

Aula 4

Equação da Energia

1) Teorema do transporte de Reynolds e Energia Mecânica

O teorema do transporte de Reynolds para um volume de controle estacionário e indeformável $\forall C$ resulta:

$$\frac{dN}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{\forall C} \rho \eta d\forall + \int_{SC} \rho \eta \vec{v} \cdot \vec{n} dS$$

Se N for a energia mecânica: $N = m \frac{v^2}{2} + mgz$

A grandeza η , que representa N por unidade de massa do fluido, será:

$$\eta = \frac{v^2}{2} + gz$$

Assim:

$$\frac{dE.M.}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{\forall C} \rho \left(\frac{v^2}{2} + gz \right) d\forall + \int_{SC} \rho \left(\frac{v^2}{2} + gz \right) \vec{v} \cdot \vec{n} dS$$

No caso de um escoamento incompressível, a variação temporal de Energia Mecânica de um Sistema (corpo fluido que instantaneamente ocupa o volume de controle) é devida aos seguintes fatores:

- (a) Potência das forças de contato externas $\dot{W}_{ext}$;
- (b) Potência retirada ou fornecida ao fluido por uma máquina de fluxo $\dot{W}_m$;
- (c) Dissipação de Energia Mecânica na forma de energia térmica por conta de atrito viscoso $\dot{W}_{atrito}$.

Se o escoamento fosse compressível, teríamos ainda o efeito da potência exercida pelas forças de pressão para comprimir o fluido.

Assim:

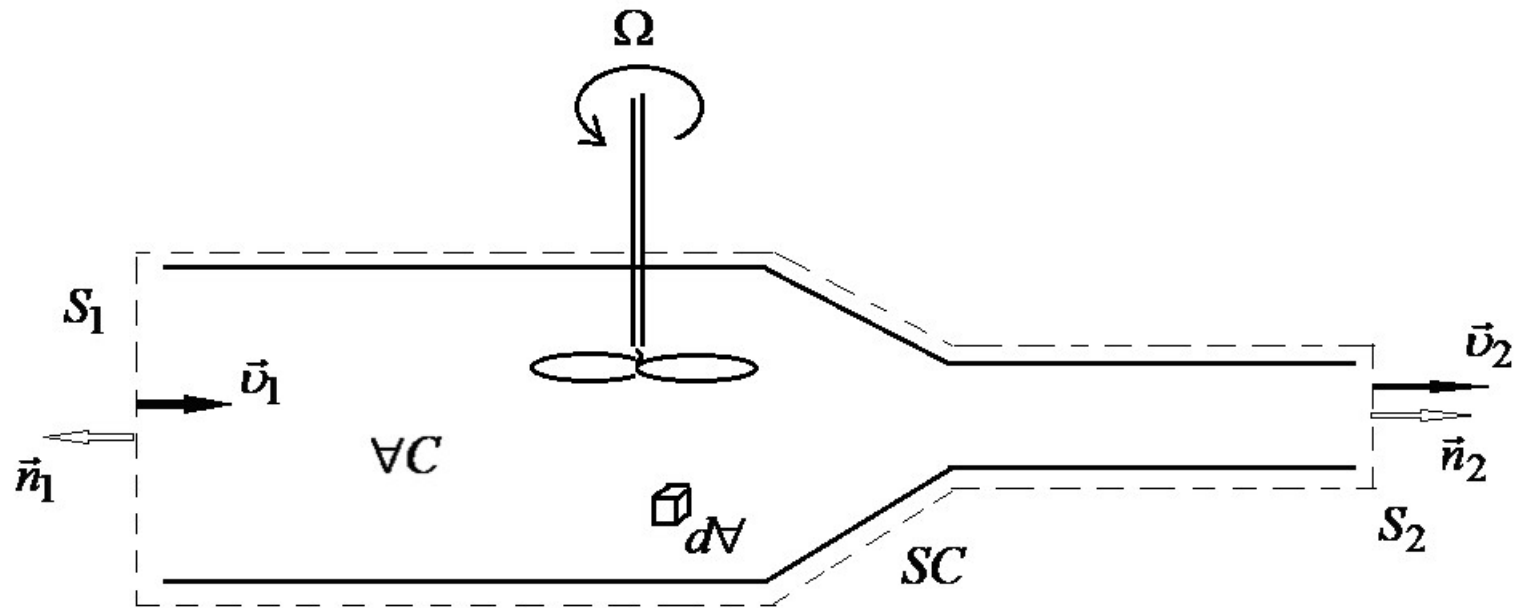


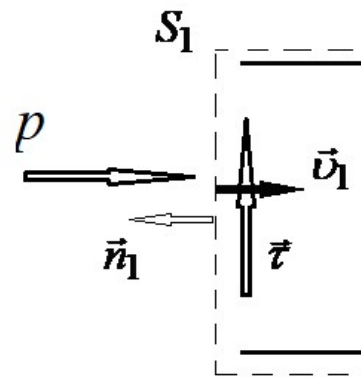
Fig. 1) Volume de Controle para a Equação da Energia.

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{VC} \rho \left(\frac{v^2}{2} + gz \right) dV + \int_{SC} \rho \left(\frac{v^2}{2} + gz \right) \vec{v} \cdot \vec{n} dS = \dot{W}_{ext} + \dot{W}_m - \dot{W}_{atrito}$$

Essa última equação pode ser bastante simplificada. Primeiramente, se o volume de controle $\forall C$ é fixo e indeformável, sendo massa específica e aceleração da gravidade constantes, e sendo também a cota z de cada elemento $d\forall$ do volume de controle fixo e indeformável algo constante, é fácil ver que:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\forall C} \rho g z d\forall = 0$$

A potência das forças externas é dada por $\dot{W}_{ext} = \int_{SC} (\vec{\tau} - p \vec{n}) \cdot \vec{v} dS$.



Tal fato é devido à pressão ser uma tensão normal de compressão, enquanto $\vec{\tau}$ é uma tensão tangente. $(\vec{\tau} - p \vec{n})dS$ representa a força sobre um elemento de área dS . Seu produto escalar pela velocidade representa assim uma potência, que integrada sobre toda a superfície de controle SC representa a potência das forças externas de contato $\dot{W}_{ext}$. Porém, a tensão de cisalhamento $\vec{\tau}$ em geral só é significativa junto às paredes, onde $\vec{v}=0$. Nas seções de entrada e saída de fluxo teremos $\vec{\tau} \cdot \vec{v} \cong 0$. Assim:

$$\dot{W}_{ext} \cong - \int_{SC} p \vec{n} \cdot \vec{v} dS$$

Substituindo esse resultado na equação da Energia Mecânica, já considerando a variação de energia potencial nula:

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial t} \int_{\forall C} \rho \frac{v^2}{2} d\forall + \int_{SC} \rho \left(\frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} + gz \right) \vec{v} \cdot \vec{n} dS = \dot{W}_m - \dot{W}_{atrito}} \quad (I)$$

2)Carga

A equação integral da Energia pode ser ainda mais simplificada. Para um problema em regime permanente:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\forall C} \rho \frac{v^2}{2} d\forall = 0$$

Finalmente, devemos lembrar que as únicas seções da superfície de controle em que temos fluxo são as superfícies de entrada e saída. Neste ponto, devemos fazer uma consideração importante sobre o fluxo de energia cinética numa seção. Sabemos que esse fluxo é dado por:

$$C = \int_S \frac{v^2}{2} \rho \vec{v} \cdot \vec{n} dS$$

Suponha agora que queiramos exprimir esse fluxo em termos da velocidade média V , e não em termos do perfil de velocidades v . Teremos que introduzir um coeficiente de correção α , chamado de coeficiente de energia cinética:

$$C = \int_S \frac{v^2}{2} \rho \vec{v} \cdot \vec{n} dS = \alpha \frac{V^2}{2} \rho Q = \alpha \frac{V^3}{2} \rho S$$

De modo que teremos:

$$\alpha = \frac{1}{S} \int_S \left(\frac{v}{V} \right)^3 dS$$

Para um escoamento turbulento típico em condutos industriais, onde

$$v = V_{\max} \left(1 - \frac{r}{R} \right)^{1/7}, \quad V = \frac{5}{6} V_{\max}, \quad \text{temos } \alpha = 1,06.$$

A equação (I) para regime permanente fica:

$$\int_{SC} \rho \left(\frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} + gz \right) \vec{v} \cdot \vec{n} dS = \dot{W}_m - \dot{W}_{atrito}$$

Como só temos fluxo através das seções S_1 e S_2 da superfície de controle SC :

$$\int_{S_2} \rho \left(\frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} + gz \right) \vec{v} \cdot \vec{n} dS + \int_{S_1} \rho \left(\frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} + gz \right) \vec{v} \cdot \vec{n} dS = \dot{W}_m - \dot{W}_{atrito}$$

O produto escalar $\vec{v} \cdot \vec{n}$ é positivo na seção de saída S_2 e negativo na seção de entrada S_1 . Lembrando que $\vec{v} \cdot \vec{n} dS$ é uma vazão dQ atravessando um elemento de superfície dS , e introduzindo as velocidades médias e coeficientes de energia cinética, a equação da energia fica:

$$\left(\alpha_2 \frac{V_2^2}{2} + \frac{p_2}{\rho} + gz_2 \right) \rho Q_2 - \left(\alpha_1 \frac{V_1^2}{2} + \frac{p_1}{\rho} + gz_1 \right) \rho Q_1 = \dot{W}_m - \dot{W}_{atrito}$$

Como o escoamento é incompressível, pela equação da continuidade:

$$Q_1 = Q_2$$

Portanto, temos a mesma vazão Q atravessando as superfícies S_1 e S_2 .
Dividindo e multiplicando o lado esquerdo da equação por g e lembrando que o peso específico é $\gamma = \rho g$:

$$\left(\alpha_2 \frac{V_2^2}{2g} + \frac{p_2}{\gamma} + z_2 \right) \gamma Q - \left(\alpha_1 \frac{V_1^2}{2g} + \frac{p_1}{\gamma} + z_1 \right) \gamma Q = \dot{W}_m - \dot{W}_{atrito}$$

Isso resulta:

$$\left(\alpha_2 \frac{V_2^2}{2g} + \frac{p_2}{\gamma} + z_2 \right) - \left(\alpha_1 \frac{V_1^2}{2g} + \frac{p_1}{\gamma} + z_1 \right) = \frac{\dot{W}_m}{\gamma Q} - \text{perdas} \quad (\text{II})$$

É fácil ver que cada um dos termos aditivos da equação acima tem dimensão de comprimento. Assim, podemos introduzir a chamada carga H :

$$H = \alpha \frac{V^2}{2g} + \frac{p}{\gamma} + z \quad (\text{III})$$

A carga H representa a energia mecânica por unidade de peso do fluido. Assim, $[H] = L$ e sua unidade SI é o metro (m).

Portanto, a equação da energia fica:

$$\boxed{H_2 - H_1 = H_m - \text{perdas}} \quad (\text{IV})$$

Onde H_m é a altura ou carga manométrica da máquina, e as perdas representam a perda de carga causada pelo atrito viscoso. A carga manométrica é dada por:

$$\boxed{H_m = \frac{\dot{W}_m}{\gamma Q}}$$

Em geral, em escoamentos turbulentos, $\alpha \cong 1$ e é omitido das equações (II) e (III).

Uma das conclusões mais importantes da equação (IV) é que, na ausência de máquinas, a carga sempre decresce no sentido do escoamento.

3)Carga ou Altura Manométrica da Máquina

As máquinas podem ser de dois tipos: bombas, ventiladores ou compressores (fornecem energia para o fluido) e turbinas (retiram energia do fluido).

Assim: $H_m > 0 \Rightarrow$ bomba ; $H_m < 0 \Rightarrow$ turbina .

Lembrando que nenhuma máquina é perfeitamente eficiente, podemos relacionar a potência no eixo $\dot{W}_{eixo}$ com a potência fornecida ou retirada do fluido $\dot{W}_m$ através do rendimento η :

$$\eta_{bomba} = \frac{\dot{W}_m}{\dot{W}_{eixo}} \quad \eta_{turbina} = \frac{\dot{W}_{eixo}}{|\dot{W}_m|}$$

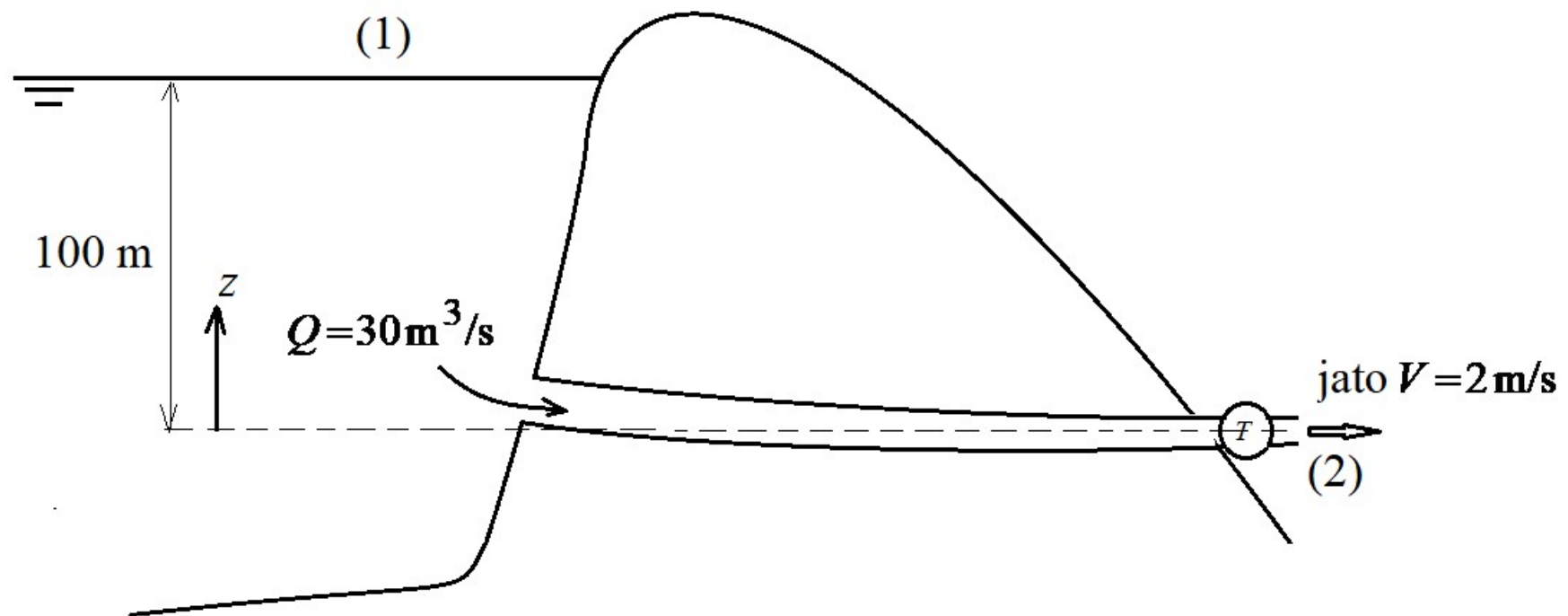
4)Equação de Bernoulli

Para casos em que não temos máquina e podemos desprezar a perda de carga, considerando perfil uniforme de velocidades ($\alpha=1$):

$$\frac{V^2}{2g} + \frac{p}{\gamma} + z = \text{constante}$$

Esta é a chamada Equação de Bernoulli para o escoamento permanente e incompressível sem perdas viscosas.

Exercício: Uma central hidrelétrica opera nas condições da figura. A perda de carga no escoamento entre (1) e (2) é igual a 20m. Se a eficiência da turbina for $\eta=70\%$, qual a potência produzida em seu eixo? Em (1) temos a superfície de um reservatório de grandes dimensões e em (2) temos um jato na atmosfera. O peso específico da água é $\gamma=10000\text{ N/m}^3$.



Da equação da energia:

$$\left(\alpha_2 \frac{V_2^2}{2g} + \frac{p_2}{\gamma} + z_2 \right) - \left(\alpha_1 \frac{V_1^2}{2g} + \frac{p_1}{\gamma} + z_1 \right) = H_m - \text{perdas}$$

Mas as pressões p_1 e p_2 são iguais à pressão atmosférica. Como em (1) temos um reservatório de grandes dimensões podemos considerar sua superfície estacionária, de forma que $V_1 = 0$. Da forma como consideramos a referência de z , $z_1 = 100\text{m}$ e $z_2 = 0$. Se considerarmos $\alpha_2 = 1$ e $g = 10\text{m/s}^2$:

$$\frac{2^2}{2 \times 10} - 100 = H_m - 20 \Rightarrow H_m = -79,8 \text{ m}$$

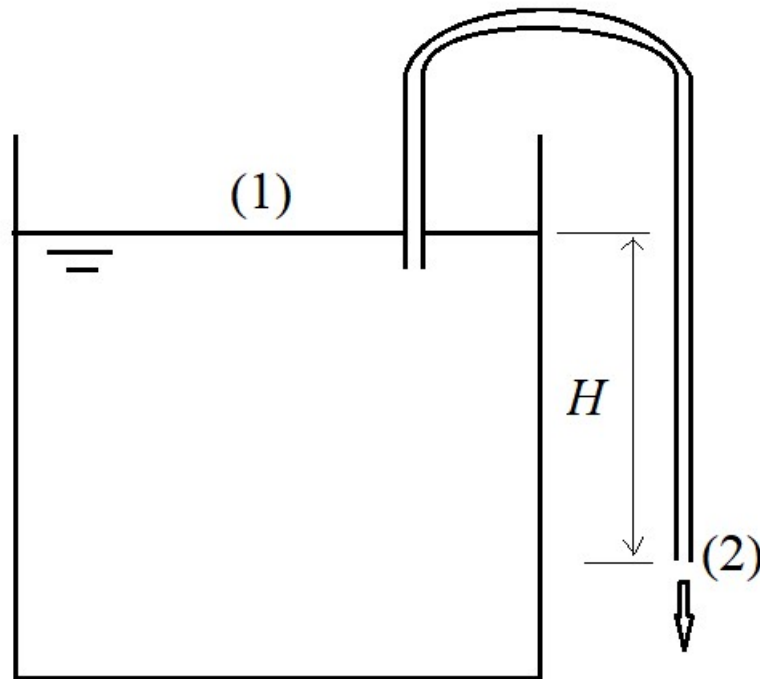
A potência fornecida pelo fluido à turbina é:

$$\dot{W}_m = \gamma Q H_m = 10000 \frac{\text{N}}{\text{m}^3} \times 30 \frac{\text{m}^3}{\text{s}} \times (-79,8 \text{ m}) = -23,94 \times 10^6 \text{ W} = -23,94 \text{ MW}$$

A potência no eixo será:

$$\dot{W}_{eixo} = \eta |\dot{W}_m| = 0,7 \times 23,94 \Rightarrow \boxed{\dot{W}_{eixo} = 16,76 \text{ MW}}$$

Exercício: Uma mangueira é usada como sifão para retirar um fluido de um reservatório. Obtenha uma expressão para a velocidade V_2 . Despreze perdas de carga.



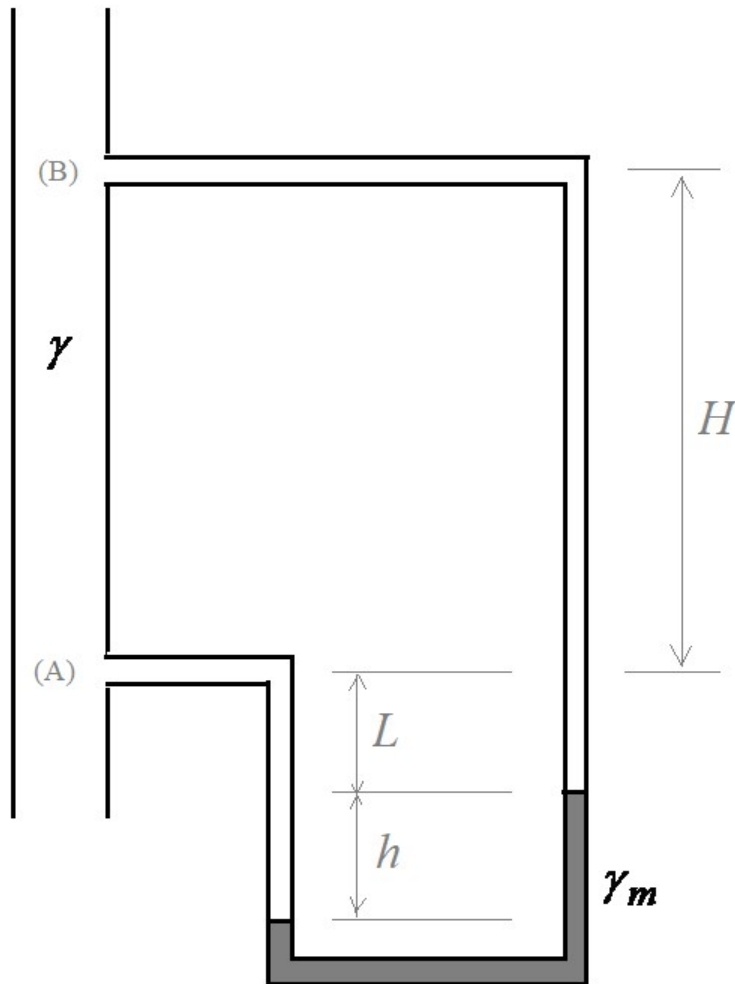
Usando a equação de Bernoulli:

$$\frac{V_2^2}{2g} + \frac{p_2}{\gamma} + z_2 = \frac{V_1^2}{2g} + \frac{p_1}{\gamma} + z_1$$

Mas as pressões p_1 e p_2 são iguais à pressão atmosférica. Se considerarmos o movimento da superfície do reservatório muito lento, $V_1 \cong 0$:

$$V_2 = \sqrt{2g(z_1 - z_2)} \quad \Rightarrow \quad \boxed{V_2 = \sqrt{2gH}}$$

Exercício: Água de peso específico γ escoar na vertical num conduto de seção constante. Um manômetro diferencial contendo mercúrio é conectado ao conduto nas seções (A) e (B). O escoamento é para cima ou para baixo?



Como não temos máquinas, a equação da energia fica:

$$\left(\alpha_2 \frac{V_2^2}{2g} + \frac{p_2}{\gamma} + z_2 \right) - \left(\alpha_1 \frac{V_1^2}{2g} + \frac{p_1}{\gamma} + z_1 \right) = -\text{perdas}$$

Se o escoamento for para baixo, ou seja, de (B) para (A):

$$\left(\alpha_A \frac{V_A^2}{2g} + \frac{p_A}{\gamma} + z_A \right) - \left(\alpha_B \frac{V_B^2}{2g} + \frac{p_B}{\gamma} + z_B \right) = -\text{perdas}$$

Como o conduto tem seção constante, $V_A = V_B$. Assim:

$$\left(\frac{p_B}{\gamma} + z_B \right) - \left(\frac{p_A}{\gamma} + z_A \right) = \text{perdas} > 0$$

Isso resulta:

$$\frac{p_B - p_A}{\gamma} + H = \text{perdas} > 0 \quad (\text{i})$$

Da equação do manômetro:

$$p_A + \gamma L + \gamma h = p_B + \gamma H + \gamma L + \gamma_m h$$

Isso resulta:

$$p_B - p_A = -\gamma H + h(\gamma - \gamma_m) \quad (\text{ii})$$

Substituindo (ii) em (i):

$$h\left(1 - \frac{\gamma_m}{\gamma}\right) = \text{perdas} > 0$$

Mas isso não é possível, pois $\gamma_m > \gamma$. De fato, $\gamma_{Hg} = 13600 \text{ kgf/m}^3$ e $\gamma_{H_2O} = 1000 \text{ kgf/m}^3$.

Já se considerarmos o escoamento para cima, ou seja, de (A) para (B):

$$\left(\frac{p_A}{\gamma} + z_A\right) - \left(\frac{p_B}{\gamma} + z_B\right) = \text{perdas} > 0$$

Isso resulta:

$$\frac{p_A}{\gamma} - \frac{p_B}{\gamma} - H = \text{perdas} > 0 \quad (\text{iii})$$

Da equação do manômetro:

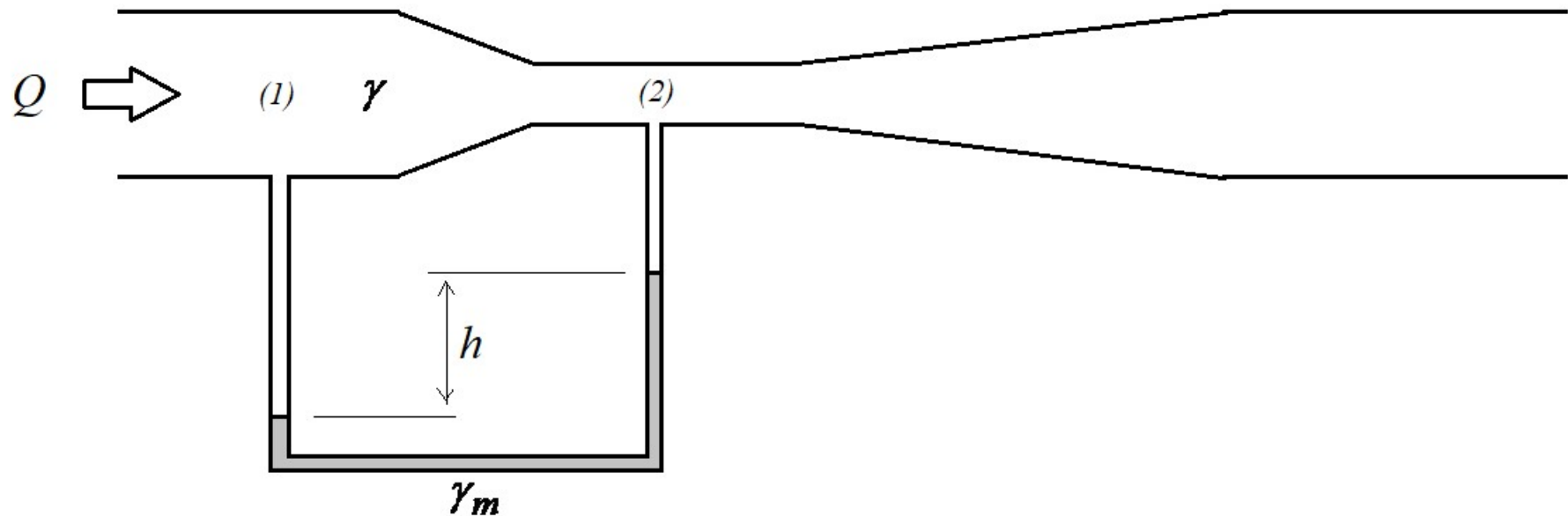
$$p_A - p_B = \gamma H + h(\gamma_m - \gamma) \quad (\text{iiii})$$

De (iiii) em (iii):

$$h \left(\frac{\gamma_m}{\gamma} - 1 \right) = \text{perdas} > 0$$

Essa equação está correta, dado que $\gamma_m > \gamma$. Assim, o escoamento é para cima, ou seja, de (A) para (B).

Exercício: Uma das principais aplicações da equação da energia é a medida de vazão usando um manômetro diferencial. Na seção, um tubo sofre um estreitamento de seção, ou seja, $S_2 < S_1$. Temos uma vazão Q de fluido de peso específico γ . Um manômetro diferencial com fluido manométrico de peso específico γ_m mede a diferença entre as pressões p_1 e p_2 . Considerando perfis uniformes de velocidade e desprezando perdas de carga, escreva uma expressão para a vazão Q no tubo.



Considerando perfis uniformes de velocidade, desprezando perdas de carga e pela ausência de máquinas, podemos usar a equação de Bernoulli:

$$\frac{V_2^2}{2g} + \frac{p_2}{\gamma} + z_2 = \frac{V_1^2}{2g} + \frac{p_1}{\gamma} + z_1$$

Como $z_2 = z_1$:

$$\frac{V_2^2 - V_1^2}{2g} = \frac{p_1 - p_2}{\gamma}$$

Da equação da Continuidade:

$$Q_1 = Q_2 \Rightarrow V_1 S_1 = V_2 S_2$$

Aplicando a equação da continuidade no resultado da equação de Bernoulli:

$$\frac{V_2^2 \left[1 - \left(\frac{S_2}{S_1} \right)^2 \right]}{2g} = \frac{p_1 - p_2}{\gamma}$$

Assim, a velocidade V_2 fica:

$$V_2 = \sqrt{\frac{2g(p_1 - p_2)}{\gamma \left[1 - \left(\frac{S_2}{S_1} \right)^2 \right]}}$$

Multiplicando pela área S_2 :

$$Q = S_2 \sqrt{\frac{2g(p_1 - p_2)}{\gamma \left[1 - \left(\frac{S_2}{S_1} \right)^2 \right]}}$$

Da equação do manômetro:

$$p_1 + \gamma h = p_2 + \gamma_m h$$

Ou seja:

$$p_1 - p_2 = h(\gamma_m - \gamma)$$

Substituindo esse resultado no resultado anterior para a vazão:

$$Q = S_2 \sqrt{\frac{2gh \left(\frac{\gamma_m}{\gamma} - 1 \right)}{\left[1 - \left(\frac{S_2}{S_1} \right)^2 \right]}}$$

Esse é um resultado teórico. Na prática, devido à perda de carga e falta de uniformidade dos perfis de velocidade um coeficiente de correção determinado experimentalmente para um determinado medidor é utilizado para corrigir o valor dessa vazão teórica.

Tal tipo de medidor de vazão é chamado de medidor de Venturi e será objeto de uma das experiências de laboratório do curso.

Bibliografia:

Bistafa, S.R., “Mecânica dos Fluidos, Noções e Aplicações”, 2ª Edição, Ed. Blucher, 2016.

White, F.M., “Mecânica dos Fluidos”, 5ª edição, Ed. McGraw Hill, 2010.

Potter, M.C.; Wiggert, D.C., “Mecânica dos Fluidos”, Ed. Thomson Learning, 2004.