MAT134

2/2020 – Diurno

Revisão

CÔNICAS

Notas de Aula

Profa. Ana Paula Jahn

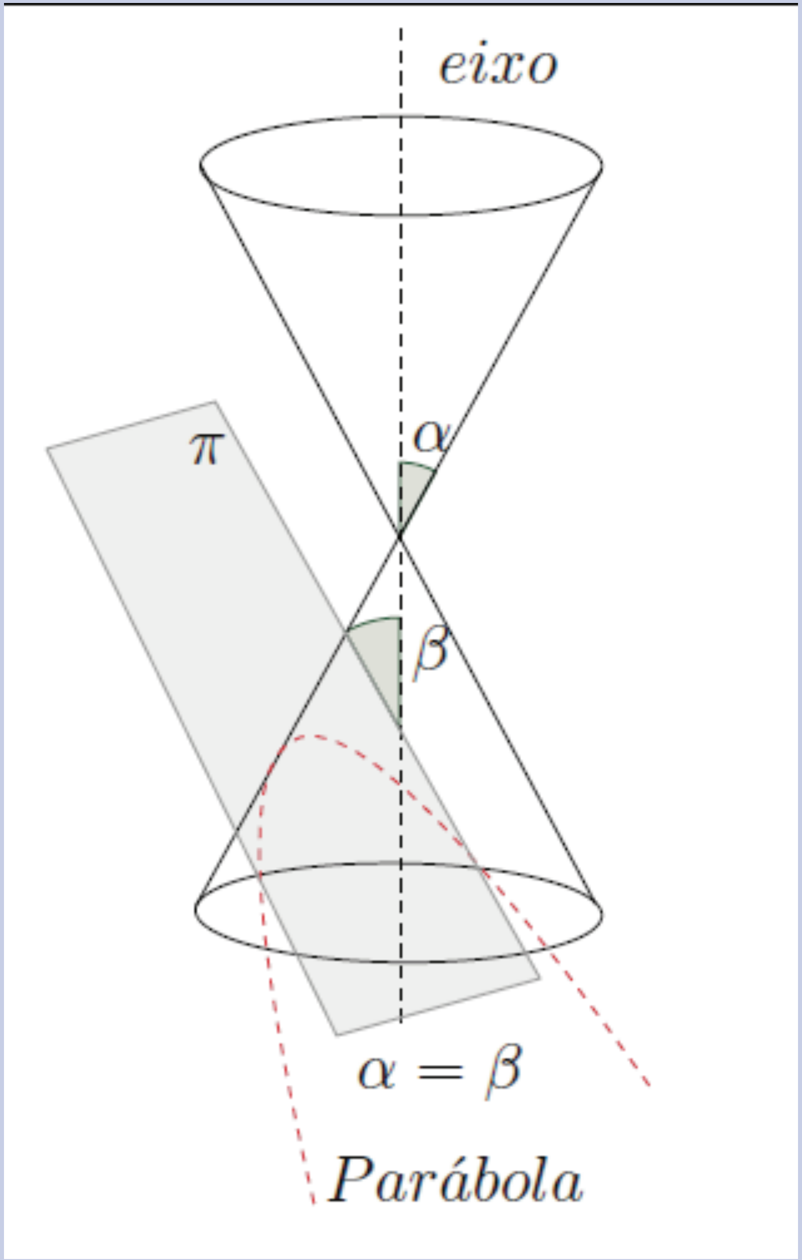
CÔNICAS

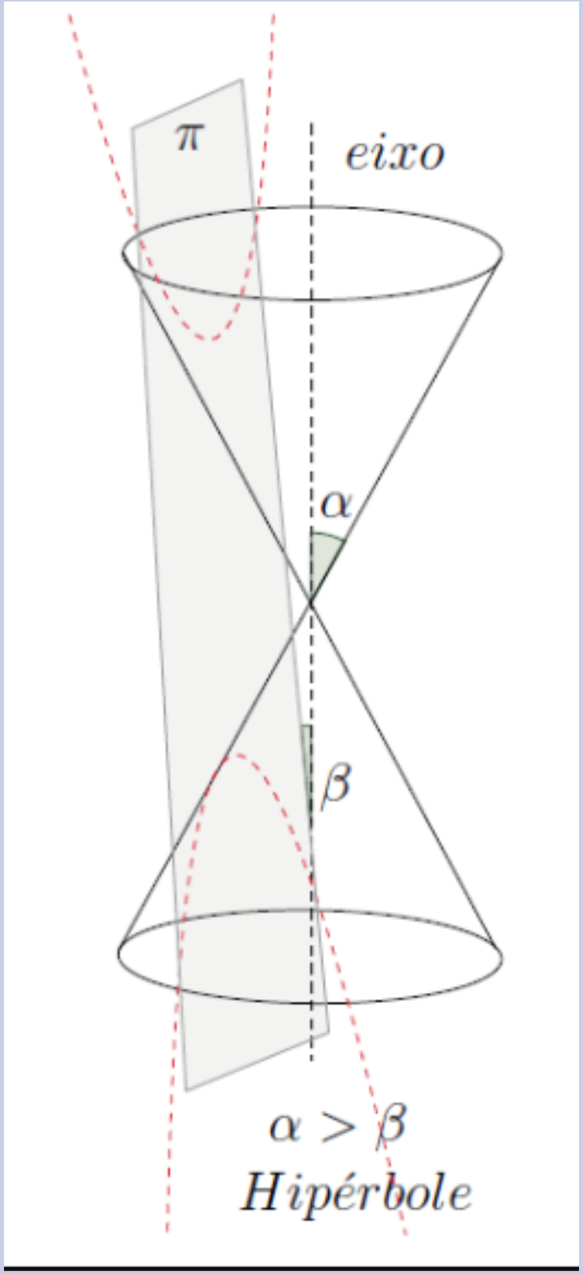
- Secções cônicas – ou simplesmente *cônicas* – são curvas planas obtidas da intersecção de um cone circular com um plano.

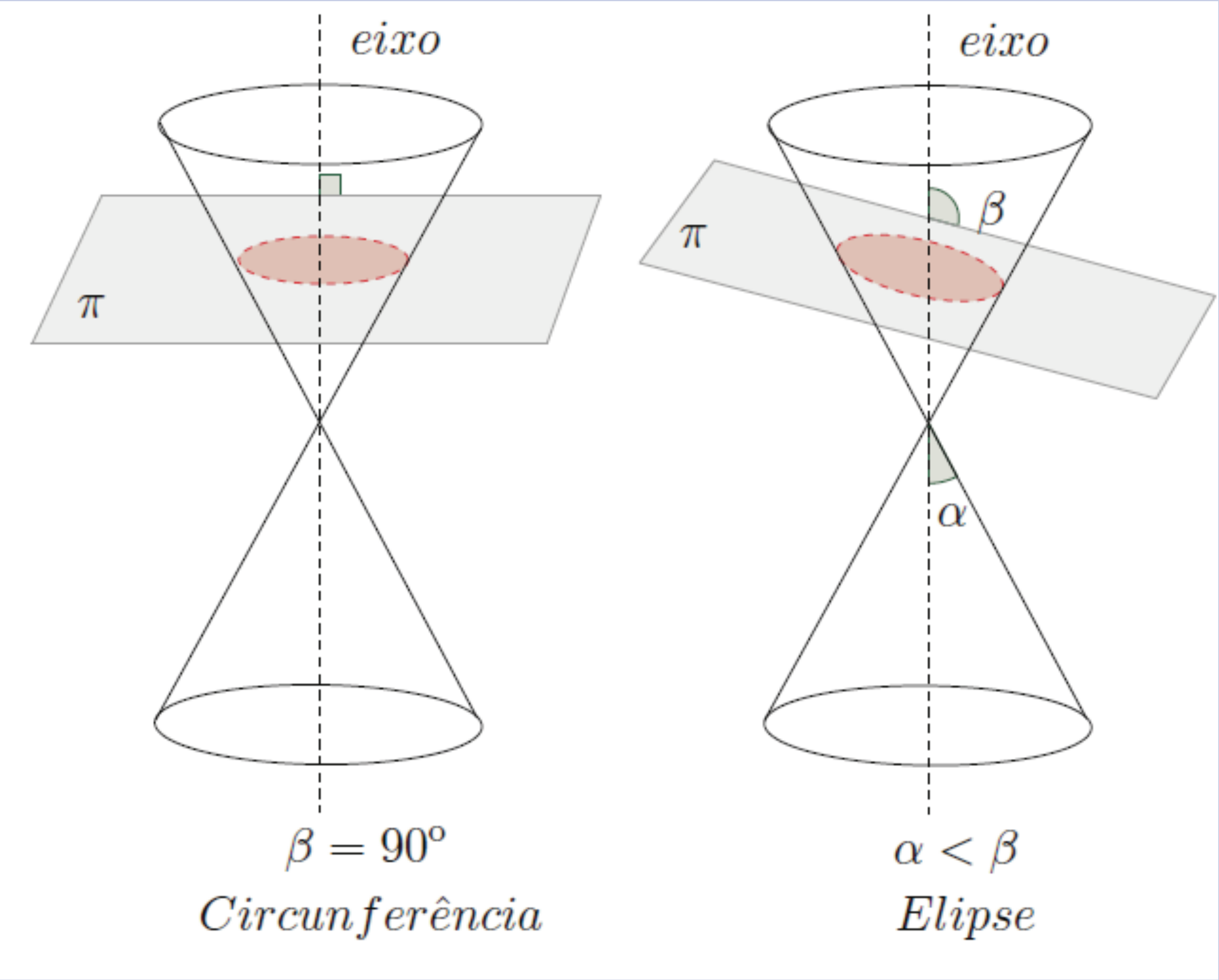
  – Cone circular "duplo" ou cone de duas folhas

https://www.geogebra.org/m/H2JtWSt6

https://www.atractor.pt/mat/conicas/conicas.html


eixo
π
α
β
α = β
Parábola


π
eixo
α
β
α > β
Hipérbole


eixo
π
eixo
β
π
α
$\beta = 90^o$
Circunferência
$\alpha < \beta$
Elipse

CÔNICAS

- Estudadas na Antiguidade grega
- Apolônio de Perga (262 a.C. – 190 a.C.)
  - Astrônomo e matemático grego
  - “As Cônicas” (8 livros)
- Olhar geométrico, no espaço
  - Curvas obtidas por intersecção de um cone por um plano

CÔNICAS

Em **G.A.**

- Ponto de vista algébrico
- Curvas planas, descritas por equações em um sistema de coordenadas cartesianas

- São definidas como **conjunto de pontos – lugares geométricos** – que satisfazem certas propriedades.
- E, depois, determinam-se as equações dessas cônicas na forma mais simples.
  - Chamadas de **equações reduzidas** das cônicas (com centro na origem e eixo maior sobre os eixos)
  - Com isso, a equação fica sem os termos lineares (em x e y) e sem o termo misto (em xy)

ELIPSE

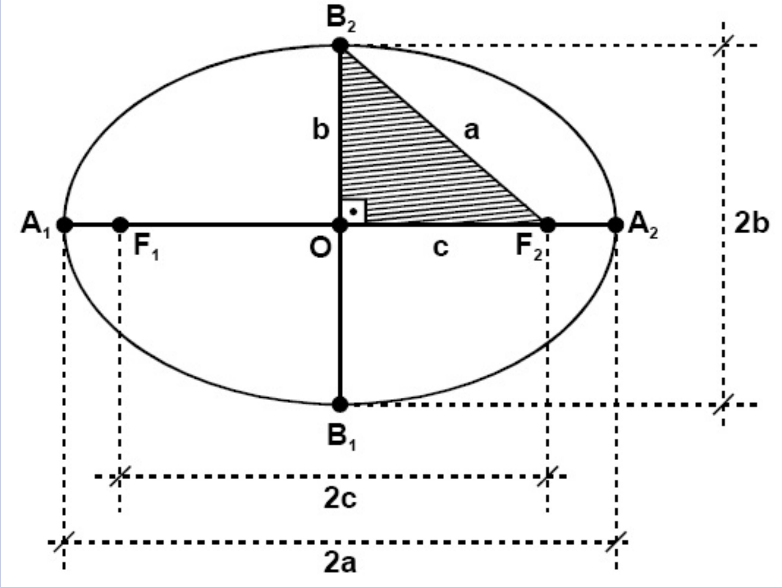
DEFINIÇÃO

- **Dados dois pontos F_1 e F_2 chamamos <u>elipse</u> o conjunto dos pontos P do plano tais que $d(P,F_1)+d(P,F_2) = 2a$.**

https://www.geogebra.org/m/xPMqK56j

Elementos da Elipse

- ***Focos***: são os pontos F_1 e F_2
- ***Distância Focal***: é a distância *2c* entre os focos
- ***Centro***: é o ponto médio *O* do segmento F_1F_2
- ***Vértices***: são os pontos A_1, A_2, B_1 e B_2,
- ***Eixo maior***: é o segmento A_1A_2 de comprimento *2a* (o segmento A_1A_2 contém os focos e os seus extremos pertencem a elipse)
- ***Eixo menor***: é o segmento B_1B_2 de comprimento *2b* (os segmentos B_1B_2 e A_1A_2 são perpendiculares no seu ponto médio).
- ***Excentricidade***: é o número e dado por $e=c/a$. Como $c<a$, temos $0<e<1$



https://www.geogebra.org/m/zs2WGmu2

Equação da Elipse com Centro na Origem e Eixo Maior sobre o eixo OX

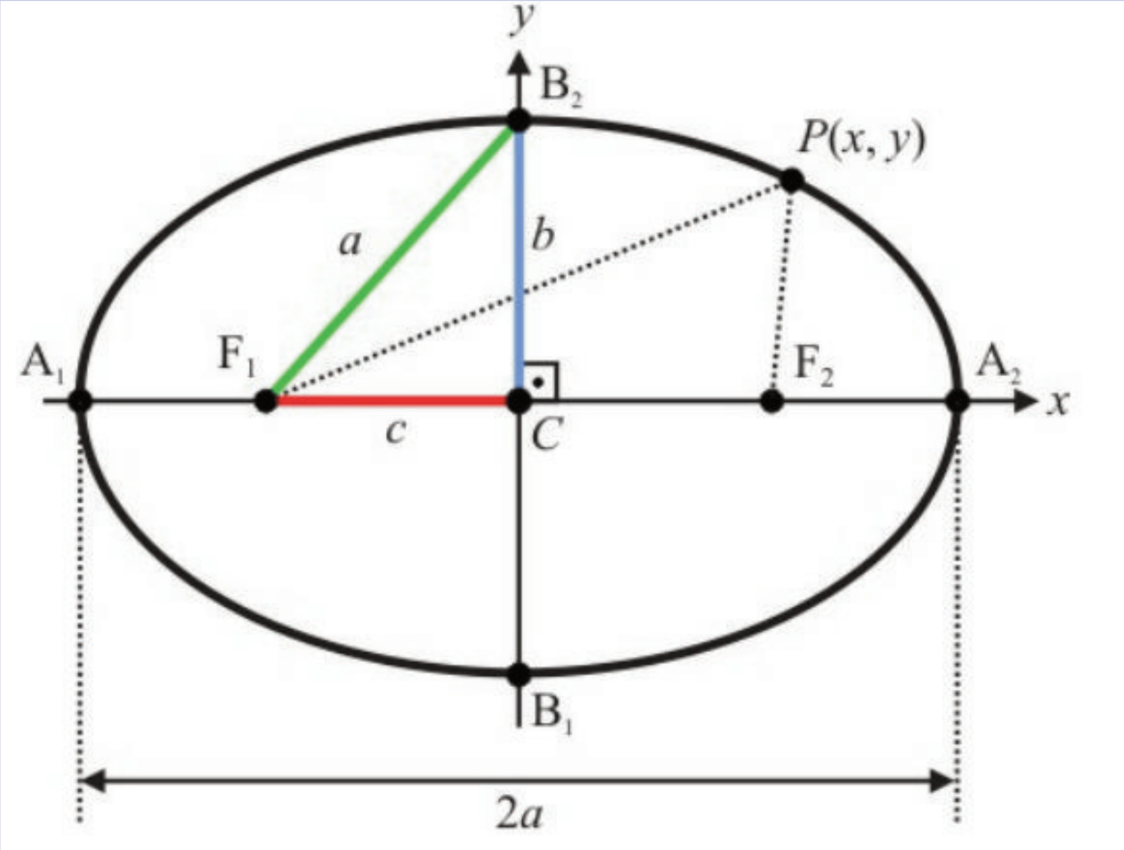
***Proposição 1*. (a)** A equação de uma **elipse** cujos focos são F1 = (-c, 0) e F2 = (c, 0) é

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Equação da Elipse com Centro na Origem e Eixo Maior sobre o eixo OX

$$d(P,F_1) = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}$$

$$d(P,F_2) = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$



$$\sqrt{(x+c)^2+(y-0)^2}+\sqrt{(x-c)^2+(y-0)^2}=2a$$

Transpondo o 2.º radical ao 2.º membro :

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}=2a-\sqrt{(x-c)^2+y^2}$$

Elevando ao quadrado e desenvolvendo os produtos notáveis:

$$(x+c)^2+y^2=4a^2-4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}+(x-c)^2+y^2$$

Isolando o radical:

$$4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}=4a^2-4cx$$

Dividindo por 4 e tornando a quadrar:

$$a^2(x^2-2cx+c^2+y^2)=a^4-2a^2cx+c^2x^2$$

$$\text{ou}\ \ (a^2-c^2)\,x^2+a^2y^2=a^2(a^2-c^2)$$

Mas pela relação notável $a^2-c^2=b^2$:

$$b^2x^2+c^2y^2=a^2b^2$$

Dividindo ambos os membros por a^2b^2 :

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1} \qquad \text{(eixo maior} \equiv \text{eixo x)}$$

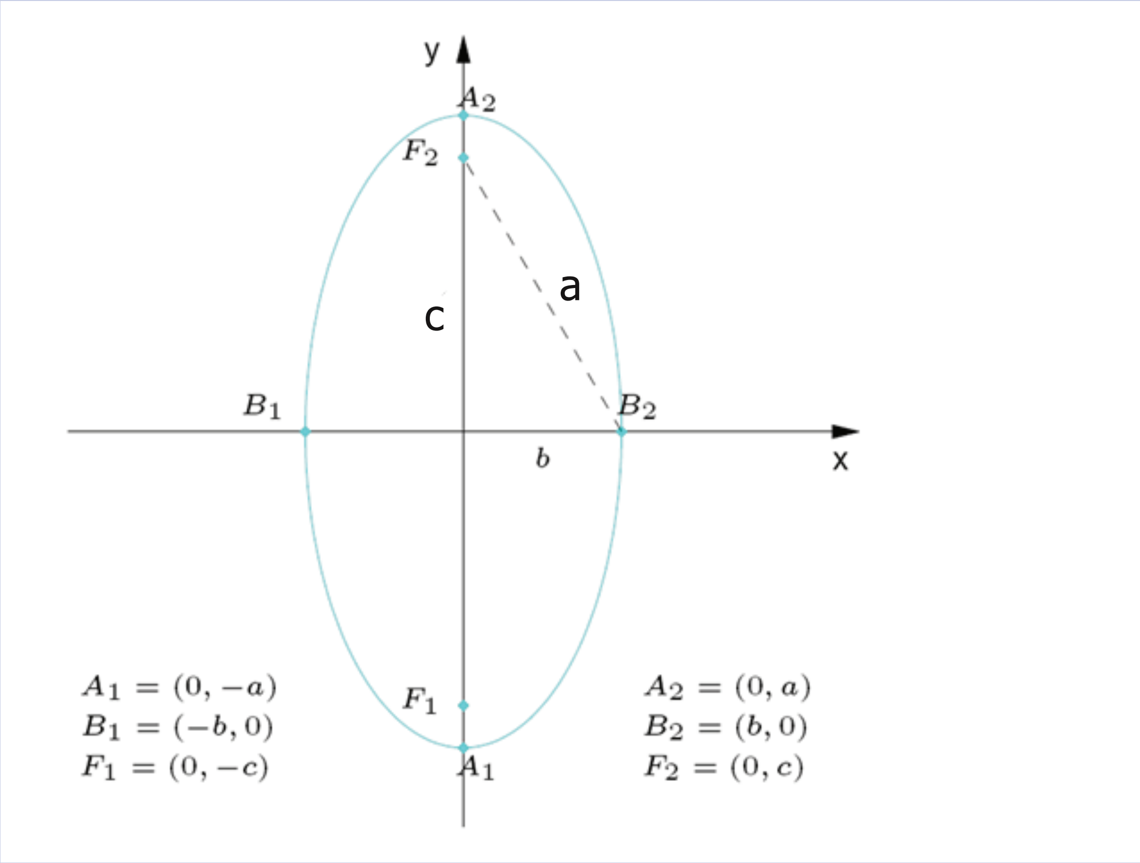
Equação da Elipse com Centro na Origem e Eixo Maior Sobre o Eixo dos y

- **Proposição 1.** (b) A equação de uma **elipse** cujos focos são F1 = (0, - c) e F2 = (0, c) é

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$$

Prova: Exercício

Equação da Elipse com Centro na Origem e Eixo maior sobre o eixo dos y:



Equação Reduzida da Elipse

- Eixo maior sobre o eixo dos x:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

- Eixo maior sobre o eixo dos y:

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$$

- Relação fundamental:

$$a^2 = b^2 + c^2$$

OBSERVAÇÕES

- Como $a^2 = b^2 + c^2$ temos que $a^2 > b^2 \Rightarrow a > b$

- Então, sempre o maior dos denominadores da equação reduzida representa o número a^2 onde *a* é a medida do semi-eixo maior.

- Se na equação da elipse o número a^2 é denominador de x^2, a elipse tem seu eixo maior sobre o eixo *OX*. Se é denominador de y^2, a elipse tem seu eixo maior sobre *OY*.

EXERCÍCIOS

1) Uma elipse *E* tem seu centro na origem e um de seus vértices sobre a reta focal é (0,7). Se a elipse passa pelo ponto ($\sqrt{5}$, 14/3), determine sua equação, seus vértices, seus focos e sua excentricidade. Faça, também, um esboço da elipse.

2) Determine a equação da elipse que tem centro C=(0,0), um foco F=(3/4,0) e um vértice A=(1,0).

APLICAÇÕES

A figura mostra os planetas girando em torno do Sol.
Foi o astrônomo e matemático Johannes Kepler (1571-1630) que formulou 3 leis que regem o movimento planetário.
Uma delas diz que um planeta gira em torno do Sol em uma órbita elíptica, com o Sol em um dos focos.

APLICAÇÕES

No caso da Terra os semi-eixos são
a =153.493.000 *km* e b =153.454.000 *km*. Donde podemos obter a excentricidade da órbita da Terra.

Pesquise sobre o assunto e obtenha o valor aproximado da excentricidade da órbita da Terra.

APLICAÇÕES

Arcos em forma de semi-elipses são muito empregados Na construção de pontes de concreto e de pedras, desde os antigos romanos.

APLICAÇÕES

Engenharia elétrica: conjuntos de elipses homofocais (elipses de mesmos focos) são utilizadas na teoria de correntes elétricas estacionárias.

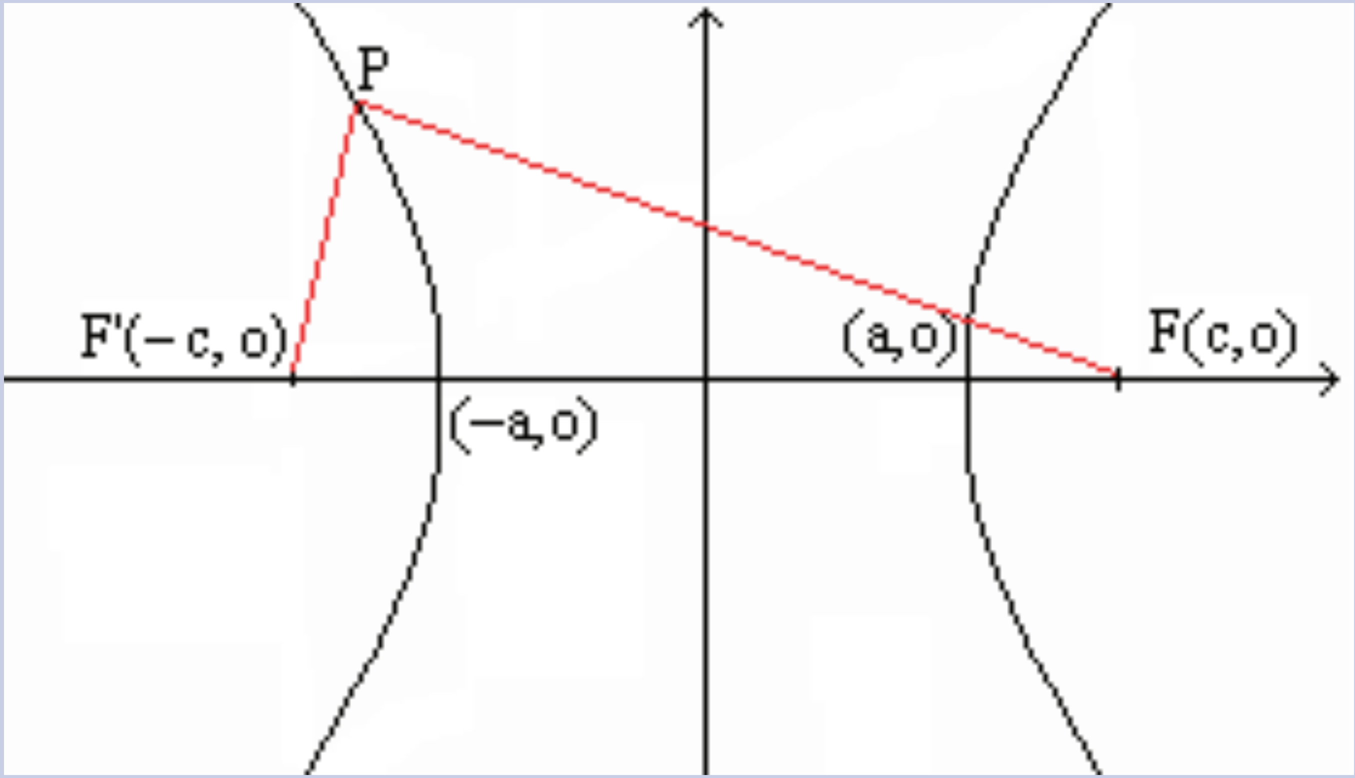
Engenharia mecânica: são usadas engrenagens elípticas (excêntricos).

HIPÉRBOLE

DEFINIÇÃO

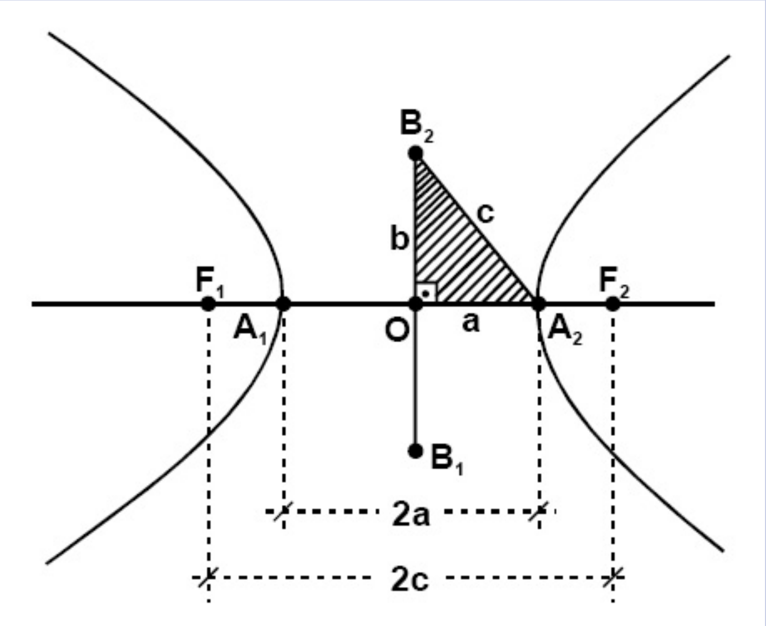
- Dados dois pontos F_1 e F_2 chamamos <u>hipérbole</u> o conjunto dos pontos P do plano tais que

  $|d(P,F_1) - d(P,F_2)|=2a$ $(0<2a<2c,\ 2c= d(F_1,F_2))$.



Elementos da Hipérbole

- *Focos:* são os pontos F_1 e F_2
- *Distância Focal:* é a distância *2c* entre os focos,
- *Centro:* é o ponto médio *C* do segmento F_1F_2,
- *Vértices:* são os pontos A_1 e A_2
- *Eixo Real ou transverso:* é o segmento A_1A_2 de comprimento *2a,*
- *Eixo imaginário ou conjugado:* é o segmento B_1B_2 de comprimento *2b,*
- *Excentricidade:* é o número *e* dado por *e=c/a. Como c>a, temos e>1.*



$$c^2 = a^2 + b^2$$

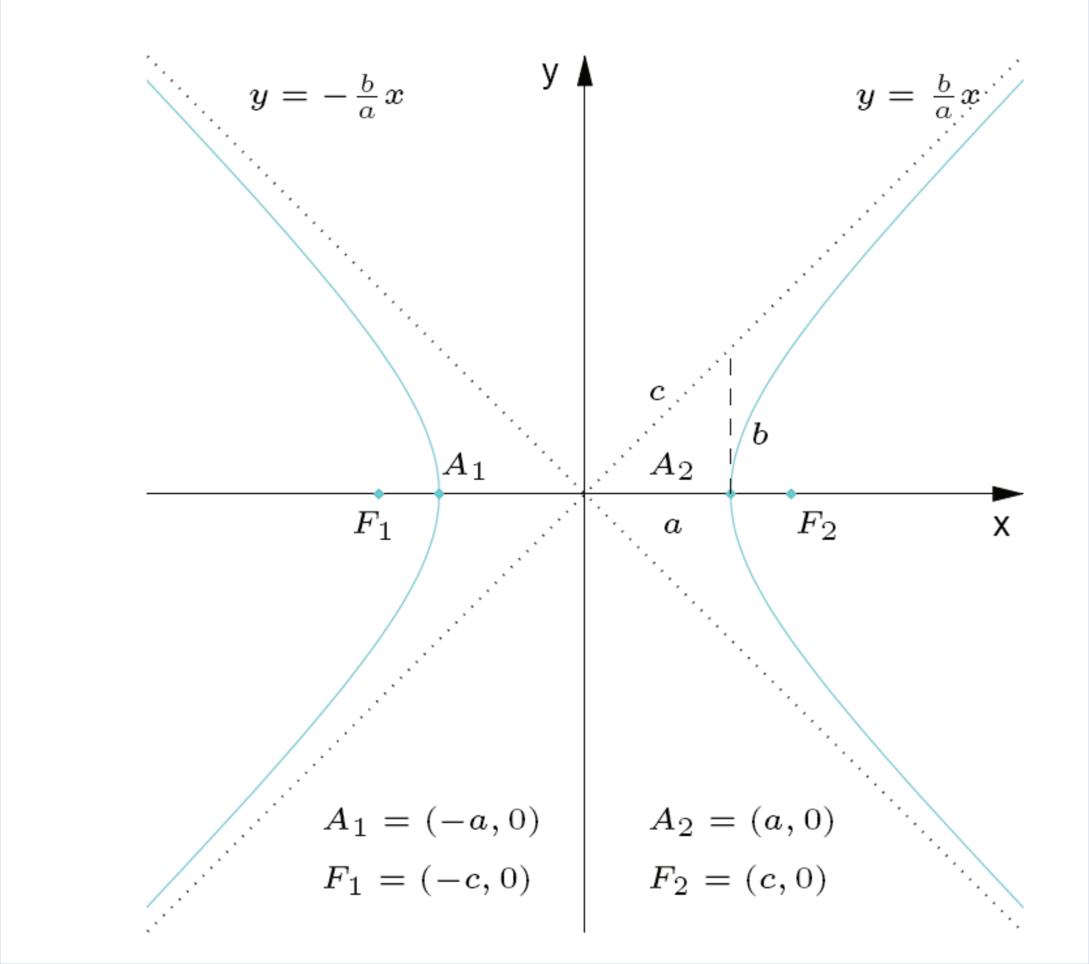
Equação da Hipérbole com Centro na Origem e Eixo Real sobre o eixo dos x:

- **Proposição 1.** (a) A equação de uma **Hipérbole** cujos focos são F1 = (-c, 0) e F2 = (c, 0) é

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Prova: Exercício.

Equação da Hipérbole com Centro na Origem e Eixo Real sobre o eixo dos x:



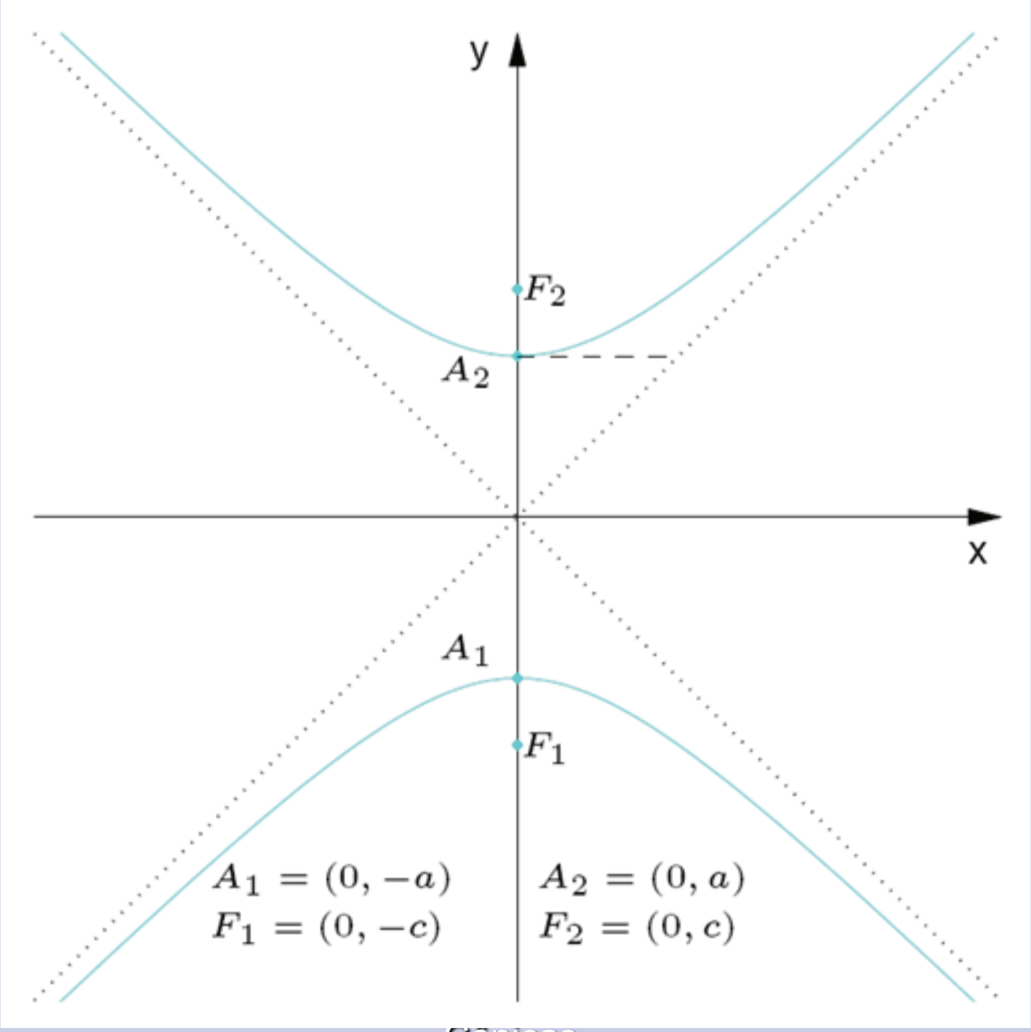
Equação da Hipérbole com Centro na Origem e Eixo Real sobre o eixo dos y:

- Proposição 1. (b) A equação de uma hipérbole cujos focos são F1 = (0, -c) e F2 = (0, c) é

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$$

Prova: Exercício.

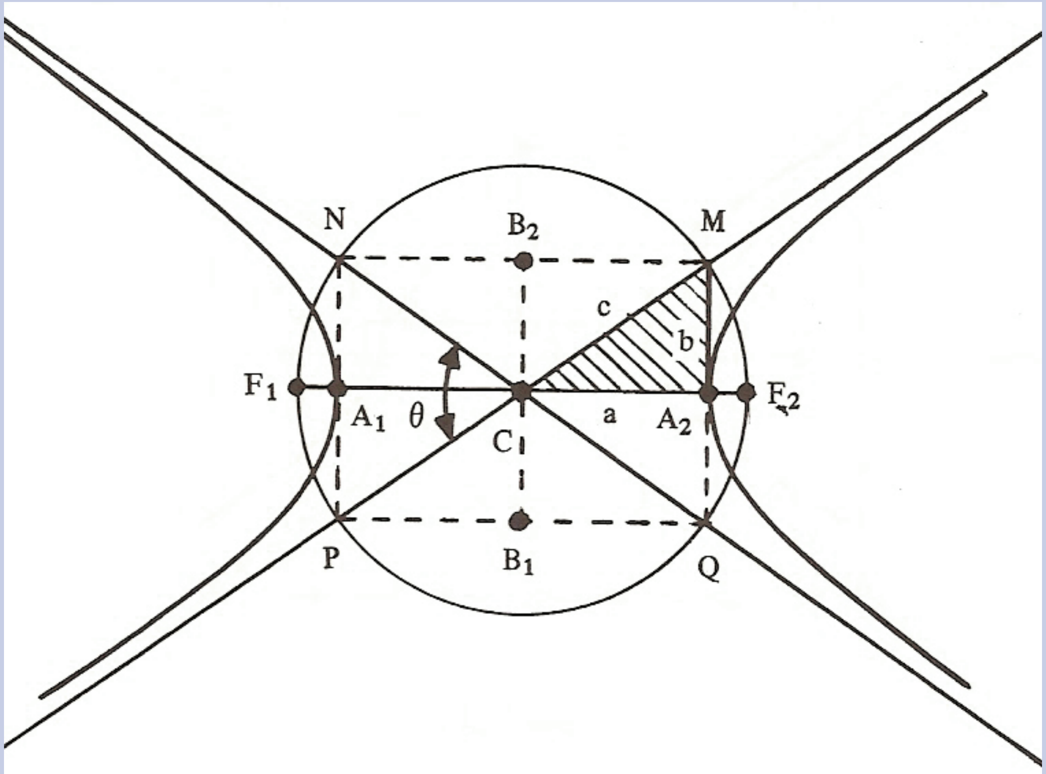
Equação da Hipérbole com Centro na Origem e Eixo Real sobre o eixo dos y:



Assíntotas

- As retas $y = \pm \frac{b}{a} x$ são chamadas assíntotas da hipérbole.

Exercício: justificar



- São retas das quais a hipérbole se aproxima cada vez mais à medida que os pontos se afastam dos focos.

EXERCÍCIOS

1. Determinar na hipérbole $9\mathbf{x}^2 - 7\mathbf{y}^2 - 63 = 0$

a) a medida dos semi-eixos

b) os vértices

c) os focos

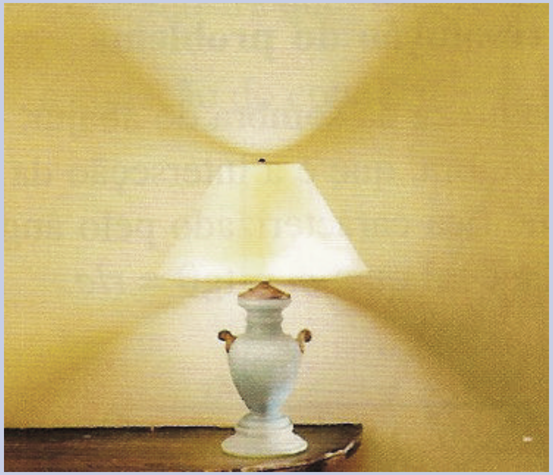
d) a excentricidade

e) as equações das assíntotas

f) um esboço gráfico no papel e lápis e depois a representação no Geogebra.

2. O mesmo para a hipérbole: $\frac{\mathbf{y}^2}{100} - \frac{\mathbf{x}^2}{64} = 1$

APLICAÇÕES



- Recentemente, **experimentos físicos** mostraram que partículas carregadas atiradas em núcleos de átomos se espalham ao longo de trajetórias hiperbólicas.
- Em **Mecânica dos Fluidos** e em alguns problemas referentes ao fluxo estacionário de eletricidade são utilizadas hipérboles homofocais (de mesmo foco).

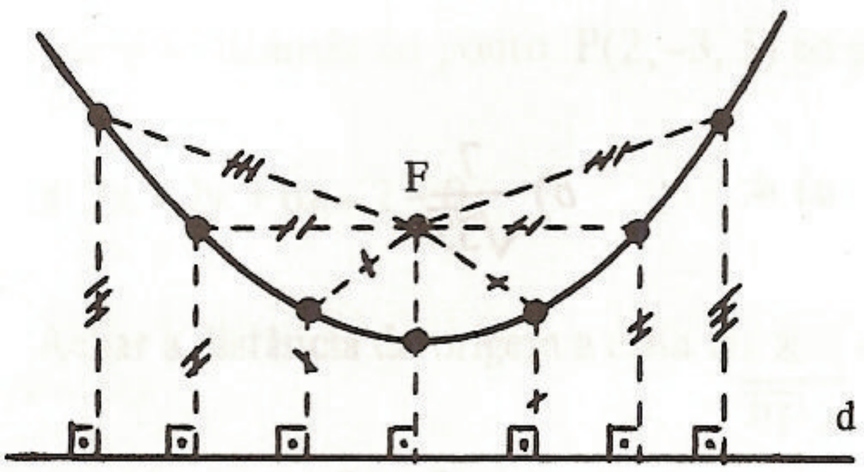
APLICAÇÕES

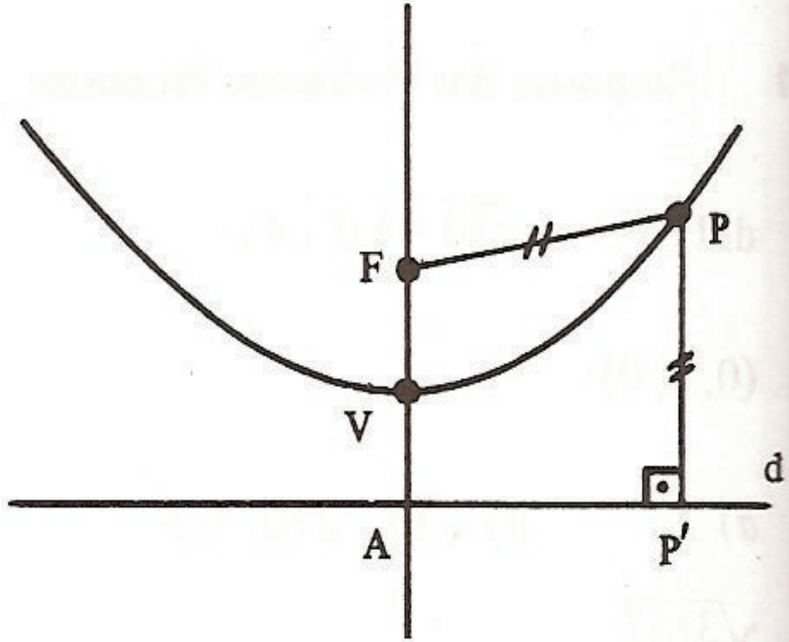
- O Sistema LORAN (long range navigation) e o sistema DECCA de navegação aérea usam hipérboleS.
- Igualmente na **navegação marítima** utilizam-se sistemas hiperbólicos: O sistema RADUX (de baixíssima frequência) e o sistema LORAC (de ondas contínuas para observações de grande precisão).

PARÁBOLA

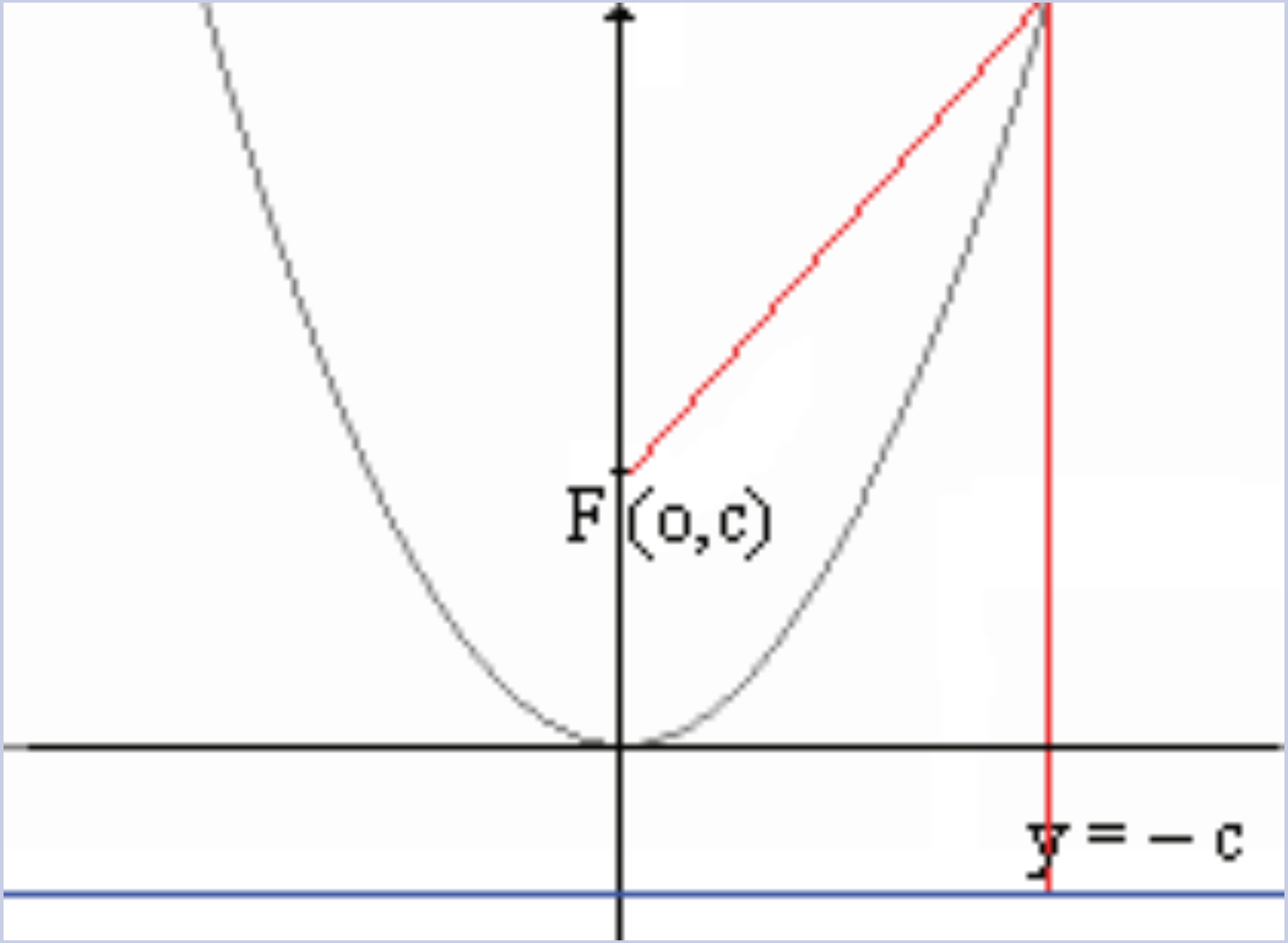
Parábola

- Dados um ponto F e uma reta *d*, com $F \notin d$, seja p = d(F,*d*). Chamamos <u>parábola</u> o conjunto dos pontos P do plano que são equidistantes de F e *d*, i. é., d(P,F)= d(P,*d*).





Parábola

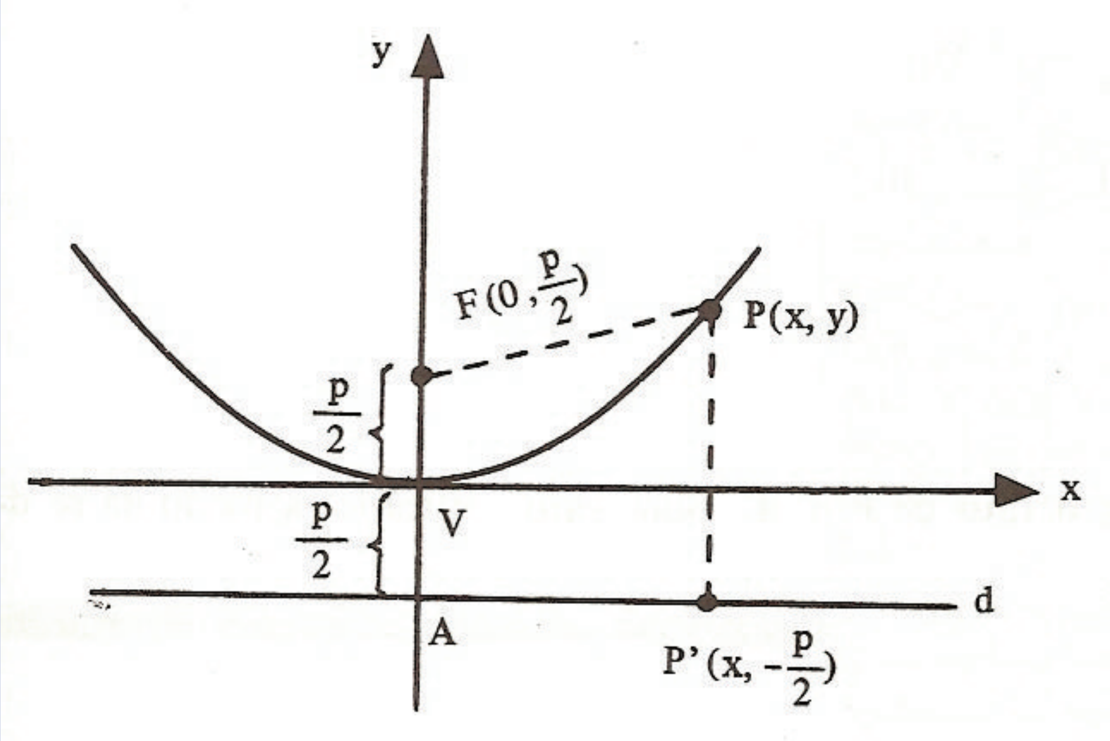


Elementos da Parábola

- *Foco:* é o ponto F
- *Diretriz:* é a reta *d*
- *Eixo:* é a reta que passa pelo foco e é perpendicular à diretriz
- *Vértice*: é o ponto V de interseção da parábola com seu eixo
- d(V,F)=d(V,d)

Equação Reduzida da Parábola

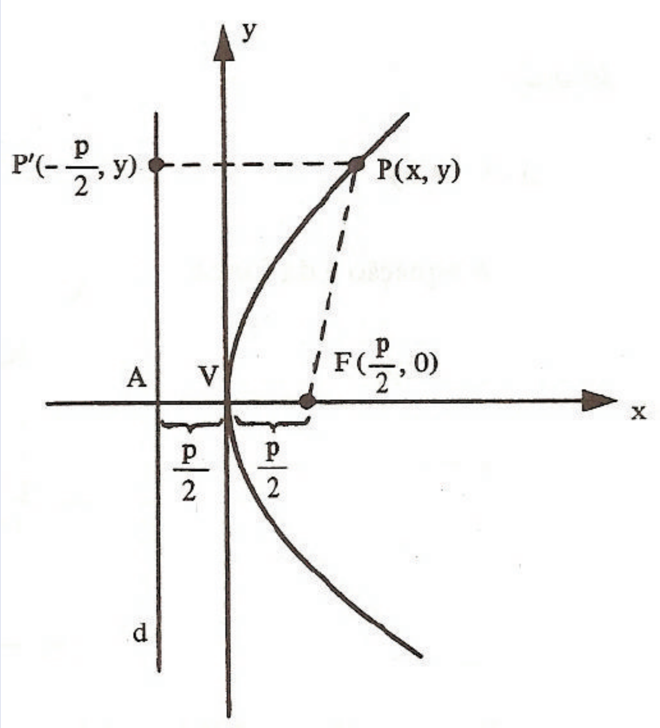
- O eixo da parábola é o eixo dos y: $$x^2 = 2py$$



- Se p>0 a parábola tem concavidade voltada para cima e se p<0 a parábola tem concavidade voltada para baixo.

Equação Reduzida da Parábola

- O eixo da parábola é o eixo dos x: $y^2 = 2px$



- Se p>0 a parábola tem concavidade voltada para a direita e se p<0 a parábola tem concavidade voltada para a esquerda.

Exercícios

1. Achar as coordenadas do foco e a equação da diretriz das parábolas:

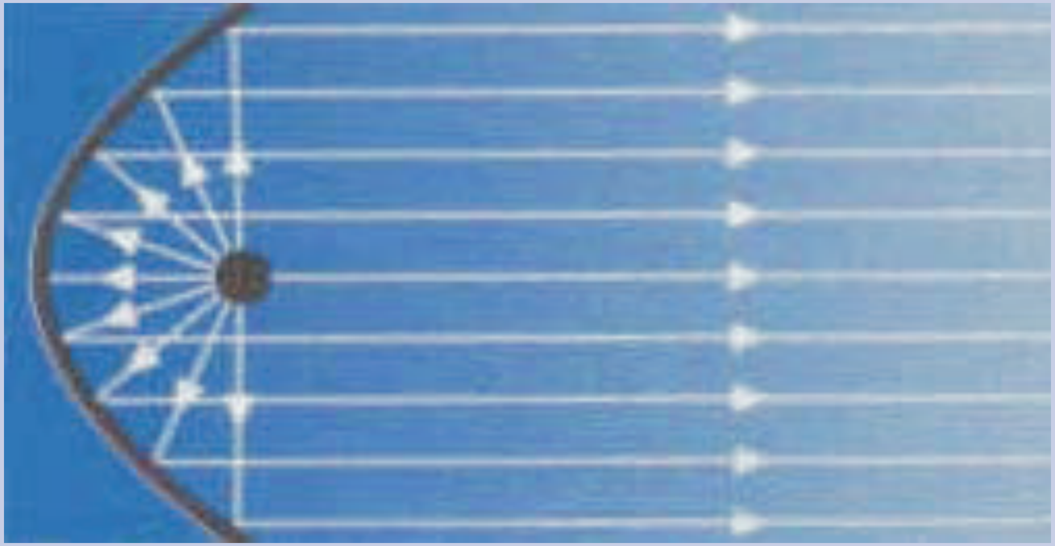
$$y^2 = -8x \qquad \text{e} \qquad x^2 = 8y$$

2. Determine a equação da parábola sabendo que:

Vértice V=(0,0), passa pelo ponto P=(-2,5) e concavidade voltada para cima.

APLICAÇÕES

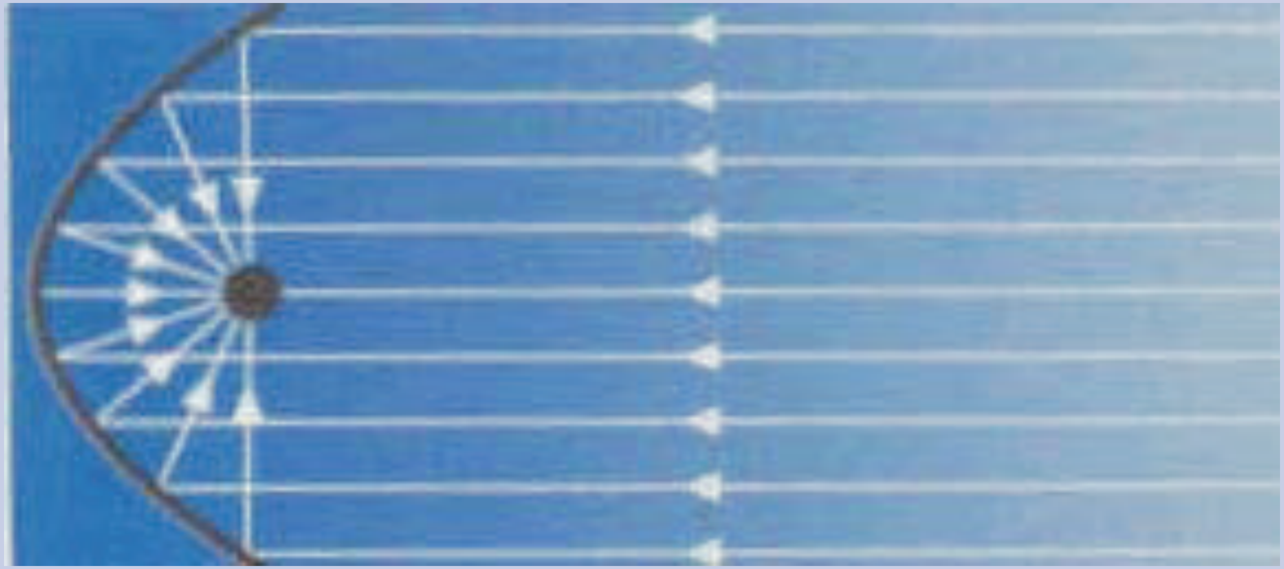
- (a) A secção de um **farol de automóvel** tem o formato de uma parábola (a superfície espelhada é um parabolóide). A lâmpada situada no foco, quando acesa, emite raios luminosos que após incidirem sobre a parábola serão refletidos numa mesma direção segundo retas paralelas ao eixo da parábola.



APLICAÇÕES

- (b) Se um **espelho parabólico** é apontado para o Sol, os raios da luz (paralelos ao eixo da parábola) serão refletidos para o mesmo ponto (foco). Pela grande quantidade de calor produzido nesta fonte, procede o nome <u>foco</u> (em latim focus significa fogo).
- Aplica-se o mesmo princípio na construção de **espelhos para telescópios**, antenas de radar e antenas parabólicas (as ondas paralelas ao eixo da parábola, se refletem na antena e confluem para o retransmissor).

APLICAÇÕES



- (c) Em balística, quando se lança um projétil sobre o qual atua somente a força da gravidade, a trajetória é uma parábola.

- **Equação Geral do 2º Grau**

De modo geral, uma cônica em IR é um conjunto de pontos cujas coordenadas, em relação à bae canônica, satisfazem a equação geral:

$$Ax^2 + By^2 + Cxy + Dx + Ey + F = 0$$

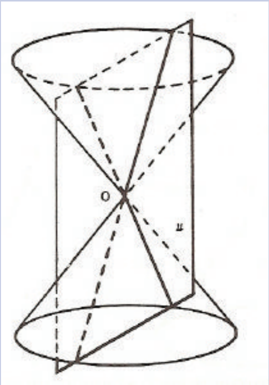
(com A ou B ou C diferente de zero)

Dada uma equação na forma geral, estamos interessados em classificar qual é o tipo de cônica de modo a facilitar seu estudo e representação gráfica.

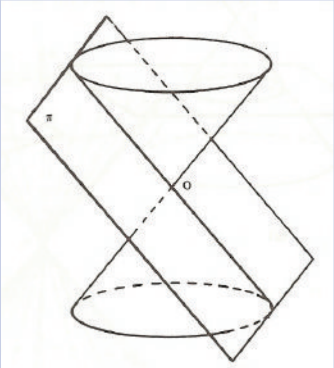
Equação Geral do 2º Grau

Podendo ser:

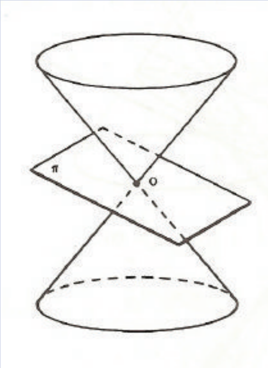
1. Uma elipse (ou circunferência, caso particular)
2. Uma hipérbole
3. Uma parábola
4. Um par de retas
5. Uma única reta
6. Um ponto
7. Conjunto vazio



(4)



(5)



(6)

De 1 a 3 chamamos *Cônicas* e de 4 a 6 *Cônicas degeneradas*.

- **Equação Geral do 2º Grau**

As equações das cônicas representadas até aqui estão na **forma reduzida**, onde C=0; se A não nulo, então D=0 e se B não nulo, E=0.

Veremos que é possível, por meio de uma mudança de sistema de coordenadas conveniente, transformar a equação geral de uma cônica na forma reduzida.

Para isso, utilizaremos conceitos e ferramentas da Álgebra Linear...

Não perca os próximos capítulos! :=)