Continuidade

Definição

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $P_0 \in \Omega$ *e* P_0 *ponto de acumulação de* Ω. *Dizemos que* $f : \Omega \to \mathbb{R}$ *é contínua em* P_0 *se*

$$\lim_{P \to P_0} f(P) = f(P_0).$$

Observação Quando f for contínua em um subconjunto A de D_f dizemos que f é contínua em A. Dizemos, simplesmente que f é contínua quando for contínua em todos os pontos do seu domínio.

Exemplo

A função constante $f(x, y) = c$ *é contínua, pois vimos que*

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y) = c = f(x_0, y_0)$$

para todo (x_0, y_0) *em* $\mathbb{R}^2$.

Exemplo

A função $f(x,y) = x$ *é contínua, pois vimos que*

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = x_0 = f(x_0,y_0)$$

para todo (x_0,y_0) *em* $\mathbb{R}^2$.

Exemplo

A função

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

não é contínua em $(0,0)$.

solução: De fato, se $\gamma_1(t) = (t,0)$ e $\gamma_2(t) = (0,t)$ temos

$$\lim_{t \to 0} f(\gamma_1(t)) = \lim_{t \to 0} \frac{t^2}{t^2} = 1, \quad \lim_{t \to 0} f(\gamma_2(t)) = \lim_{t \to 0} -\frac{t^2}{t^2} = -1$$

Logo não existe o $lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ e, portanto f não é contínua em $(0,0)$.

Exemplo

A função

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

é contínua em $(0,0)$.

solução: *De fato,*

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} x\frac{x^2}{x^2+y^2} = 0$$

isto é

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0 = f(0,0)$$

ou seja, f *é contínua em* $(0,0)$.

Observação: Sejam f e g funções contínuas em P_0 e k uma constante. Segue das propriedades do limite que $f+g$, kf e $f.g$, são também, contínuas em P_0. Além disso, se $g(P_0) \neq 0$, então $\frac{f}{g}$ será também contínua em P_0.

Exemplo

a) Toda função polinomial é contínua $\mathbb{R}^n$.

b) Toda função racional é contínua nos pontos do seu domínio.

Teorema

Sejam $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *e* $g : B \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *duas funções tais que* $Imf \subset B$*. Se* f *for contínua em* P_0 *e* g *contínua em* $f(P_0)$*, então a composta* $h(P) = g(f(P))$ *será contínua em* P_0*.*

Exemplo

As funções $\sin(x - y^2)$, $\cos(x^2 - y^2)$, $e^{x^2+y^2}$ *e* $\ln(x + y)$ *são funções contínuas em todos os pontos do seu domínio.*

Teorema

Sejam $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *uma função e* $\gamma : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *uma curva tal que* $\gamma(t) \in \Omega$ *para todo* $t \in I$. *Se* γ *for contínua em* t_0 *e* f *contínua em* $\gamma(t_0)$, *então a composta* $g(t) = f(\gamma(t))$ *será contínua em* t_0.