Limite

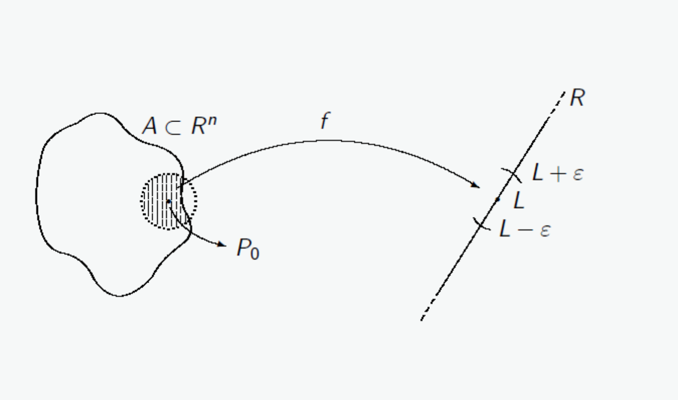
Definição

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, P_0 *um ponto de acumulação de* Ω, $f : \Omega \to \mathbb{R}$ *uma função e* $L \in \mathbb{R}$. *Dizemos que limite de* $f(P)$ *quando* P *tende a* P_0 *é igual a* L *e escrevemos*

$$\lim_{P \to P_0} f(P) = L$$

quando, para todo $\epsilon > 0$, *existe* $\delta > 0$ *tal que, para todo* $P \in \Omega$

$$0 < \|P - P_0\| < \delta \Rightarrow |f(P) - L| < \epsilon.$$


$A \subset R^n$
f
R
$L+\varepsilon$
L
$L-\varepsilon$
P_0

Exemplo

Seja $f(x,y) = c$ *uma função constante, então para todo* (x_0, y_0) *em* $\mathbb{R}^2$

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} c = c.$$

solução: Como $|f(x,y) - c| = |c - c| = 0$, logo dado $\epsilon > 0$, tomando $\delta > 0$ qualquer

$$0 < \|(x,y) - (x_0,y_0)\| < \delta \Rightarrow |f(x,y) - c| = 0 < \epsilon.$$

Exemplo

Seja $f(x,y) = x$ *para todo* $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ *então*

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} x = x_0.$$

solução: Como

$$\begin{aligned} |f(x,y) - x_0| &= |x - x_0| = \sqrt{(x-x_0)^2} \\ &\leq \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} = \|(x,y) - (x_0,y_0)\| \end{aligned}$$

logo, dado $\epsilon > 0$, tomando $\delta = \epsilon$ temos que

$$0 < \|(x,y) - (x_0,y_0)\| < \delta \Rightarrow |f(x,y) - x_0| < \epsilon.$$

Propriedades

Sejam $f, g : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ e P_0 um ponto de acumulação de Ω. Suponha que

$$\lim_{P \to P_0} f(P) = L_1 \,, \quad \lim_{P \to P_0} g(P) = L_2$$

Valem as seguintes propriedades:

A)

$$\lim_{P \to P_0} (f(P) + g(P)) = L_1 + L_2$$

B)

$$\lim_{P \to P_0} (f(P) g(P)) = L_1 L_2$$

C) Se $L_2 \neq 0$,

$$\lim_{P \to P_0} \frac{f(P)}{g(P)} = \frac{L_1}{L_2}$$

Teorema

(Unicidade) Suponha que $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *e* P_0 *ponto de acumulação de* Ω*. Se* $lim_{P \to P_0} f(P) = L$ *e* $lim_{P \to P_0} f(P) = M$ *então* $L = M$*.*

Teorema

(Conservação do sinal) Suponha que $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *e* P_0 *ponto de acumulação de* Ω*. Se* $lim_{P \to P_0} f(P) = L > 0$ *e existe* $r > 0$ *tal que se* $P \in \Omega$ *e* $0 < \|P - P_0\| < r$ *então* $f(P) > 0$*.*

Teorema

(Confronto) Suponha que $f, g, h : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *e* P_0 *ponto de acumulação de* Ω.
Suponha que existe $r > 0$ *tal que* $f(P) \leq g(P) \leq h(P)$ *para* $0 < \|P - P_0\| < r$ *e que*

$$lim_{P \to P_0} f(P) = L = lim_{P \to P_0} h(P).$$

Então $lim_{P \to P_0} g(P) = L$.

Corolário

Suponha que $f, g : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *e* P_0 *ponto de acumulação de* Ω.
Se $\lim_{P \to P_0} f(P) = 0$ *e* $|g(P)| \leq M$ *para* $0 \leq \|P - P_0| < r$ *onde* $r > 0$ *e* $M > 0$ *são reais fixos então*

$$\lim_{P \to P_0} f(P) g(P) = 0.$$

Exemplo

Calcule o limite

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3}{x^2+y^2}$$

solução: Temos que

$$\frac{x^3}{x^2+y^2} = x\frac{x^2}{x^2+y^2}$$

e

$$0 \leq \frac{x^2}{x^2+y^2} \leq 1, \qquad \lim_{(x,y)\to(0,0)} x = 0.$$

Deste modo do corolário anterior temos

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3}{x^2+y^2} = 0.$$

Teorema

Suponha que $\lim_{P \to P_0} f(P) = L$ *e* $\gamma : I \to \Omega$ *uma curva contínua com* $\gamma(t_0) = P_0$ *e* $\gamma(t) \neq P_0$ *para* $t \neq t_0$. *Então*

$$\lim_{t \to t_0} f(\gamma(t)) = L.$$

Corolário

Sejam γ_1 *e* γ_2 *duas curvas nas condições do teorema acima. Se*

$$\lim_{t \to t_0} f(\gamma_1(t)) = L_1, \quad \lim_{t \to t_0} f(\gamma_2(t)) = L_2.$$

e $L_1 \neq L_2$ *então não existe* $\lim_{P \to P_0} f(P)$.

Exemplo

Mostre que o limite

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2}{x^2+y^2}$$

não existe.

solução: Seja $f(x,y) = \dfrac{x^2}{x^2+y^2}$ e $\gamma_1(t) = (t,0)$ e $\gamma_2(t) = (0,t)$. Então $f(\gamma_1(t)) = f(t,0) = 1$ e $f(\gamma_2(t)) = f(0,t) = 0$ o que implica

$$\lim_{t\to 0} f(\gamma_1(t)) = 1 \neq 0 = \lim_{t\to 0} f(\gamma_2(t)).$$

Portanto pelo corolário anterior o limite

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2}{x^2+y^2}$$

não existe.

Teorema

Seja que $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *e* P_0 *ponto de acumulação de* Ω *e* $\lim_{P \to P_0} f(P) = L$. *Suponha* $I \subset \mathbb{R}$ *intervalo,* $L \in I$ *e* $g : I \to \mathbb{R}$ *contínua em* L. *Então*

$$\lim_{P \to P_0} g(f(P)) = g(L).$$

Exemplo

Calcule

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \cos\left(\frac{x^3}{x^2+y^2}\right).$$

solução: Vimos anteriormente que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3}{x^2+y^2} = 0$$

Como a função cosseno é contínua em zero vem do teorema anterior que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \cos\left(\frac{x^3}{x^2+y^2}\right) = \cos(0) = 1.$$