SEM 536 - Sistemas de Controle I

Adriano A. G. Siqueira

Controle de Posição de Motor DC

1) Modelo Dinâmico

Um motor elétrico de corrente contínua é composto por uma parte móvel (rotor), definida por um conjunto de espiras (bobina), e uma parte fixa (estator), geradora de campo magnético. O seguinte esquema eletromecânico, Figura 1, representa o motor elétrico de corrente contínua:

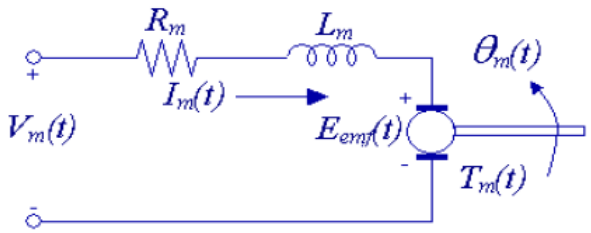

Figura 1. Diagrama eletromecânico do motor de corrente contínua.

sendo $V_m(t)$ a tensão aplicada à bobina, $I_m(t)$ a corrente, R_m a resistência de armadura, L_m a indutância característica do rotor, E_{emf} a força contraeletromotriz induzida na bobina pelo campo magnético do estator, $T_m(t)$ o torque desenvolvido pelo motor e $\theta_m(t)$ a posição angular do eixo do motor.

Usando a lei de Kirchhoff de tensão, obtém-se a equação abaixo:

$$V_m - R_m I_m - L_m \frac{dI_m}{dt} - E_{emf} = 0. \tag{1}$$

Como geralmente $L_m << R_m$, pode-se desconsiderar a indutância do motor, assim:

$$I_m = \frac{V_m - E_{emf}}{R_m}. \tag{2}$$

Sabe-se que a força contraeletromotriz gerada pelo motor é proporcional à velocidade do rotor, ω_m, tem-se:

$$I_m = \frac{V_m - K_m \dot{\theta}_m}{R_m} \qquad (\dot{\theta}_m = \omega_m), \tag{3}$$

sendo K_m a constante contraeletromotriz.

Do ponto de vista mecânico, aplicando as leis de Newton-Euler ao movimento do rotor do motor:

$$J_m \ddot{\theta}_m = T_m - \frac{T_l}{\eta_g K_g}, \tag{4}$$

sendo T_l o torque na carga, K_g a relação de engrenagens entre o motor e a carga, e η_g a eficiência da caixa de engrenagens.

Considerando o movimento da carga acoplada ao motor, temos:

$$J_l\ddot{\theta}_l = T_l - B_{eq}\dot{\theta}_l, \tag{5}$$

sendo B_{eq} o coeficiente viscoso de amortecimento.

A equação dinâmica do movimento é dada por:

$$J_l\ddot{\theta}_l = \eta_g K_g T_m - \eta_g K_g J_m \ddot{\theta}_m - B_{eq}\dot{\theta}_l. \tag{6}$$

Utilizando as transformações $\theta_m = K_g\theta_l$ e $T_m = \eta_m K_t I_m$ (sendo η_m a eficiência do motor e K_t a constante de torque do motor), a equação (6) pode ser reescrita como:

$$J_l\ddot{\theta}_l + \eta g K_g^2 J_m \ddot{\theta}_l + B_{eq}\dot{\theta}_l = \eta_g \eta_m K_g K_t I_m. \tag{7}$$

Finalmente, combinando as equações elétrica, (3), e mecânica, (7), temos:

$$J_{eq}R_m\ddot{\theta}_l + (B_{eq}R_m + \eta_g\eta_m K_m K_t K_g^2)\dot{\theta}_l = \eta_g\eta_m K_t K_g V_m, \tag{8}$$

sendo $J_{eq} = J_l + \eta_g J_m K_g^2$.

2) **Função Transferência de Posição**

A função de transferência que estabelece a relação entre a posição angular da carga acoplada ao eixo, θ_l e a tensão aplicada ao motor, V_m, é dada por:

$$G_\theta(s) = \frac{\theta_l(s)}{V_m(s)} = \frac{\eta_g\eta_m K_t K_g}{J_{eq}R_m s^2 + (B_{eq}R_m + \eta_g\eta_m K_m K_t K_g^2)s}. \tag{9}$$

3) **Função de Transferência da Velocidade**

Considerando $\dot{\theta}_l = \omega_l$ e $\ddot{\theta}_l = \dot{\omega}_l$, a equação (8) pode ser reescrita como:

$$J_{eq}R_m\dot{\omega}_l + (B_{eq}R_m + \eta_g\eta_m K_m K_t K_g^2)\omega_l = \eta_g\eta_m K_t K_g V_m, \tag{10}$$

sendo $J_{eq} = J_l + \eta_g J_m K_g^2$.

Aplicando a transformada de Laplace:

$$G_\omega(s) = \frac{\omega_l(s)}{V_m(s)} = \frac{\eta_g\eta_m K_t K_g}{J_{eq}R_m s + (B_{eq}R_m + \eta_g\eta_m K_m K_t K_g^2)}. \tag{11}$$

4) **Funções Transferências Númericas**

Considere os valores da tabela abaixo.

Símbolo	**Nome**	**Valor**	**Unidades**
K_t	Constante de Toque do Motor	0.00767	$N.m$
K_m	Constante da Força Contra Eletromotriz	0.00767	$V/(rad/s)$
R_m	Resistência da Armadura	2.6	Ω
K_g	Redução	70	
B_{eq}	Coeficiente Viscoso de Amortecimento	$4e^{-3}$	$N.m.s$
J_{eq}	Momento de Inércia Equivalente da Carga	$2e^{-3}$	$kg.m^2$
η_m	Eficiência do Motor	0.69	
η_g	Eficiência da Redução	0.9	

$$G_\theta(s) = \frac{60,2}{s^2 + 34,2s}. \tag{12}$$

$$G_\omega(s) = \frac{60,2}{s + 34,2}. \tag{13}$$

5) **Respostas no Tempo - Matlab**

a) **Função Transferência de Posição:** G_θ

```
num = [60.2];

den = [1 34.2 0];

G_theta = tf(num,den)

impulse(G_theta)

step(G_theta)
```

b) **Função Transferência de Velocidade:** G_ω

```
num = [60.2];

den = [1 34.2];

G_omega = tf(num,den)

impulse(G_omega)

step(G_omega)
```

6) **Controle de Posição - Controlador Proporcional**

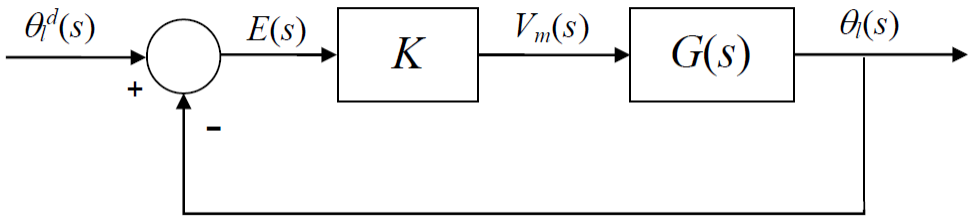

Figura 2. Diagrama de blocos- Malha Fechada.

$$G_\theta(s) = \frac{\theta_l(s)}{V_m(s)} = \frac{60.2}{s^2 + 34.2s}. \tag{14}$$

$$C(s) = \frac{V_m(s)}{E(s)} = K. \tag{15}$$

Função Transferência de Malha Fechada

$$T(s) = \frac{\theta_l(s)}{\theta_l^d(s)} = \frac{KG(s)}{1 + KG(s)} = \frac{60.2K}{s^2 + 34.2s + 60.2K}. \tag{16}$$

No Matlab ($K = 0,1$):

```
C = 0.1;

T = feedback(C*G_theta,1);

step(T)
```