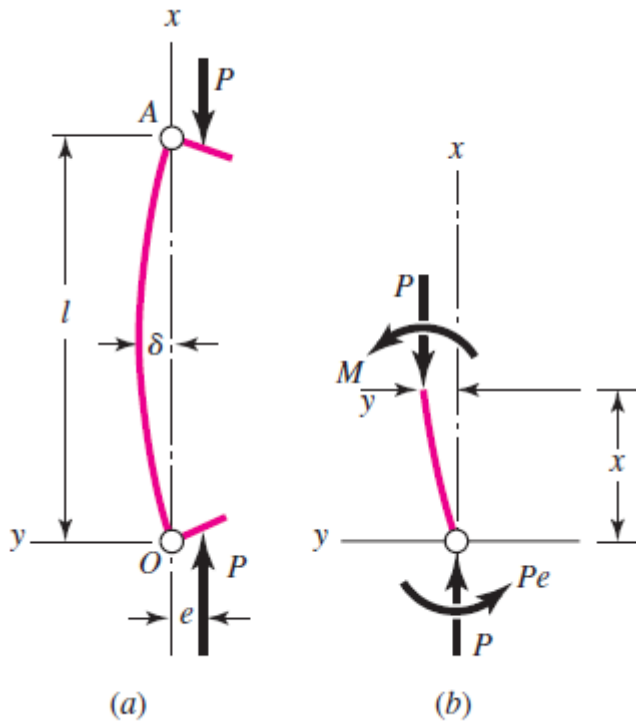




## Flambagem de Colunas com carregamentos NÃO concêntricos

► Reescrevendo:

$$\sigma_c = \frac{P}{A} - \frac{Mc}{I} = \frac{P}{A} - \frac{Mc}{Ak^2}$$



► Em termos de  $M_{\max}$  temos:

$$\sigma_c = \frac{P}{A} \left[ 1 + \frac{ec}{k^2} \sec \left( \frac{l}{2k} \sqrt{\frac{P}{EA}} \right) \right]$$

► Impondo uma tensão compressiva de escoamento  $S_{yc}$

$$\frac{P}{A} = \frac{S_{yc}}{1 + (ec/k^2) \sec[(l/2k)\sqrt{P/AE}]}$$

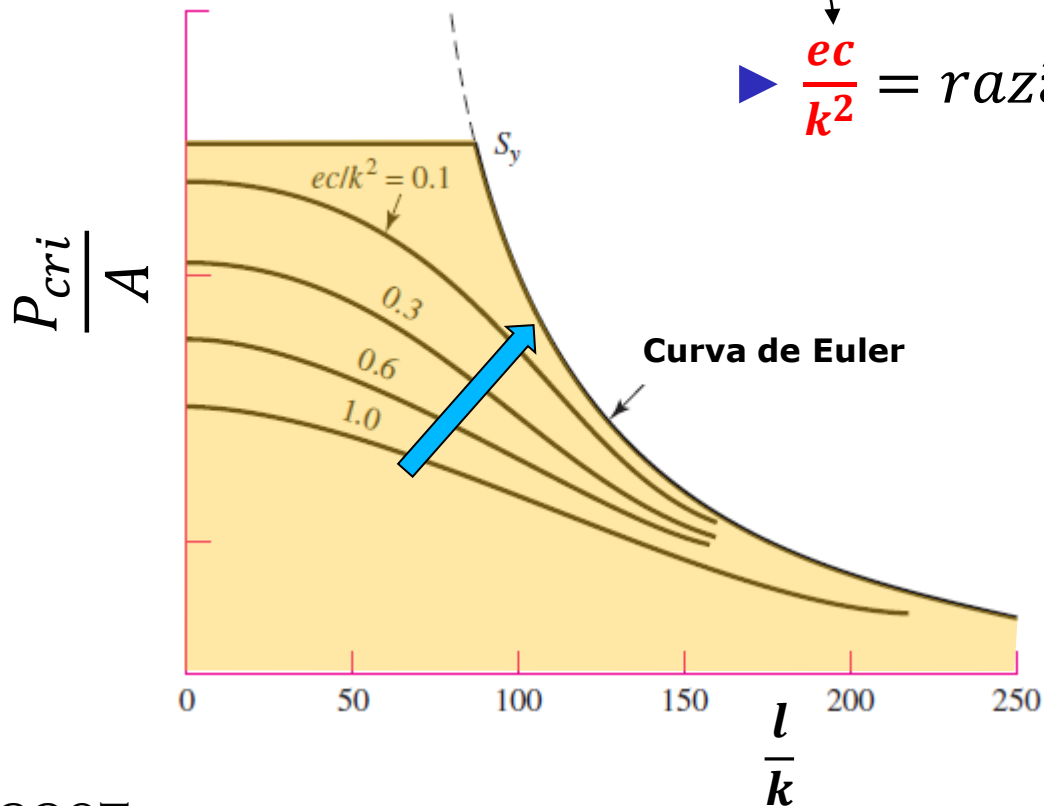


## Flambagem de Colunas com carregamentos NÃO concêntricos

► Onde :

$$\frac{P}{A} = \frac{S_{yc}}{1 + (ec/k^2) \sec[(l/2k)\sqrt{P/AE}]}$$

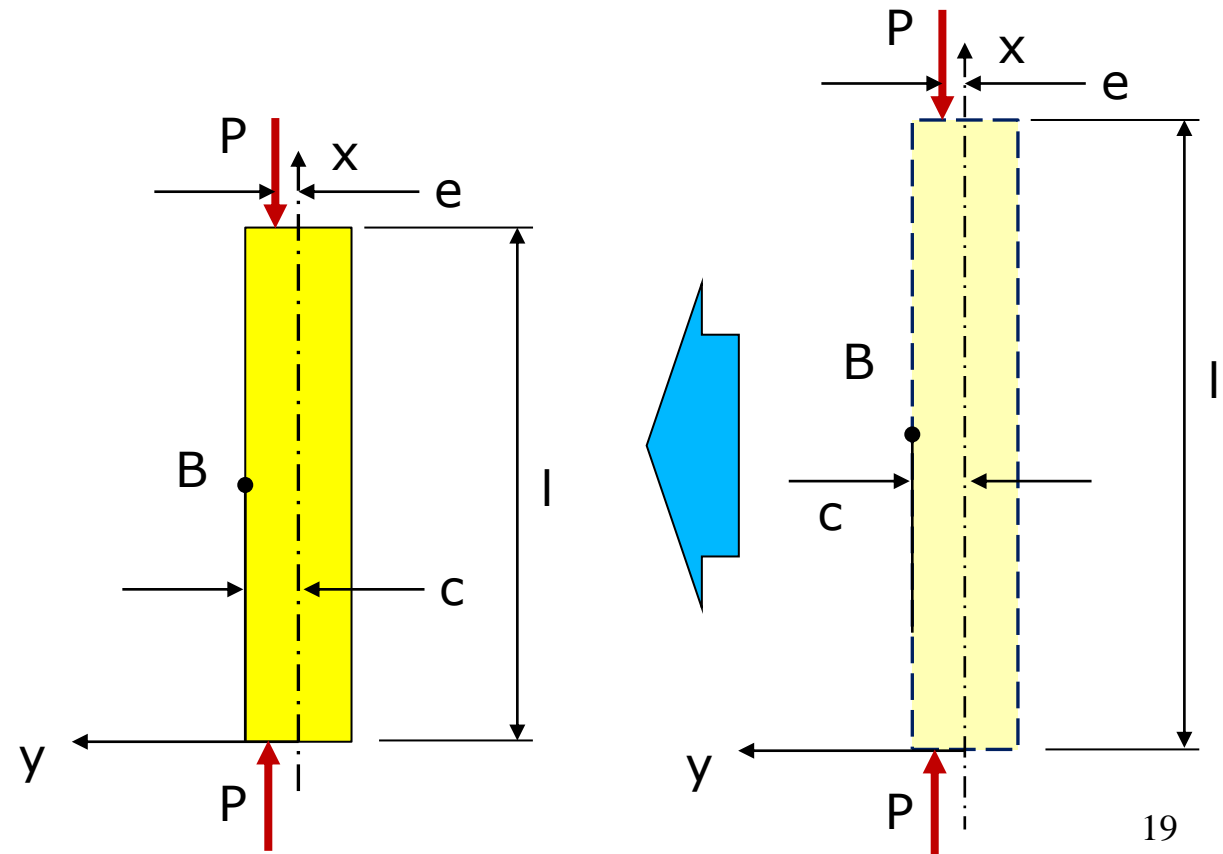
►  $\frac{ec}{k^2} = \text{razão de excentricidade}$





## Flambagem de Colunas curtas sob compressão

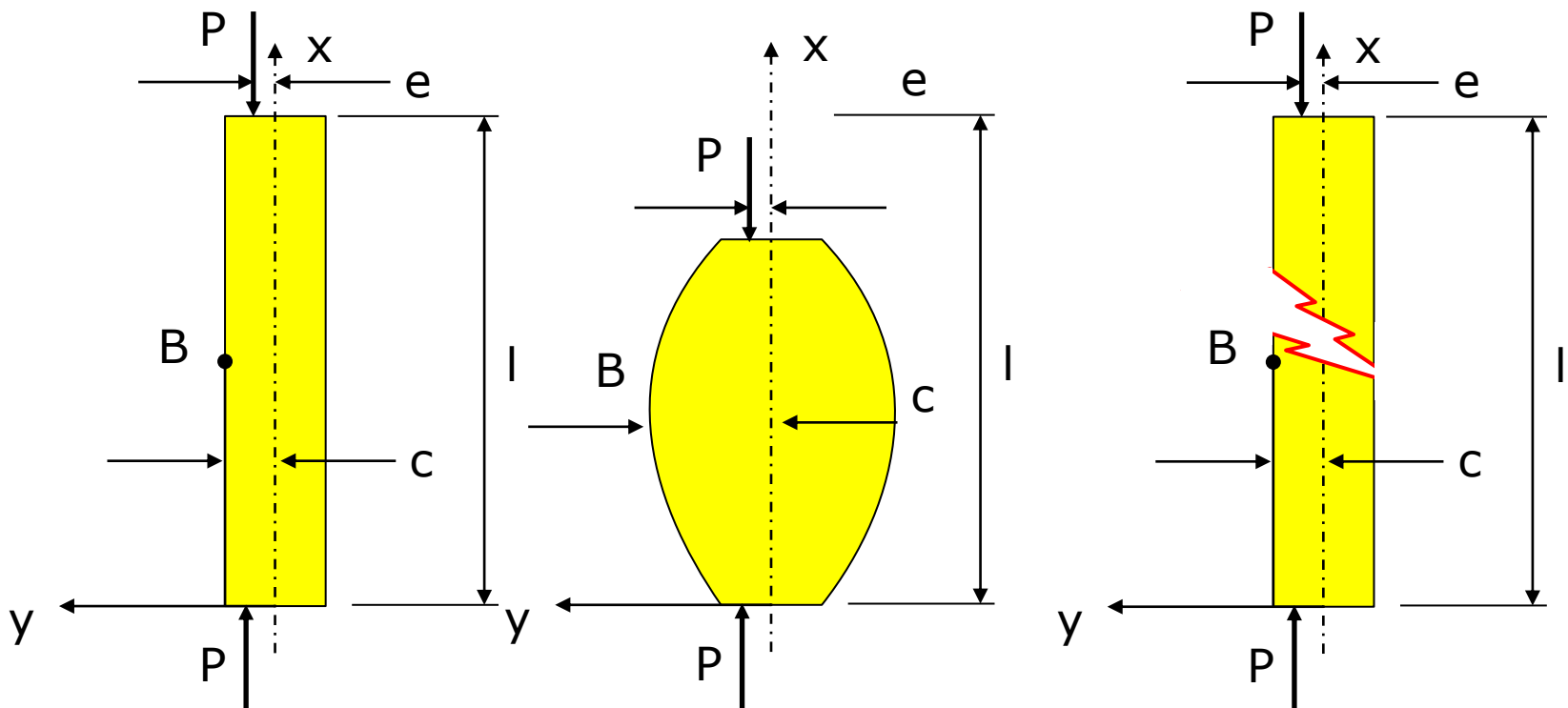
- ▶ Uma coluna/barra curta sob carregamento de compressão pura, gerado por uma força  $P$  axialmente, irá se encurtar de acordo com a Lei de Hooke, até a tensão atingir o limite elástico do material





## Flambagem de Colunas curtas sob compressão

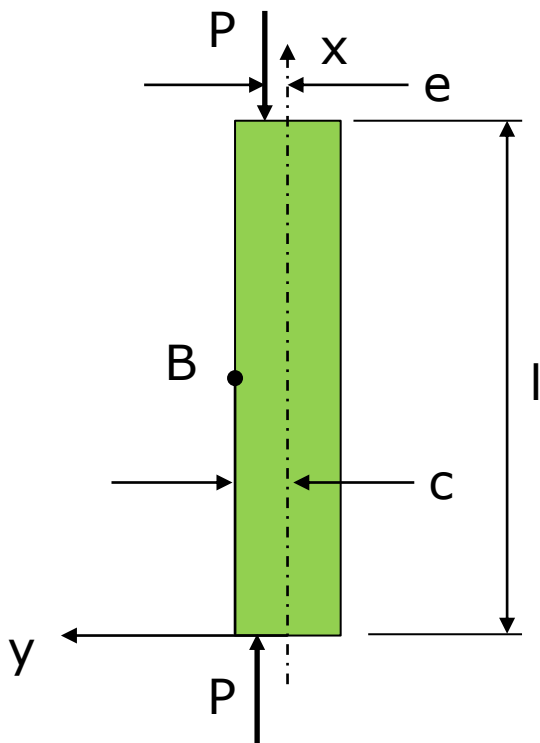
- ▶ No limite elástico, se a força  $P$  continuar a aumentar o elemento ou se deforma em forma de barril ou fratura





## Flambagem de Colunas curtas sob compressão

- ▶ Para vigas/barras curtas a máxima tensão de compressão na direção  $x$  é dada por:



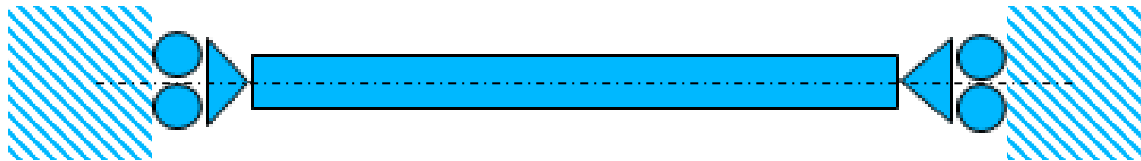
$$\sigma_c = \frac{P}{A} + \frac{Mc}{I} = \frac{P}{A} + \frac{PecA}{IA} = \frac{P}{A} \left( 1 + \frac{ec}{k^2} \right)$$

Onde:  $k = \left( \frac{I}{A} \right)^{1/2} \rightarrow$  raio de giro da coluna  
 $c =$  coordenada do ponto B  
 $e =$  excentricidade da força aplicada



## Exemplo 1

- ▶ Uma barra com 1,5m de comprimento deve ser projetada para uma carregamento estimado de 22kN.
- ▶ Utilizando um fator de projeto  $n_d=4$ , o material selecionado apresenta uma tensão de escoamento de 500MPa e um modulo de elasticidade de 207 GPa, determine o diâmetro necessário para a barra.
- ▶ A condição de montagem da barra é guiada-guiada ( $C=1$ )





## Exemplo 1

- ▶ Dados:  $l=1,5m$
- ▶  $P = 22kN$ .
- ▶  $Nd = 4$
- ▶  $Sy = 500MPa$
- ▶  $E = 207 Gpa$
- ▶  $C = 1$
- ▶ Diâmetro?

- ▶ Aplicando o fator de segurança

$$P_{cri} = nd.P \quad P_{cri} = 4.22 = 88kN$$

- ▶ Considerando a fórmula de Euler

$$P_{cri} = \frac{C.\pi^2.E.I}{l^2}$$

$$\frac{P_{cri}.l^2}{C.\pi^2.E} = \frac{\pi.D^4}{64}$$

$$\frac{P_{cri}.l^2}{C.\pi^2.E} = I$$

$$D = \left( \frac{64.P_{cri}.l^2}{C.\pi^3.E} \right)^{\frac{1}{4}}$$

$$I = \frac{\pi.D^4}{64}$$

$$D = 37,5mm$$



**FIM DA AULA**