Exercício 2

$$f(x) = \begin{cases} 2e^{-2x} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

a) Mostre que $f(x)$ é uma f.d.p.

b) Calcule $P(X > 10)$.

a) $e^{-2x} > 0 \quad \forall x$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{0} 0\,dx + \int_{0}^{+\infty} 2e^{-2x}\,dx$$

$$\int_{0}^{+\infty} 2e^{-2x}\,dx = -e^{-2x}\Big|_{0}^{+\infty} = \lim_{x\to\infty}\left[-e^{-2x}\right] - \left(-e^{-2 \cdot 0}\right) =$$

↳ primitiva de $2e^{-2x}$: $-e^{-2x}$

$= 0 + 1 = 1$

b) $$P(X > 10) = \int_{10}^{+\infty} 2e^{-2x}\,dx = -e^{-2x}\Big|_{10}^{\infty} = 0 + e^{-20} =$$

$$= \frac{1}{e^{20}}$$

Exercício 3

Demanda diária de arroz (em centenas de quilos)

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2}{3}x & \text{se } 0 \leq x < 1 \\ -\frac{x}{3}+1 & \text{se } 1 \leq x \leq 3 \\ 0 & \text{se } x < 0 \text{ ou } x > 3 \end{cases}$$

a) Quanto o gerente espera vender em um dia?

X - venda diária

E(X) - venda esperada em um dia

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x\, f(x)\, dx = \int_0^1 \frac{2}{3}x^2\, dx + \int_1^3 \left[-\frac{x^2}{3} + x\right] dx =$$

$$= \frac{2}{3}\frac{x^3}{3}\Big|_0^1 + \left[\frac{-x^3}{9} + \frac{x^2}{2}\right]_1^3 = \frac{2}{9} + \left(\frac{-27}{9} + \frac{9}{2} + \frac{1}{9} - \frac{1}{2}\right) =$$

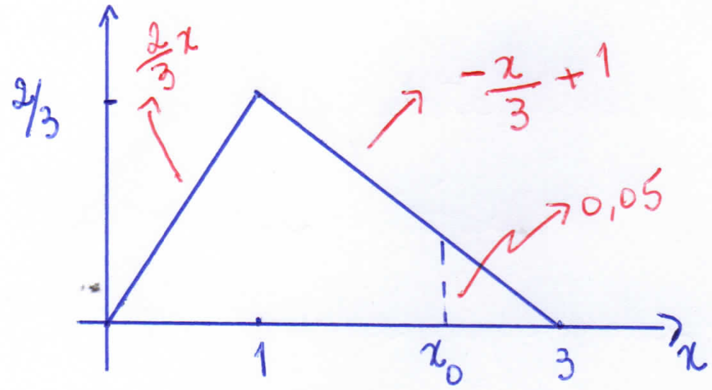
$$= \frac{4}{3}$$

Venda esperada em 30 dias : $30 \cdot \frac{4}{3} = 40$ centenas de quilos

b) Qual é a quantidade que deve ser deixada à disposição diariamente para que falte arroz em no máximo 5% dos dias?

x_0 - quantidade que deve ser deixada à disposição

$P(X > x_0) = 0{,}05$



É razoável supor que $1 < x_0 < 3$.

$$\int_{x_0}^{3} f(x)\,dx = 0{,}05$$

$$\int_{x_0}^{3} \left(-\frac{x}{3}+1\right) dx = \left[\frac{-x^2}{6} + x\right]_{x_0}^{3} = 0{,}05$$

$$-\frac{9}{6} + 3 + \frac{x_0^2}{6} - x_0 = 0{,}05$$

$$x_0^2 - 6x_0 - 8{,}7 = 0$$

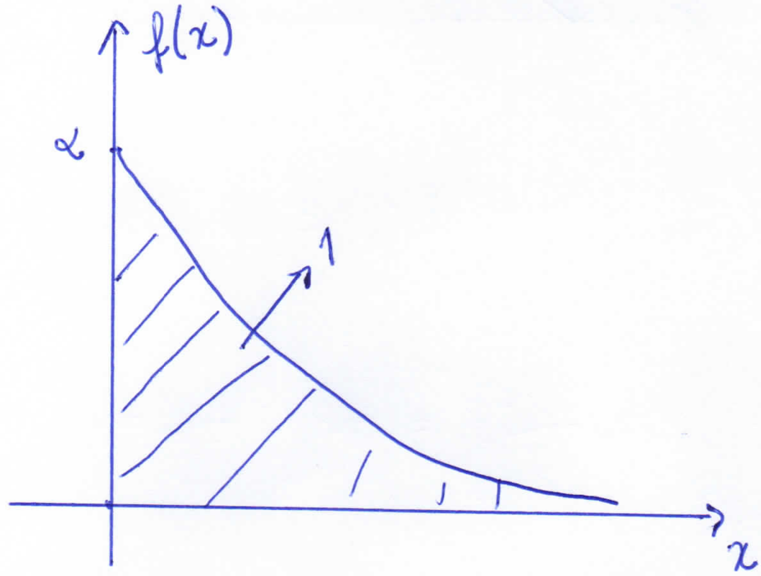
$x_0' = 3{,}55$ X $\qquad \boxed{x_0'' = 2{,}45}$

Distribuição Exponencial

A variável aleatória contínua X, com valores não negativos, tem distribuição exponencial com parâmetro $\alpha > 0$ se sua densidade é

$$f(x) = \begin{cases} \alpha e^{-\alpha x}, & x \geq 0 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Notação: $X \sim Exp(\alpha)$



$$\int_0^\infty \alpha e^{-\alpha x} dx = \lim_{x \to \infty} -e^{-\alpha x} - \left[-e^{-\alpha x}\right]^0 = 0 - (-1) = 1$$

Primitiva de $\alpha^{-\alpha x}$: $-e^{-\alpha x}$

Obs:

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

$$\int_a^\infty f(x)\,dx = \lim_{x\to\infty} F(x) - F(a)$$

$F(x)$: primitiva de $f(x)$.

$$P(a < X < b) = \int_a^b \alpha e^{-\alpha x}\,dx = -e^{-\alpha x}\Big|_a^b =$$

$$= e^{-\alpha a} - e^{-\alpha b}$$

Cálculo da Média de X.

$$\mu = E(X) = \int_0^\infty x \alpha e^{-\alpha x}\,dx = \left[-x e^{-\alpha x} - \frac{e^{-\alpha x}}{\alpha}\right]_0^\infty$$

$$= 0 + \frac{1}{\alpha} - 0 - 0 = \frac{1}{\alpha}$$

Cálculo da Primitiva (por partes)

$$\int \underbrace{x}_{u}\, \underbrace{e^{-\alpha x}}_{dv} = \underbrace{x}_{u} \Big(\underbrace{-\frac{e^{-\alpha x}}{\alpha}}_{v} \Big) - \int \underbrace{1}_{du} \Big(\underbrace{-\frac{e^{-\alpha x}}{\alpha}}_{v} \Big) =$$

$$= -\frac{x e^{-\alpha x}}{\alpha} + \frac{1}{\alpha} \int e^{-\alpha x} dx = -\frac{x e^{-\alpha x}}{\alpha} + \frac{1}{\alpha} \left[-\frac{1}{\alpha} e^{-\alpha x} \right]$$

$$= \frac{-x e^{-\alpha x}}{\alpha} - \frac{1}{\alpha^2} e^{-\alpha x}$$

No cálculo da integral

$$-x e^{-\alpha x} \Big|^{\infty} = \lim_{x \to \infty} x e^{-\alpha x} = \lim_{x \to \infty} \frac{x}{e^{\alpha x}} = \lim_{x \to \infty} \frac{1}{\alpha e^{\alpha x}}$$

l'hopital

$$= 0$$

Verifica-se que

$$\sigma^2 = Var(X) = \frac{1}{\alpha^2}$$

A distribuição exponencial é muito utilizada em áreas como Física, Engenharia e Biologia. Modela variáveis aleatórias como

— Vida útil de equipamentos
— Tempos de falha
— Tempos de espera em filas.

Exemplo 6.7 pag 193

X - intervalo de tempo, em minutos, entre duas emissões de uma fonte radioativa

$X \sim Exp(0,2)$. Calcular a probabilidade de

a) Haver uma emissão em um intervalo inferior a 2 minutos.

b) O intervalo entre duas emissões ser superior ou igual a 7, sabendo-se que é maior ou igual a 5 minutos.

a) $P(X<2)$

$$f(x) = \alpha e^{-\alpha x} = \begin{cases} 0{,}2\, e^{-0{,}2x} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

$$P(X<2) = \int_0^2 0{,}2 e^{-0{,}2x} dx = -e^{-0{,}2x}\Big|_0^2 = -e^{-0{,}4} + 1$$

$$= 0{,}33.$$

$X \geq 5 \cap X \geq 7$

b) $$P(X \geq 7 \mid X \geq 5) = \frac{P(X \geq 5 \text{ e } X \geq 7)}{P(X \geq 5)} = \frac{P(X \geq 7)}{P(X \geq 5)}$$

$$= \frac{\int_7^\infty 0{,}2 e^{-0{,}2x} dx}{\int_5^\infty 0{,}2 e^{-0{,}2x} dx} = \frac{-e^{-0{,}2x}\Big|_7^\infty}{-e^{-0{,}2x}\Big|_5^\infty} = \frac{e^{-0{,}2 \cdot 7}}{e^{-0{,}2 \cdot 5}} =$$

$$= \frac{e^{-1{,}4}}{e^{-1}} = 0{,}67.$$

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Observar que $P(X \geq 2) = 1 - P(X<2) = 1 - 0{,}33 = 0{,}67$

Esta é uma propriedade da distribuição exponencial

P(viver + 2 anos dado que viveu um tempo t) =

P(viver os 2 1os anos)

Propriedade de Falta de Memória da Distribuição Exponencial

$$P(X \geq t+s \mid X \geq s) = \frac{P(X \geq t+s,\, X \geq s)}{P(X \geq s)} = \frac{P(X \geq t+s)}{P(X \geq s)}$$

Se $X \sim Exp(\alpha)$

$$= \frac{\int_{t+s}^{\infty} \alpha e^{-\alpha x}\, dx}{\int_{s}^{\infty} \alpha e^{-\alpha x}\, dx} = \frac{-e^{-\alpha x}\Big|_{t+s}^{\infty}}{-e^{-\alpha x}\Big|_{s}^{\infty}} = \frac{e^{-\alpha(t+s)}}{e^{-\alpha s}} =$$

$$= e^{-\alpha t} = P(X \geq t)$$

↳ probabilidade de um equipamento novo durar pelo menos t anos

Exemplo

O tempo de vida X de um mecanismo eletrônico (em 1.000 horas) é uma variável aleatória contínua com f.d.p.

$$f(x) = e^{-x}, \quad x > 0 \quad [Exp(1)].$$

O custo de fabricação de um item é 2 u.m. e o preço de venda é 5 u.m. O fabricante garante devolução se $X \leq 0,9$. Qual é o lucro esperado por item?

L - lucro por item (variável aleatória)

Lucro esperado por item: $E(L)$

$$L = \begin{cases} 3 & \text{se } X > 0,9 \\ -2 & \text{se } X \leq 0,9 \end{cases}$$

L é v.a. discreta

L	3	-2
$P(L)$	$e^{-0,9}$	$1-e^{-0,9}$

$$E(L) = 3 \cdot P(L=3) - 2 \cdot P(L=-2) =$$

$$= 3\,P(X>0,9) - 2\,P(X \leq 0,9) =$$

$$= 3\int_{0,9}^{\infty} e^{-x}\,dx - 2\int_{0}^{0,9} e^{-x}\,dx =$$

$$= 3\left[-e^{-x}\right]_{0,9}^{\infty} - 2\left[-e^{-x}\right]_{0}^{0,9} = 3\,e^{-0,9} - 2\left[1-e^{-0,9}\right]$$

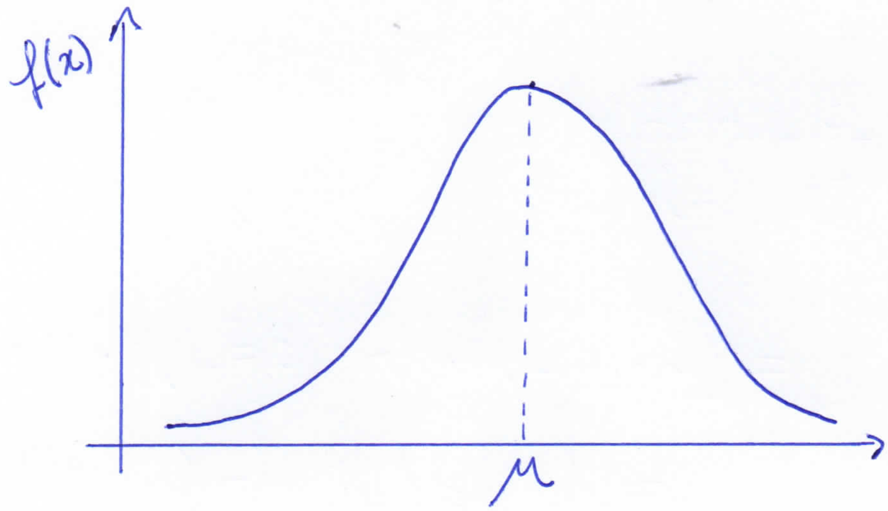
$$= 0,0328.$$

Distribuição Normal

A variável aleatória contínua X tem distribuição normal com parâmetros μ e σ^2 se sua função densidade de probabilidades é

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \qquad -\infty < x < \infty$$

Notação ; $X \sim N(\mu, \sigma^2)$



Propriedades

i) $f(x)$ é simétrica em torno de μ.

ii) $f(x) \longrightarrow 0$ para $x \longrightarrow \pm\infty$

iii) $x = \mu$ é ponto de máximo de $f(x)$
(μ é a moda de X)

iv) $\mu - \sigma$ e $\mu + \sigma$ são pontos de inflexão de $f(x)$.

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx$$

Mas esta integral só pode ser calculada através de métodos numéricos.

O cálculo de probabilidades é feito através de tabelas.

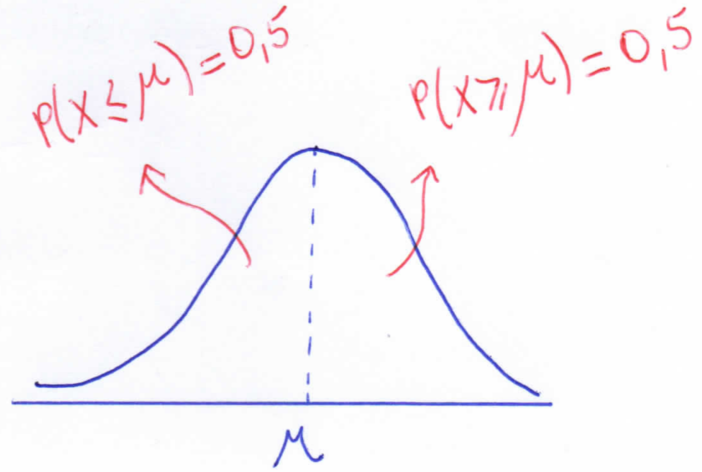
Prova-se que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2} dx = 1$$

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2} dx = \mu$$

$$Var(X) = \sigma^2$$

Devido à simetria



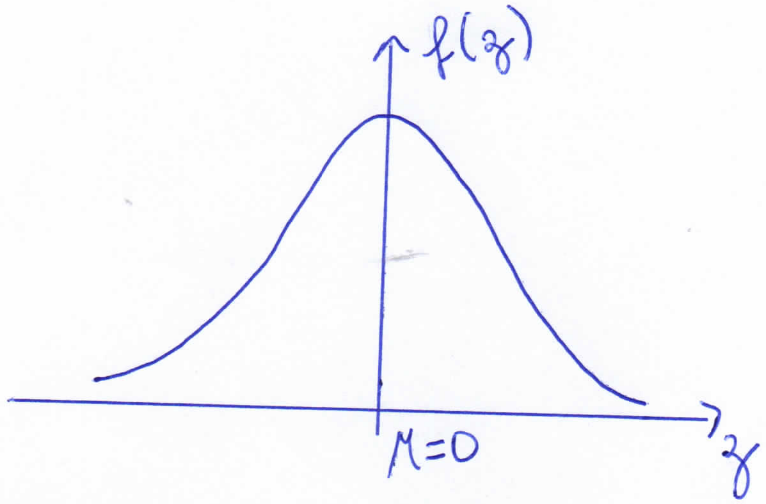
Portanto $\mu = Md(X)$.

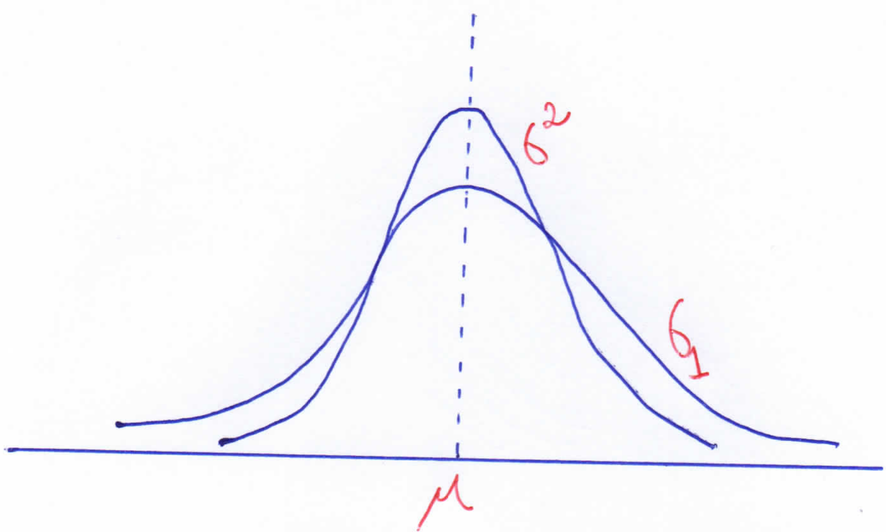
Caso Particular Importante

Se $\mu = 0$ e $\sigma^2 = 1$ então $X \sim N(0,1)$, que é denominada distribuição normal reduzida ou normal padrão.

Esta variável aleatória geralmente é indicada por Z.

$Z \sim N(0,1)$





$\sigma_1 > \sigma_2$ Quanto menor σ, mais concentrada estará a distribuição em torno de sua média.

Importância da Distribuição Normal

Muitas variáveis de interesse se distribuem segundo a distribuição normal.

Ex: erros de aproximação, notas, peso, altura, quantidade de substância no sangue.

Notas: alta concentração em torno da média, baixa concentração de notas em valores muito maiores ou muito menores que a média.

Fornece uma boa aproximação para outras distribuições.

Exercício 24, seção 6.3