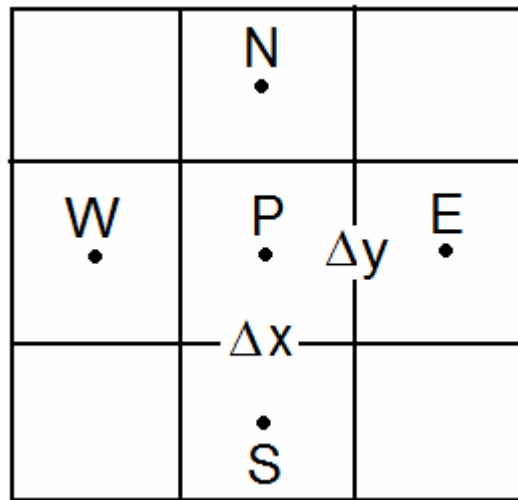


PME 2556 – Dinâmica dos Fluidos Computacional

Aula 4 – Advecção e Difusão em Regime Permanente

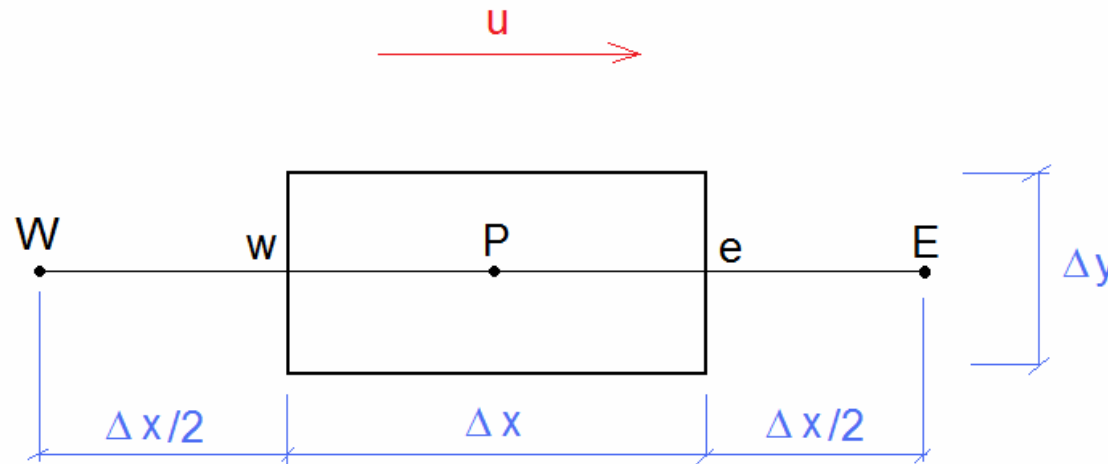
4.1 Advecção e Difusão em Regime Permanente

$$\int_S \rho u_j \phi n_j dA = \int_S \Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x_j} n_j dA + \int_V S_\phi dV$$



4.1 Exemplo: Escoamento Unidimensional sem fontes

$$\int_S \rho u_j \phi n_j dA = \int_S \Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x_j} n_j dA$$



$$\sum_{\text{vizinhos}} \underbrace{\rho u n_x \Delta y}_C \phi_{\text{face}} = \sum_{\text{vizinhos}} \underbrace{\Gamma \frac{\Delta y}{\Delta x}}_D (\phi_{\text{vizinho}} - \phi_P)$$

4.1 Exemplo: Escoamento Unidimensional

$$\sum_{\text{vizinhos}} \underbrace{\rho u n_x \Delta y}_C \phi_{\text{face}} = \sum_{\text{vizinhos}} \Gamma \underbrace{\frac{\Delta y}{\Delta x}}_D (\phi_{\text{vizinho}} - \phi_P)$$

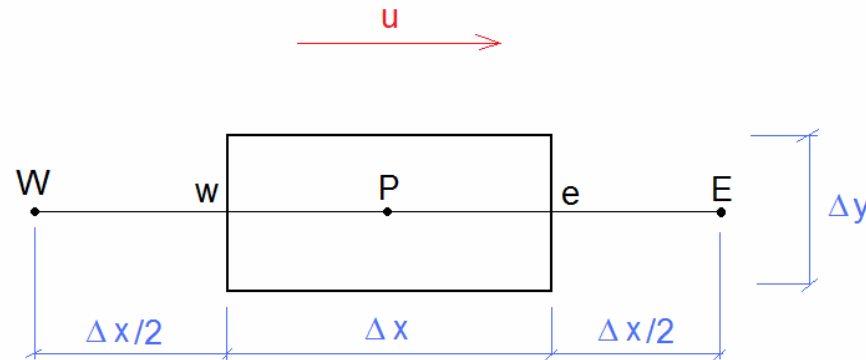
- C : fluxo de massa através da face, chamado de coeficiente de convecção ou advecção.
- D : coeficiente de difusão

Problema: avaliar ϕ nas faces!

4.2 Método de Diferenças Centradas

$$\phi_P = \phi_e + \frac{\partial \phi}{\partial x} \bigg|_e \left(-\frac{\Delta x_e}{2} \right) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \bigg|_e \left(-\frac{\Delta x_e}{2} \right)^2 + o(\Delta x_e^3)$$

$$\phi_E = \phi_e + \frac{\partial \phi}{\partial x} \bigg|_e \left(+\frac{\Delta x_e}{2} \right) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \bigg|_e \left(+\frac{\Delta x_e}{2} \right)^2 + o(\Delta x_e^3)$$



Somando:
$$\phi_e = \frac{\phi_P + \phi_E}{2} + o(\Delta x^2)$$

4.2 Método de Diferenças Centradas

Analogamente:
$$\phi_w = \frac{\phi_P + \phi_W}{2} + o(\Delta x^2)$$

Isso significa que o método de Diferenças Centradas aplicado ao termo advectivo é um método de 2ª ordem.

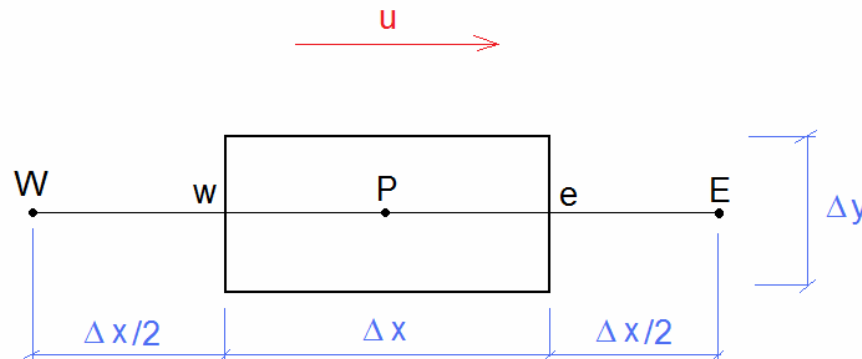
4.2 Método de Diferenças Centradas

$$\sum_{\text{vizinhos}} \underbrace{\rho u n_x \Delta y}_C \phi_{\text{face}} = \sum_{\text{vizinhos}} \Gamma \underbrace{\frac{\Delta y}{\Delta x}}_D (\phi_{\text{vizinho}} - \phi_P)$$

Resulta: $\frac{C_e}{2}(\phi_P + \phi_E) + \frac{C_w}{2}(\phi_P + \phi_W) = D_e(\phi_E - \phi_P) + D_w(\phi_W - \phi_P)$

Com:

$$C_e = C = \rho u \Delta y \quad C_w = -C = -\rho u \Delta y \quad D_e = D_w = D = \Gamma \frac{\Delta y}{\Delta x}$$



4.2 Método de Diferenças Centradas

$$\frac{C}{2}(\phi_P + \phi_E) - \frac{C}{2}(\phi_P + \phi_W) = D(\phi_E - \phi_P) + D(\phi_W - \phi_P)$$

Resulta:
$$\underbrace{2D}_{a_P} \phi_P = \left(\underbrace{D - \frac{C}{2}}_{a_E} \right) \phi_E + \left(\underbrace{D + \frac{C}{2}}_{a_W} \right) \phi_W$$

Problema: Para altos Re, $C \gg D$ e o coeficiente a_E se torna negativo, com duas consequências: (1) viola-se o princípio das soluções limitadas (*boundedness*); (2) o módulo do coeficiente a_P se torna menor que a soma dos módulos dos coeficientes a_E e a_W , violando o princípio da estabilidade pois o sistema linear não satisfaz mais o critério de Scarborough.

4.2 Método de Diferenças Centradas

Condição para termos coeficientes positivos:

$$D - \frac{C}{2} \geq 0 \Rightarrow \frac{C}{D} \leq 2 \Rightarrow \frac{\rho|u|\Delta x}{\Gamma} \leq 2$$

$\frac{\rho|u|\Delta x}{\Gamma}$ É chamado de N° de Peclet (Pe), Logo:

$$Pe \leq 2$$

4.2 Método de Diferenças Centradas

Efeito do número de Peclet:

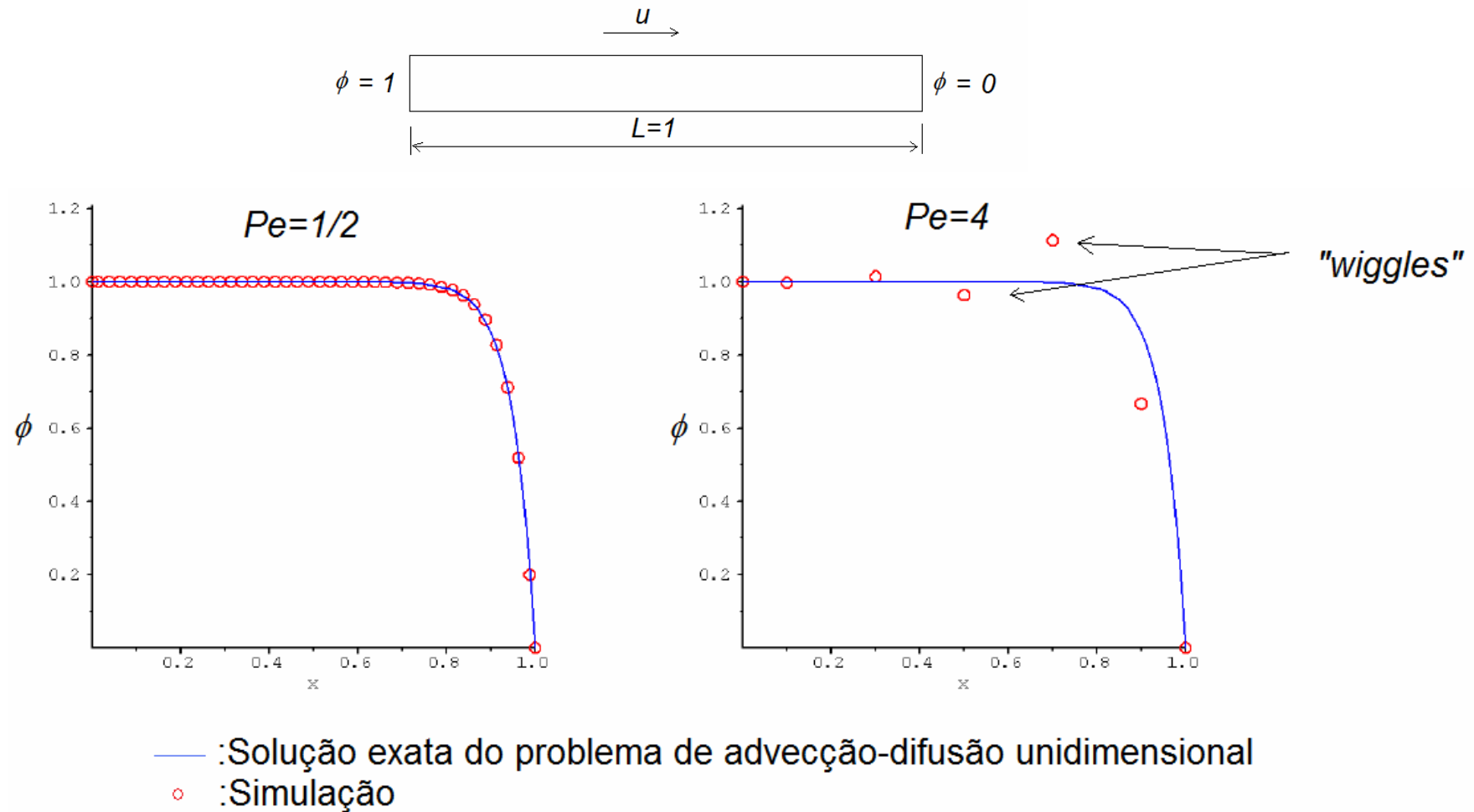


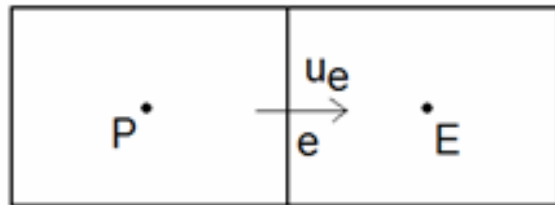
Figura adaptada de Apsley, D., CFD Lecture Notes, University of Manchester, Spring 2007.

4.2 Método de Diferenças Centradas

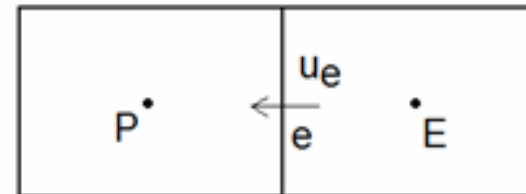
Observando a solução exata do problema de advecção-difusão unidimensional sem fontes, observamos que o principal problema é que o método de diferenças centradas não tem a propriedade do transporte: a maior parte do domínio é influenciada pelo valor de ϕ à montante.

4.3 Método da Interpolação à Montante (“upwind method”)

Neste método, se leva em conta o sentido da corrente, de forma a satisfazer o princípio do transporte:



$$u_e > 0 \rightarrow \phi_e = \phi_P$$



$$u_e < 0 \rightarrow \phi_e = \phi_E$$

4.3 Método da Interpolação à Montante (“upwind method”)

Problema: como todos os termos da expansão de Taylor são desprezados, temos um métodos de 1ª ordem.

$$\phi_P = \phi_e + \frac{\partial \phi}{\partial x} \Big|_e \left(-\frac{\Delta x_e}{2} \right) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \Big|_e \left(-\frac{\Delta x_e}{2} \right)^2 + o(\Delta x_e^3)$$

$$\phi_e = \phi_P + o(\Delta x)$$

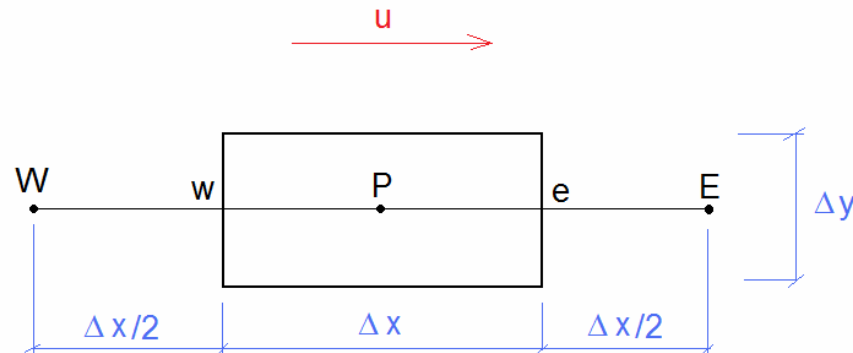
4.3 Método da Interpolação à Montante (“upwind method”)

Voltando ao problema de advecção-difusão unidimensional:

$$\sum_{\text{vizinhos}} \underbrace{\rho u n_x \Delta y}_C \phi_{\text{face}} = \sum_{\text{vizinhos}} \underbrace{\Gamma \frac{\Delta y}{\Delta x}}_D (\phi_{\text{vizinho}} - \phi_P)$$

Resulta: $C_e \phi_P + C_w \phi_W = D_e (\phi_E - \phi_P) + D_w (\phi_W - \phi_P)$

Com: $C_e = C = \rho u \Delta y$ $C_w = -C = -\rho u \Delta y$ $D_e = D_w = D = \Gamma \frac{\Delta y}{\Delta x}$



4.3 Método da Interpolação à Montante (“upwind method”)

$$C_e \phi_P + C_w \phi_W = D_e (\phi_E - \phi_P) + D_w (\phi_W - \phi_P)$$

Resulta:

$$C \phi_P - C \phi_W = D(\phi_E - \phi_P) + D(\phi_W - \phi_P)$$

Que resulta:

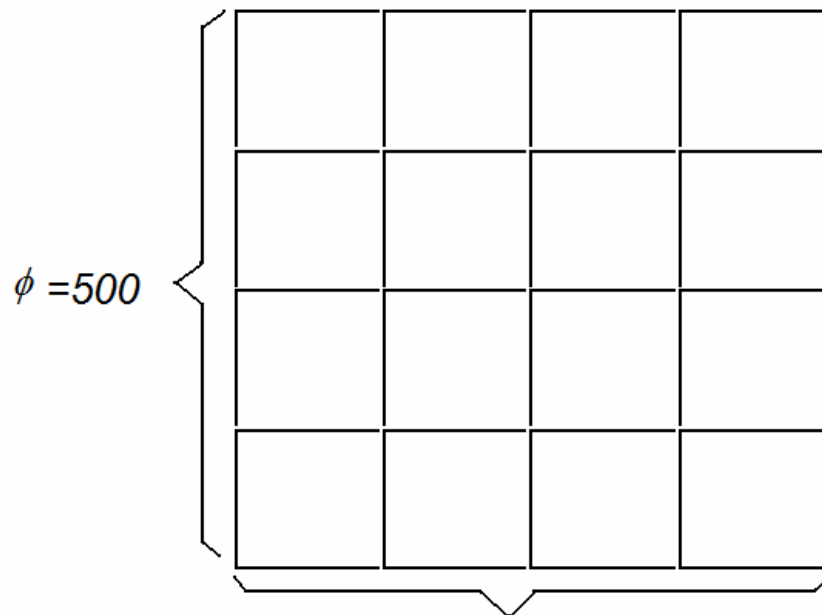
$$\left(\underbrace{C + 2D}_{a_P} \right) \phi_P = \underbrace{D}_{a_E} \phi_E + \left(\underbrace{C + D}_{a_W} \right) \phi_W$$

4.3 Método da Interpolação à Montante (“upwind method”)

O método upwind produz coeficientes positivos, o que satisfaz os critérios de valores limitados (“boundedness”) e estabilidade: note que agora o módulo de a_P é igual à soma dos módulos de a_E e a_W , satisfazendo o critério de Scarborough.

4.3 Método da Interpolação à Montante (“upwind method”)

Deficiência do método upwind: exemplo usando convecção pura multidimensional.



$$\int_S \rho u_j \phi n_j dA = 0$$

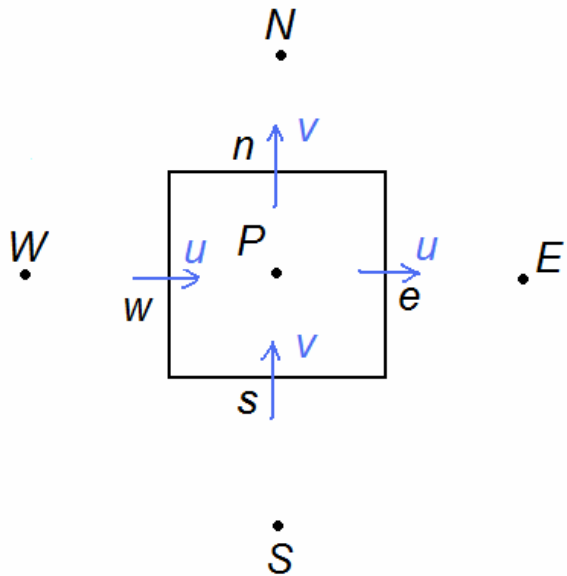
$$\Delta x = \Delta y = 1$$

$$\Gamma = 0$$

$$\rho = 1$$

4.3 Método da Interpolação à Montante ("upwind method")

Para cada célula,
temos:



$$\rho u \Delta y \phi_e - \rho u \phi_w \Delta y + \rho v \phi_n \Delta x - \rho v \phi_s \Delta x = 0$$

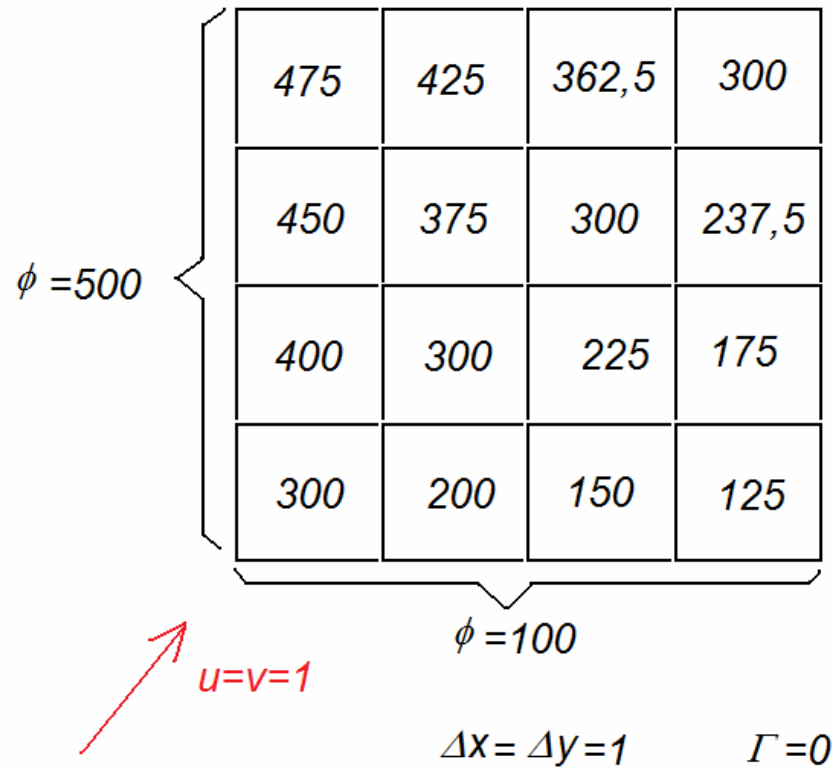
Que resulta, pelo método upwind:

$$\rho u \Delta y \phi_P - \rho u \phi_W \Delta y + \rho v \phi_P \Delta x - \rho v \phi_S \Delta x = 0$$

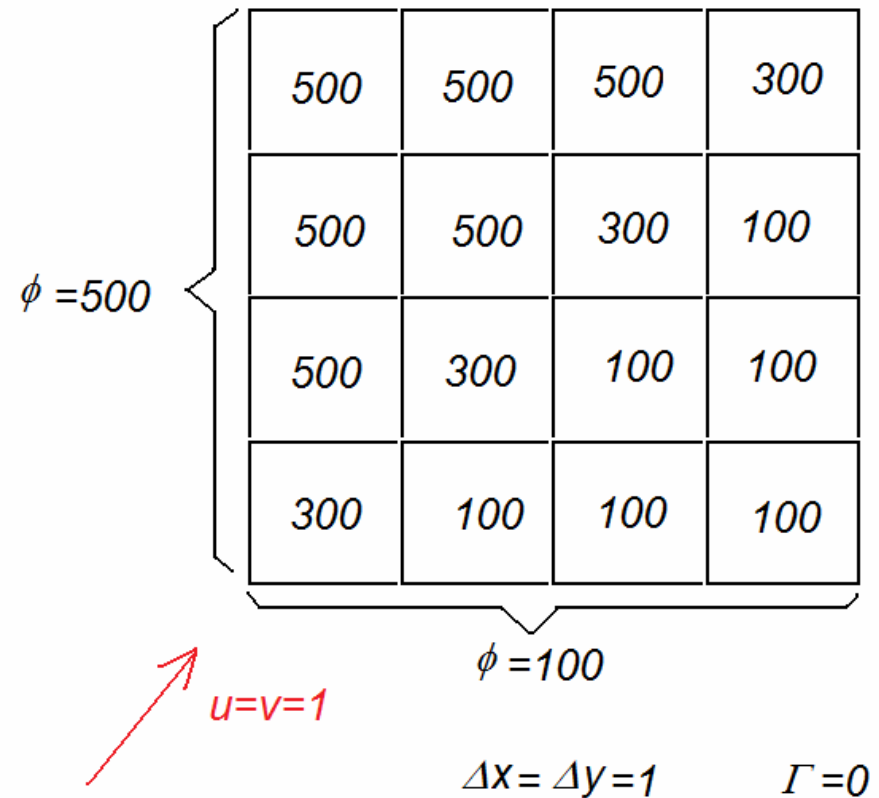
Com os dados numéricos: $\phi_P = \frac{\phi_W + \phi_S}{2}$

4.3 Método da Interpolação à Montante (“upwind method”)

Resulta:



Ao invés de:



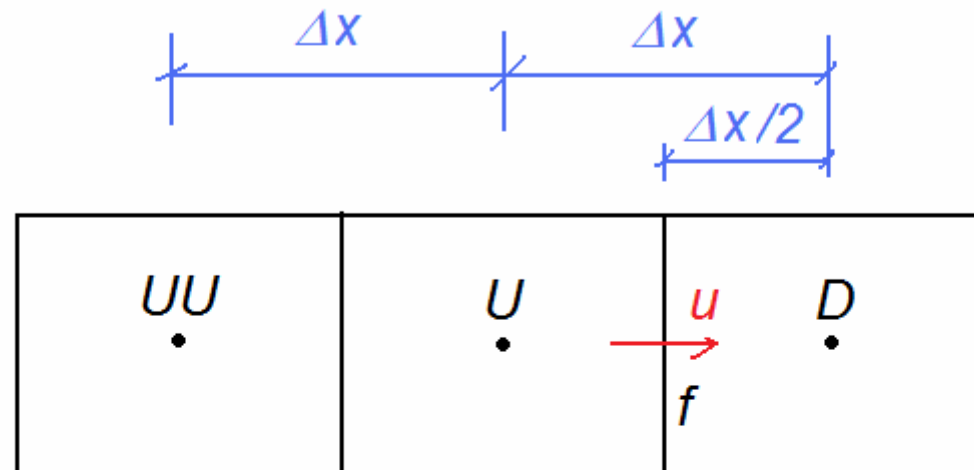
4.3 Método da Interpolação à Montante (“upwind method”)

A suavização dos gradientes, conhecida por difusão falsa ou numérica, é o principal problema do método upwind.

4.4 Sumário – Métodos de Diferenças Centradas e de Interpolação à Montante (upwind)

- O método de diferenças centradas tem 2ª ordem de precisão, mas para $Pe > 2$ viola os princípios do transporte, valores limitados e estabilidade. Portanto, exige malhas muito finas.
- O método upwind satisfaz o princípio do transporte, limita os valores e favorece a estabilidade. No entanto, seu erro de 1ª ordem faz surgir o fenômeno de difusão falsa ou numérica.

4.5 Métodos de ordem superior que levam em conta a direção do escoamento



D: Downwind cell

U: Upwind cell

UU: 2nd Upwind cell

f: face

Interpolação à montante de 2ª ordem (2nd order upwind ou Linear Upwind)

Podemos escrever:

$$\phi_f = \phi_U + \left. \frac{\partial \phi}{\partial x} \right|_U \frac{\Delta x}{2} + o(\Delta x^2) \quad (1)$$

$$\phi_{UU} = \phi_U - \left. \frac{\partial \phi}{\partial x} \right|_U \Delta x + o(\Delta x^2) \quad (2)$$

De (2) obtemos:

$$\left. \frac{\partial \phi}{\partial x} \right|_U = \frac{\phi_U - \phi_{UU}}{\Delta x} + o(\Delta x) \quad (3)$$

Substituindo (3) em (1):

$$\phi_f = \frac{3}{2} \phi_U - \frac{1}{2} \phi_{UU} + o(\Delta x^2) \quad (4)$$

Interpolação à montante de 3ª ordem (QUICK – Quadratic Upwind Interpolation for Convective Kinematics)

Podemos escrever:

$$\phi_f = \phi_U + \frac{\partial \phi}{\partial x} \Big|_U \frac{\Delta x}{2} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \Big|_U \frac{\Delta x^2}{4} + \frac{1}{6} \frac{\partial^3 \phi}{\partial x^3} \Big|_U \frac{\Delta x^3}{8} + o(\Delta x^4) \quad (1)$$

$$\phi_D = \phi_U + \frac{\partial \phi}{\partial x} \Big|_U \Delta x + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \Big|_U \Delta x^2 + \frac{1}{6} \frac{\partial^3 \phi}{\partial x^3} \Big|_U \Delta x^3 + o(\Delta x^4) \quad (2)$$

$$\phi_{UU} = \phi_U - \frac{\partial \phi}{\partial x} \Big|_U \Delta x + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \Big|_U \Delta x^2 - \frac{1}{6} \frac{\partial^3 \phi}{\partial x^3} \Big|_U \Delta x^3 + o(\Delta x^4) \quad (3)$$

Interpolação à montante de 3ª ordem (QUICK – Quadratic Upwind Interpolation for Convective Kinematics)

De (1), (2) e (3) resulta:

$$\left. \frac{\partial \phi}{\partial x} \right|_U = \frac{\phi_D - \phi_{UU}}{2\Delta x} + o(\Delta x^2) \quad (4)$$

$$\left. \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \right|_U = \frac{\phi_D - 2\phi_U + \phi_{UU}}{\Delta x^2} + o(\Delta x^2) \quad (5)$$

Interpolação à montante de 3ª ordem (QUICK – Quadratic Upwind Interpolation for Convective Kinematics)

Substituindo (4) e (5) em (1):

$$\phi_f = \frac{6\phi_U + 3\phi_D - \phi_{UU}}{8} + o(\Delta x^3)$$

Aplicação de Métodos de Ordem Superior

Em geral, para favorecer a estabilidade da solução dos sistemas lineares, o efeito de métodos de ordem superior é deferido ao termo fonte, ou seja, f nas faces é calculado por um método upwind de 1ª ordem e a correção para o método de ordem superior é colocada no carregamento do sistema linear (deferred correction method). Assim, temos:

$$\int_S \rho u_j \phi_{faces} n_j dA = \int_S \Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x_j} n_j dA + \int_{\forall} S_{\phi} d\forall$$

Que fica:

$$\int_S \rho u_j \phi_{upwind} n_j dA = \int_S \Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x_j} n_j dA + \underbrace{\int_{\forall} S_{\phi} d\forall + \int_S \rho u_j (\phi_{upwind} - \phi_{upper\ order}) n_j dA}_b$$

Bibliografia

Versteeg, H,K; Malalasekera, W., “An introduction to Computational Fluid Dynamics: The Finite Volume Method”, 2nd Edition, Pearson Education Limited, 2007.

Maliska, C.R., “Transferência de Calor e Mecânica dos Fluidos Computacional, LTC editora, 1995.

Apsley, D., CFD Lecture Notes, University of Manchester, Spring 2007.