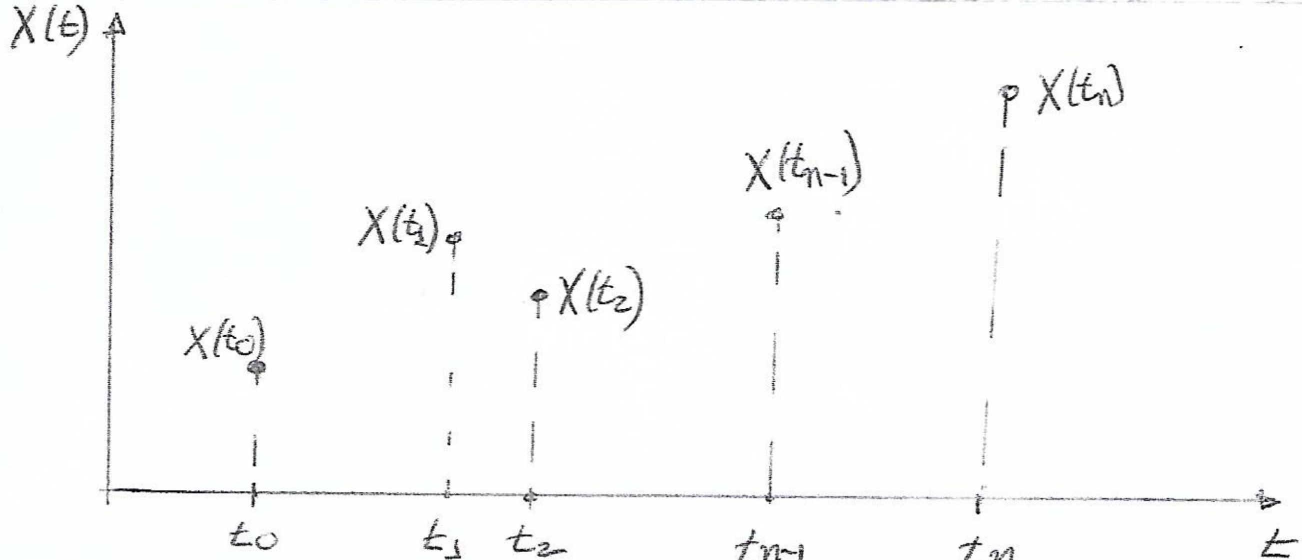
PNV 3421 - Processos Estocásticos

Notas de Aula - Teoria de Filas 10/09/2020

1- Revisão da Aula de 03/10/2020

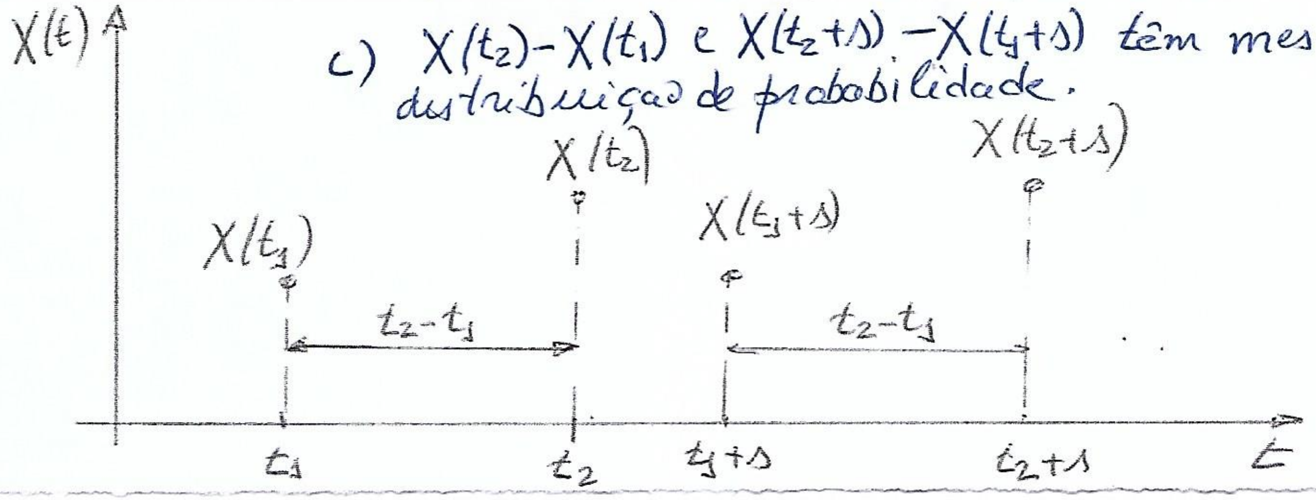
1.1 Processo Estocástico com Incrementos Independentes e Estacionários

a) $\{X(t), t \in T\}$ processo estocástico

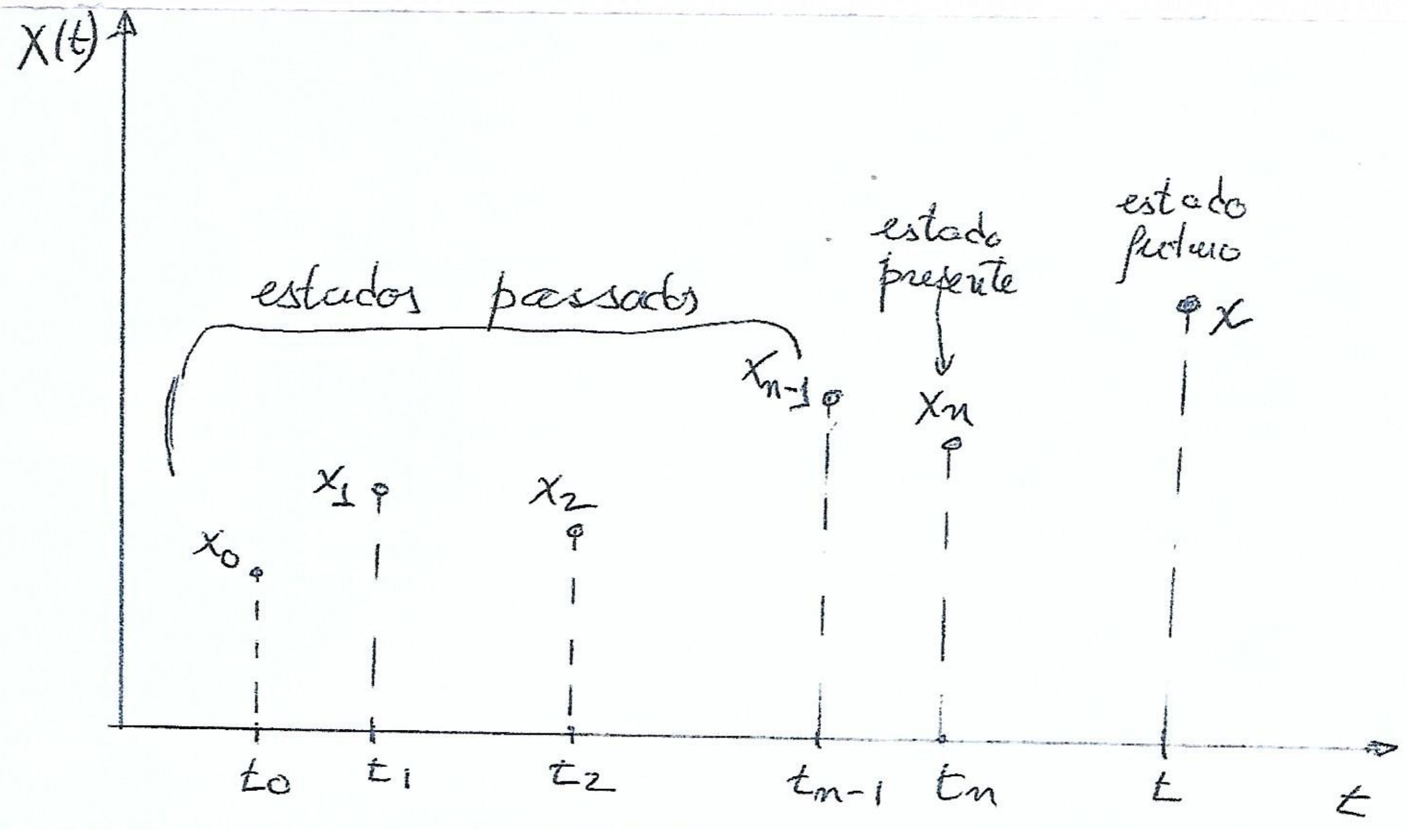


b) $X(t_1) - X(t_0)$, $X(t_2) - X(t_1)$, $X(t_n) - X(t_{n-1})$ são variáveis aleatórias mutuamente independentes;

c) $X(t_2) - X(t_1)$ e $X(t_2+s) - X(t_1+s)$ têm mesma distribuição de probabilidade.



1.2 Processo Markoviano



$$P[X(t) \leq x / X(t_0) = x_0, X(t_1) = x_1, X(t_2) = x_2, \ldots, X(t_n) = x_n] =$$

$$= P[X(t) \leq x / X(t_n) = x_n]$$

1.3 Processo de contagem $\{N(t), t \geq 0\}$ conta o número de eventos até o instante t.

1.4 Processo de Poisson $\{N(t), t \geq 0\}$

<u>definição 1</u> Processo de contagem

i) $N(0) = 0$;

ii) $\{N(t), t \geq 0\}$ tem incrementos independentes;

iii) Para quaisquer $s, t \geq 0$, $n = 0, 1, 2, \ldots$

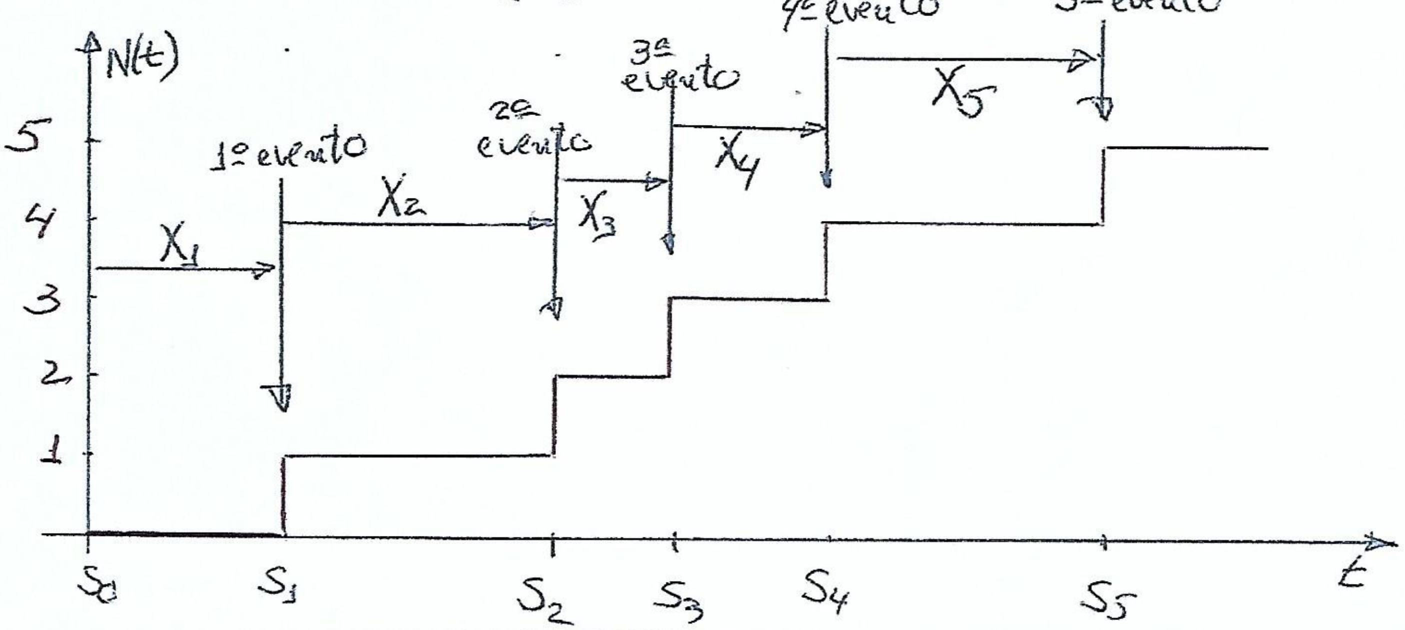
$$P[N(s+t) - N(s) = n] = \frac{(\lambda t)^n e^{-\lambda t}}{n!}$$

λ é a taxa do processo

1.5 Propriedades de um processo de Poisson

1. $E\left[N(s+t) - N(s)\right] = \lambda t$

$S_0 = 0$ e $S_i = \sum_{k=1}^{i} X_k$.

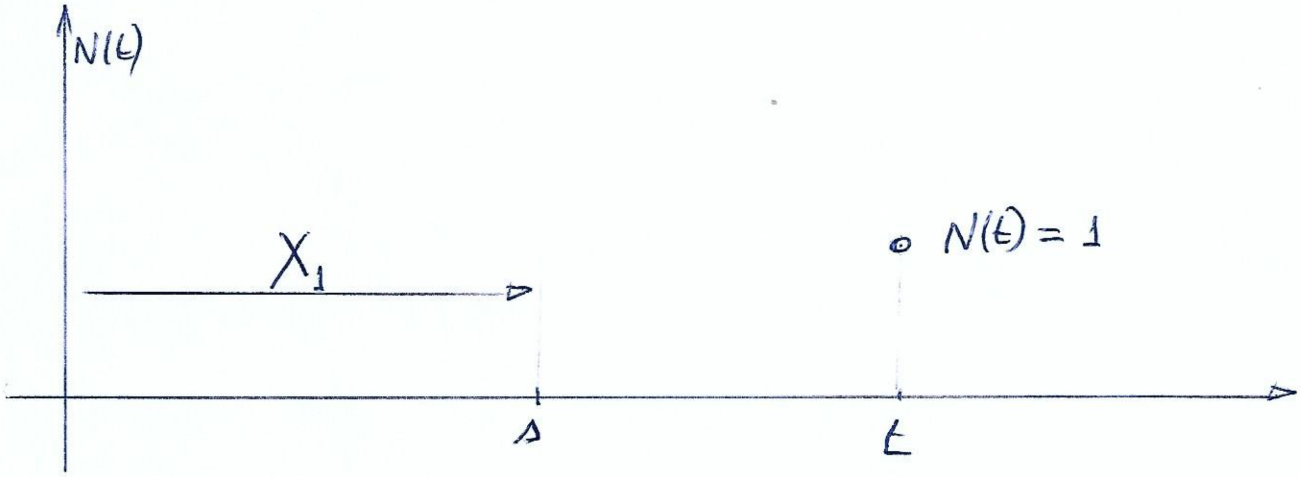


2. O intervalo até o primeiro evento, X_1, e os intervalos entre eventos consecutivos, X_2, X_3, X_4, X_5, ... são variáveis aleatórias independentes com distribuição exponencial, com média $1/\lambda$, com função densidade de probabilidade $f_{X_i}(t) = \lambda e^{-\lambda t}$.

3. O intervalo até a ocorrência do evento n, S_n, é uma variável aleatória com função densidade de probabilidade $f_{S_n}(t)$

$$f_{S_n}(t) = \frac{\lambda^n t^{n-1} e^{-\lambda t}}{(n-1)!}$$, Erlang de ordem n

4. Distribuição de X_1, condicionada a $N(t)=1$



$$P[X_1 \leq s / N(t)=1] = \frac{P[N(s)-N(0)=1,\ N(t)-N(s)=0]}{P[N(t)-N(0)=1]} =$$

$$\underset{\text{independentes}}{\overset{\text{incrementos}}{=}} \frac{P[N(s)-N(0)=1]\cdot P[N(t)-N(s)=0]}{P[N(t)-N(0)=1]} =$$

$$= \frac{\lambda s e^{-\lambda s}\, e^{-\lambda(t-s)}}{\lambda t e^{-\lambda t}} = \frac{s}{t}$$

$$f_{X_1/N(t)=1}(s) = \frac{d}{ds}\left(F_{X_1/N(t)=1}(s)\right) = \frac{d}{ds}\left(P[X_1 \leq s/N(t)=1]\right) =$$

$$= \frac{1}{s} \quad , s \text{ entre } 0 \text{ e } t$$

Isto é, a função densidade de probabilidade do intervalo até o primeiro evento, dado que até o instante t somente ocorreu um único evento, é uniforme entre 0 e t.

2 – Complementação de Processo de Poisson

Diz-se que uma função f é $o(t)$ se

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(t)}{t} = 0$$

definição 2 de Processo de Poisson

Diz-se que um processo de contagem $\{N(t), t\geq 0\}$ é um processo de Poisson se:

i) $N(0) = 0$;

ii) $\{N(t), t \geq 0\}$ tem incrementos independentes e estacionários;

iii) $P[N(t) \geq 2] = o(t)$

iv) $P[N(t) = 1] = \lambda t + o(t)$

<u>Propriedade</u> As definições 1 e 2 de Processo de Poisson são equivalentes. Isto é, a definição implica a definição 2 e, reciprocamente, a definição 2 implica a definição 1.

A definição 2 será utilizada no estudo de cadeias de Markov em tempo contínuo, para cálculo da probabilidade do número de eventos em intervalo de amplitude infinitesimal. De (iii) e (iv), decorrem

$$P[N(t+dt) - N(t) \geq 2] = 0$$

$$P[N(t+dt) - N(t) = 1] = \lambda dt$$

3 _ 1ª Série de Problemas de Teoria de Filas

O restante da aula de hoje será dedicado à apresentação da 1ª Série de Problemas a respeito de Teoria de Filas e à resolução por vocês de algumas delas com a orientação dada nestas notas de aula.

Questão 3. Sejam X e Y duas variáveis aleatórias independentes: a primeira com distribuição exponencial de média $1/\lambda$ e a segunda com distribuição exponencial $1/\mu$. Determine a distribuição da variável aleatória $Z = \min\{X, Y\}$.

Além da sugestão: calcule $P[Z > z]$, é necessário definir que implicação o evento $Z > z$ tem sobre as variáveis X e Y, cujas distribuições são conhecidas.

Questão 5. Admita que, em um dado porto haja dois terminais: T_1 para navios porta-contêineres e T_2 para navios que transportam graneis líquidos. Admita, ainda, que os processos de chegada de navios a T_1 e T_2 sejam Poisson, com taxas λ_1 e λ_2, respectivamente.

ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA NAVAL E OCEÂNICA
PNV-3421 - Processos Estocásticos

1ª. Série de Problemas de Teoria de Filas - 2020

1) Calcular as médias da variável aleatória exponencial da variável aleatória geométrica. Calcular o desvio padrão da variável aleatória exponencial.

2) Mostrar que todo processo estocástico com incrementos independentes é um processo Markoviano.

3) Sejam X e Y duas variáveis aleatórias independentes: a primeira com distribuição exponencial de média $1/\lambda$ e a segunda com distribuição exponencial de média $1/\mu$. Determine a distribuição da variável aleatória $Z = \min \{X,Y\}$. **Sugestão:** calcule $P[Z>z]$.

4) Admita que X_1, X_2, X_3 e X_4 sejam variáveis aleatórias independentes com uma mesma distribuição uniforme entre 0 e T. Qual é a distribuição da variável aleatória $Y = \min \{X_1, X_2, X_3, X_4\}$?

5) Admita que, em um dado porto, haja dois terminais: T_1 para navios porta-contêineres e T_2 para navios que transportam graneis líquidos. Admita, ainda, que os processos de chegada de navios a T_1 e T_2 sejam Poisson, com taxas λ_1 e λ_2, respectivamente. Mostre que, se for examinada a chegada de navios ao porto, o processo é Poisson, com taxa $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2$. Mostre, também, que, se você estiver no porto esperando a chegada de navios, a probabilidade que o primeiro navio a chegar seja um porta-contêineres é igual a $\lambda_1/(\lambda_1 + \lambda_2)$.

6) Em um porto, há 3 terminais especializados: um para granéis líquidos, outro para fertilizantes e o terceiro para contêineres. As chegadas de navios a esses terminais são regidas por processos de Poisson, com taxas λ_1, λ_2 e λ_3 respectivamente.

a) Qual é a probabilidade de que, num dado dia, haja 2 chegadas ao terminal de granéis líquidos, 1 chegada ao terminal de fertilizantes e nenhuma chegada ao terminal de contêineres?
b) Qual é a probabilidade de que, num dado dia, a primeira chegada ocorra no terminal de contêineres?
c) Sabendo que o terminal de contêineres tem dois berços, cada um com atendimento exponencial de média $1/\mu_3$ e que, num dado instante, há apenas um navio nesse terminal, qual é a probabilidade de que o próximo navio a chegar ao terminal encontre os dois berços desocupados?

7) Em um porto há 2 terminais: um para granéis líquidos e outro para fertilizantes. A chegada de navios ao terminal de granéis líquidos ocorre de acordo com um processo de Poisson, com taxa λ_{gl} = 2 navios/dia; os intervalos entre chegadas consecutivas ao terminal de fertilizantes são variáveis aleatórias independentes com distribuição Erlang de ordem 3 e parâmetro λ_f = 4/h.

a) Caso você tenha chegado ao terminal de granéis líquidos em um instante qualquer, qual a probabilidade de ter que esperar mais de 8 horas para observar 3 chegadas de navios?

b) Caso você tenha chegado ao terminal de fertilizantes no instante da chegada de um navio, qual é a probabilidade de ter que esperar mais de 8 horas para observar a chegada do próximo navio?

8) Em uma estação ferroviária, os intervalos entre as passagens de trens são variáveis aleatórias independentes, com distribuição exponencial de média igual a 20 minutos.

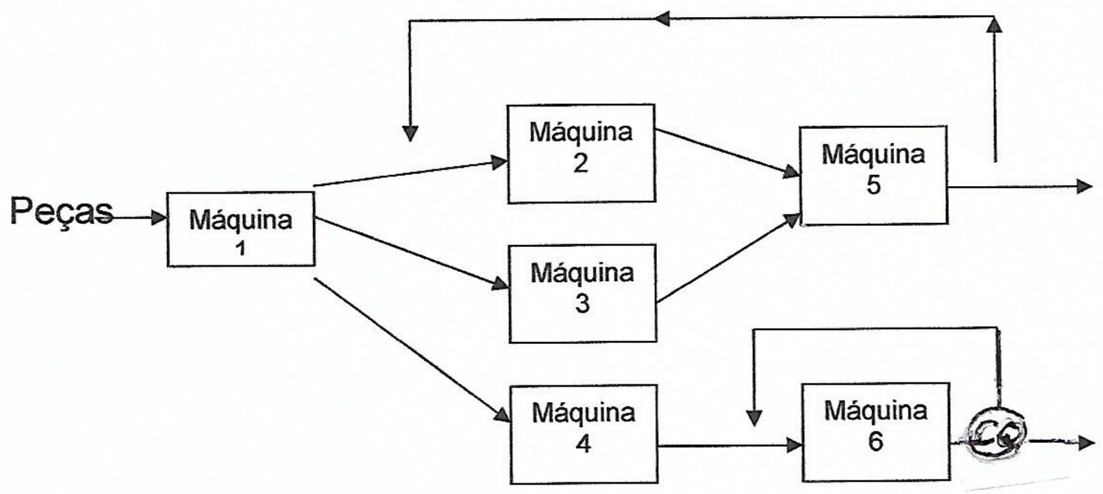
a) Tendo chegado à estação e consultado imediatamente outro usuário conhecido, você foi informado que ele, por questão de "fração de segundo", perdera o trem que passara há 10 minutos. Qual é a probabilidade de que você tenha que esperar mais que 20 minutos?

b) Se você apenas se interessou pela demora do trem 10 minutos depois de ter chegado à estação, qual é a probabilidade de que o seu tempo de espera seja maior que 20 minutos?

9) Considere a linha de produção mostrada na figura abaixo. Neste sistema de manufatura há um conjunto de máquinas que processam um único tipo de peça. O serviço em cada máquina é feito em ordem de chegada e não há restrição quanto ao tamanho da fila de espera. Existe a possibilidade de alguma peça requerer um novo processamento na máquina 6, por não ter sido aprovada no controle de qualidade. Admita que qualquer serviço executado na máquina 6 tenha a probabilidade de sucesso **p** e que o tempo de serviço seja uma variável aleatória exponencial com média $1/\lambda$.

a) Sabendo que uma peça acabou de ser processada na máquina 4, qual é a probabilidade de que o seu tempo total de processamento na máquina 6 seja menor ou igual a **T**? E se a peça estivesse vindo do controle de qualidade, qual seria a probabilidade de que o tempo adicional total de processamento ultrapasse o valor **T**?

b) Em cada um dos casos do item (a), qual é o tempo médio de processamento até a peça ser liberada?



c) Admita que p = 0,8 e 1/ λ = 30 minutos para o processamento na máquina 6; admita também que uma peça reprovada por 3 vezes no controle de qualidade, à saída da máquina 6, seja inutilizada. Qual é a fração de peças inutilizadas? Qual é o tempo total médio de processamento na máquina 6 para as peças aproveitadas?

10) Admita que a vida útil de um equipamento seja uma variável aleatória discreta que assume valores 1 e 9, com 50% de probabilidade cada um.

a) Qual é a vida média (vida esperada) do equipamento?
b) Sabendo que já houve um número muito grande de substituições de equipamentos por falha, qual será a média do tempo que você irá esperar até a próxima falha, se você começou a observar o processo num instante aleatório?

11) **Paradoxo do tempo de espera**. Admita que o processo de chegadas de navios porta-contêineres ao terminal T-37 em Santos seja Poisson, com taxa λ = 2/dia e que você chegue ao terminal num instante aleatório. Considere as duas argumentações apresentadas a seguir.

a) Como os intervalos entre chegadas consecutivas são variáveis exponenciais de média igual a 12 horas e como as variáveis exponenciais não têm memória, o tempo que você vai esperar até a próxima chegada também é exponencial, com média igual a 12 horas.
b) Como os intervalos entre chegadas consecutivas são variáveis exponenciais, de média igual a 12 horas, e como, numa entrada aleatória, você chegaria em média na metade do intervalo entre duas chegadas consecutivas, seu tempo médio de espera será de 6 horas.

Esclareça o paradoxo apresentado. **Sugestão:** Considere o ítem b) da questão 10 acima, para esclarecer o paradoxo.

12) Para uma fila M/M/1, com intervalos exponenciais de média $1/\lambda$, entre chegadas consecutivas, tempos de atendimento em regime estacionário:

i) a probabilidade de que um cliente, ao chegar, encontre o servidor ocioso é igual a $(1-\rho)$, sendo $\rho = \lambda/\mu$;
ii) a probabilidade de que um cliente, ao chegar, encontre n clientes no sistema é igual a $\rho^n.(1-\rho)$, para n = 1, 2, ...

Qual é a distribuição do tempo de permanência do cliente no sistema? Qual é o tempo médio de permanência no sistema?

13) Um serviço telefônico de reserva de passagens de uma empresa de transporte aéreo tem 6 atendentes em paralelo e pode manter até 4 clientes numa caixa de espera. O tempo de atendimento em cada posto é exponencial, com média igual a 5 minutos. Qual é a distribuição do tempo de espera do último cliente da fila quando ela está lotada?

14) Admita que os eventos de um dado processo ocorram de acordo com um processo de Poisson, de taxa λ , mas que nem todos consigam ser registrados. Mais precisamente, admita que a probabilidade de registro de qualquer evento do processo seja p. Mostre que o processo de contagem dos eventos registrados é Poisson, com taxa λp.

a) Mostre que, se for examinada a chegada de navios ao porto, o processo é Poisson, com taxa $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2$

Orientação

$\{N_1(t), t \geq 0\}$ chegada de navios a T_1, Poisson com taxa λ_1

$\{N_2(t), t \geq 0\}$ chegada de navios a T_2, Poisson com taxa λ_2

$\{N(t), t \geq 0\}$ – chegada de navios ao porto

$$N(t) = N_1(t) + N_2(t)$$

Calcule $P[N(t) = k]$

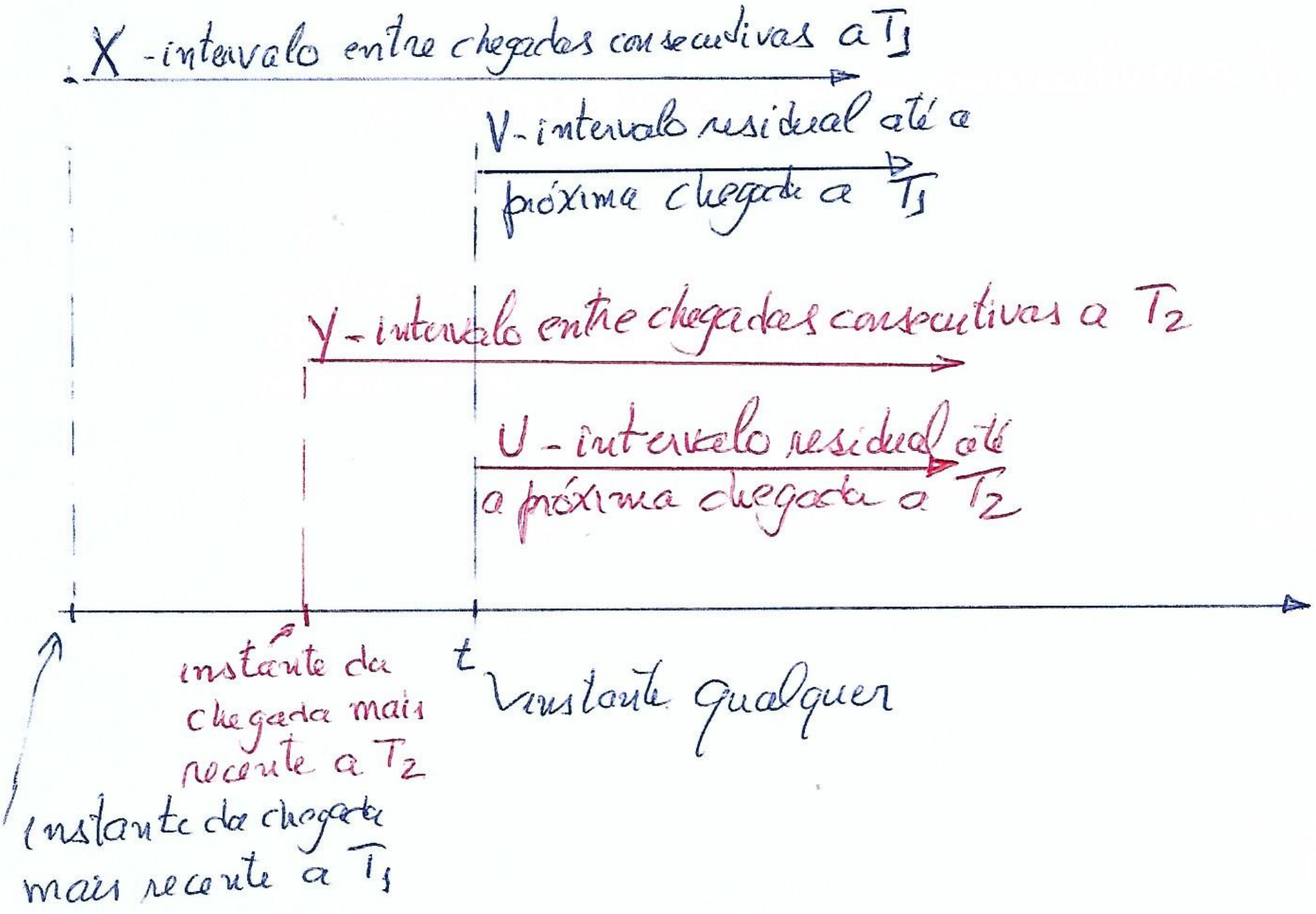
quais são os valores de $N_1(t)$ e $N_2(t)$ que implicam $N(t) = k$

Lembre-se (reveja) a expressão de $(a+b)^n$

b) Mostre, também, que, se você estiver no porto esperando a chegada de navios, a probabilidade que o primeiro navio a chegar seja um porta-conteineres é igual a $\lambda_1/(\lambda_1 + \lambda_2)$.

Orientação

Intervalos entre chegadas consecutivas ao terminal de contêineres (T_1) são variáveis aleatórias exponenciais, com média $1/\lambda_1$, que não têm memória. Analogamente, intervalos entre chegadas consecutivas ao terminal para granéis líquidos (T_2) são variáveis aleatórias exponenciais, com média $1/\lambda_2$, que não têm memória



Calcule $P[U > V]$

Questão 6 - Orientação

Para o item (b), utilize, em conjunto, os resultados da Questão 3 e Questão 5b

O item (c) é análogo a 5b

Questão 9 - Orientação

O item (b) já foi resolvido como segundo exemplo de problema envolvendo duas variáveis aleatórias. Revisitando, com nova notação

TTM6 - tempo total de processamento de uma peça na máquina 6

N - número de passagens da peça pela máquina 6

$$E[TTM6/N=n] = \frac{n}{\lambda}$$

$$E[TTM6] = \sum_{n=1}^{\infty} E[TTM6/N=n] \times P[N=n] =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\lambda} p(1-p)^{n-1} = \frac{p}{\lambda} \sum_{n=1}^{\infty} n q^{n-1}$$

$$= 1/\lambda p$$

Para resolver o item (a), calcule, inicialmente, a função densidade de probabilidade do tempo total de processamento de uma peça na máquina b, condicionada ao número aleatório N de passagens pela máquina. Se $N = n$, o tempo total de processamento na máquina b será uma soma de n exponenciais de média $1/\lambda$. Que distribuição tem tal variável? Faça, a seguir, como no item (b), eliminando a condicionalidade com relação à variável N.

Questão 12 Orientação

É uma questão análoga à 9a. Calcule a distribuição do tempo de permanência no sistema condicionada ao número de clientes encontrados ao chegar e, depois, elimine a condicionalidade