

# Sinais Aleatórios

## Contínuos no Tempo

# Introdução

## ❖ Sabe-se que:

- O comportamento dos fenômenos físicos não é previsível.
- O conhecimento de um sinal (fenômeno físico) em um dado instante de tempo não é suficiente para determiná-lo em outro instante.
- As suas variações são complexas.
- Existem incertezas a respeito do seu comportamento.
- **Tais sinais são chamados de sinais aleatórios.**
  - Suas flutuações são complexas, aleatórias, isto é, imprevisíveis.
  - Eles são caracterizados em termos estatísticos: média, variância, função densidade de probabilidade, função de auto correlação, densidade espectral de potência, ...

## Sinais multicanais ou multidimensionais

❖ O método usado no processamento de um sinal ou na análise da resposta de um sinal depende fortemente dos atributos específicos do sinal. Assim, é importante que os sinais sejam classificados segundo suas aplicações específicas.

❖ Um sinal é descrito como uma função de uma ou mais variáveis independentes. O valor da função (i.e. a variável dependente) pode ser uma quantidade escalar de valor real, ou complexa ou um vetor.

Ex.:  $s_1(t) = A \operatorname{sen}(3\pi t)$  é um sinal com valor real, porém, o sinal  $s_2(t) = A e^{j3\pi t}$  é um sinal com valor complexo.

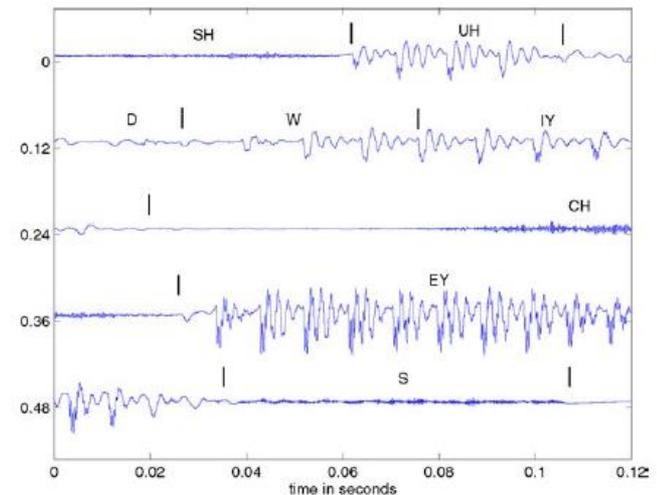
❖ Em algumas aplicações, os sinais podem ser gerados por múltiplas fontes ou múltiplos sensores. Tais sinais podem ser representados sob a forma vetorial e são conhecidos como 'multicanais' ou 'multidimensionais'.

# Sinais Contínuos no Tempo

- ❖ Os sinais podem ser classificados segundo as características da variável (independente) tempo e dos valores que ela assume.
- ❖ Sinais contínuos, ou analógicos, são definidos para qualquer valor de tempo e assumem valores no intervalo contínuo (a, b), onde 'a' pode ser  $-\infty$  e b pode ser  $\infty$ . Matematicamente estes sinais podem ser descritos como funções de uma variável contínua.
- Formas de onda da voz humana (figura), bem como sinais do tipo:

$$x_1(t) = \cos \pi t \quad x_2(t) = e^{-|t|} \quad -\infty < t < \infty$$

são exemplos de sinais analógicos



## Sinais Discretos no Tempo

- ❖ Sinais discretos no tempo são definidos apenas em intervalos específicos. Na prática, estes intervalos são iguais. Ex.:

$$x(t_n) = e^{-|t_n|}, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

o índice 'n' dos instantes de tempo é a variável independente e o valor do sinal se torna uma função de uma variável inteira (i.e. uma sequência de números). Um sinal discreto no tempo pode ser representado por uma sequência de números reais ou complexos.

- ❖ Para enfatizar a natureza discreta de um sinal, podemos denotá-lo por  $x(n)$  ao invés de  $x(t)$ .
- ❖ Sinais discretos no tempo podem aparecer:
  - Pela seleção dos valores de um sinal analógico em instantes de tempo discretos. Este processo é chamado de amostragem
  - Pelo acúmulo de uma variável num período de tempo. Por ex., número de carros cruzando uma rua a cada hora.

## Sinais com valores contínuos e discretos

- ❖ Os valores de um sinal contínuo ou discreto no tempo podem ser contínuos ou discretos.
- ❖ Um sinal discreto no tempo tendo uma série de valores discretos é chamado de sinal digital.
- ❖ Para um sinal ser processado digitalmente, ele deve ser discreto no tempo e seus valores têm que ser discretos.
- ❖ Se o sinal a ser processado é analógico, ele deve ser convertido para o formato digital através da amostragem do sinal analógico em intervalos discretos de tempo, obtendo-se um sinal discreto no tempo. Em seguida, seus valores são quantizados para uma série de valores discretos. Este processo é conhecido por quantização.

## Frequência em sinais contínuos e discretos no tempo

- ❖ A frequência é relacionada a uma oscilação harmônica periódica descrita por funções senoidais
- ❖ O conceito de frequência está inversamente relacionado ao conceito do tempo, portanto, a natureza do tempo (contínuo ou discreto) afeta a natureza da frequência de acordo.

- ❖ Sinais contínuos no tempo:

$$x_a(t) = A \cos(\omega t + \theta) \quad -\infty < t < \infty$$

este sinal é perfeitamente caracterizado por 3 parâmetros: a amplitude, a velocidade angular (em rad/s) e a fase (rad). A velocidade angular é função da frequência:  $2\pi f$

- ❖ Sinais discretos no tempo

$$x_a(t) = A \cos(\omega n + \theta) \quad -\infty < n < \infty$$

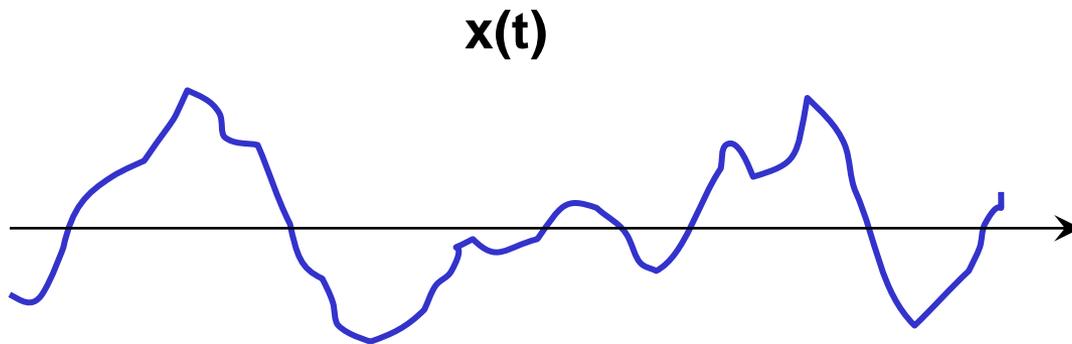
onde  $n$  é uma variável inteira (número de amostras).

## Sinais determinísticos e aleatórios

- ❖ O processamento e análise matemática de sinais requerem a disponibilidade de uma descrição matemática do sinal, normalmente chamada de modelagem do sinal, o que leva a outra classificação importante dos sinais.
- ❖ Qualquer sinal que possa ser descrita por uma expressão matemática explícita única é chamado de determinístico. Este termo é usado para enfatizar que o fato de que todos os valores passados, presentes e futuros do sinal podem ser conhecidos precisamente, sem grau de incerteza.
- ❖ Em muitas aplicações práticas não é possível descrever os sinais com um grau de precisão através de fórmulas matemáticas. Ou então, a descrição é tão complicada que seu uso não é prático. Estes sinais, com características de imprevisibilidade, são os aleatórios.
- ❖ A base matemática para a análise teórica dos sinais aleatórios vem da teoria da probabilidade e processos estocásticos.

## exemplos de sinais aleatórios

- ❖ A temperatura ou pressão do ar varia aleatoriamente em função do tempo.
- ❖ A tensão de ruído térmico em resistores e dispositivos eletrônicos.
- ❖ Dados enviados através de um canal de comunicação.
- ❖ Sinais de informação.
  - Tais sinais são formalmente modelados como de duração infinita e energia infinita e não apresentam uma descrição analítica, pois suas variações são aleatórias.

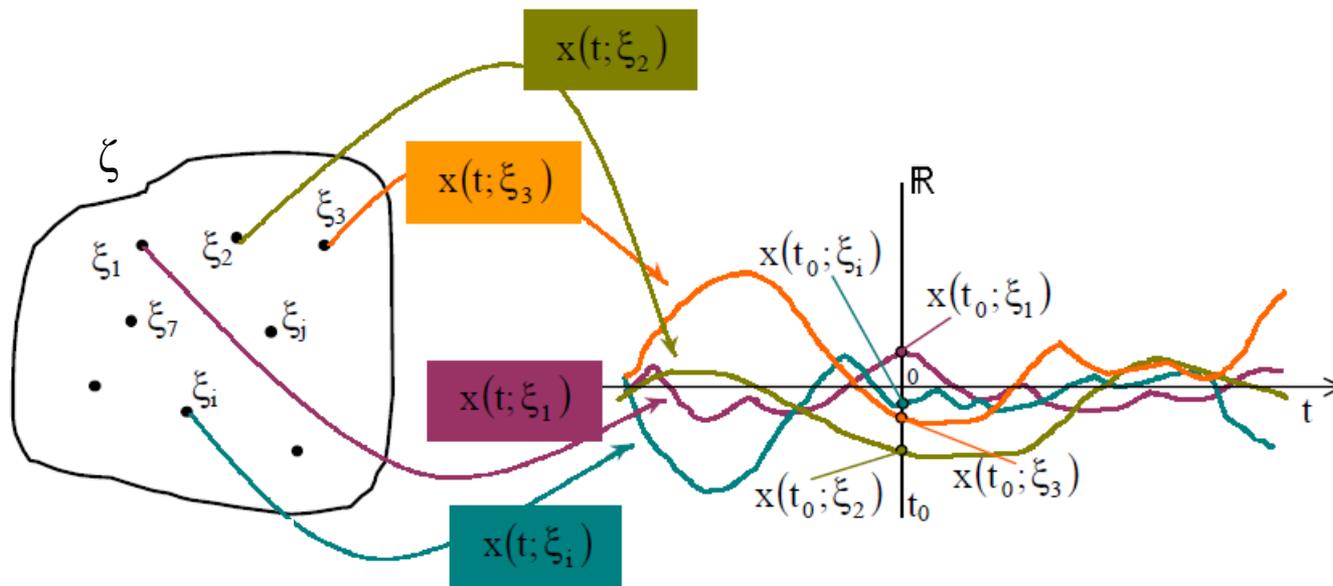


## Definição de um processo aleatório

- ❖ Suponha que são medidas as tensões de ruído em uma série de resistores.
  - Neste caso poder-se-ia observar que:
    - As formas de ondas obtidas são diferentes uma das outras.
    - Não é possível representar os sinais por funções.
    - A única maneira de caracterizar este conjunto de sinais é em termos estatísticos.
    - Definimos então um processo aleatório:
- ❖ O conjunto de todas as formas de onda possíveis define formalmente o **Processo Aleatório** ou **Processo Estocástico** ou **Sinal Aleatório**.
  - Uma forma de onda particular é uma simples realização do processo aleatório. Ela é chamada de função amostra  $[x(t), \xi]$ .

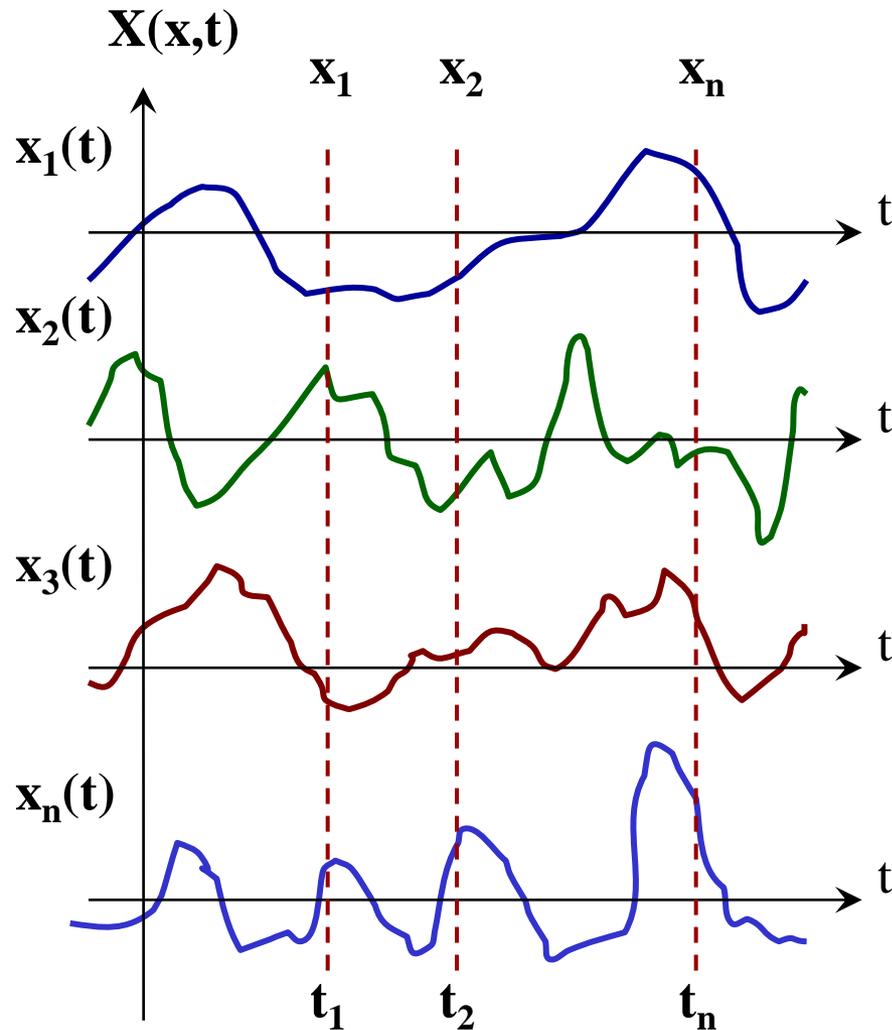
## Modelagem de um Processo Aleatório (ou Estocástico)

- ❖ O conceito de processo estocástico constitui uma extensão da noção de variável aleatória e permite modelar uma classe de sinais cujo comportamento ao longo do tempo é não determinístico. A interpretação deste modelo pode fazer-se com base na figura. A ideia básica é a de que cada sinal ou função amostra daquela classe ocorre de acordo com os resultados de um modelo experimental probabilístico. Com efeito, um processo estocástico não é mais do que um conjunto de sinais  $x(t; \xi_i)$ , chamados de 'funções amostra', onde  $\xi_i$  é um dos resultados elementares de um fenómeno físico completamente caracterizado pelo conjunto  $\zeta$  de todos o



- ❖ em resumo:
- ❖ Variável aleatória:
  - A cada ponto amostral  $\xi$  é assinalado um número real  $x = x(\xi)$ .
  - O espaço amostral é um conjunto de valores numéricos.
- ❖ Processo aleatório:
  - A cada ponto amostral  $\xi$  é assinalada uma forma de onda  $x(t, \xi)$ .
  - O espaço amostral é uma coleção de formas de onda ou sinais.
  
- ❖ Um processo aleatório pode ser denotado por letras maiúsculas, em negrito,  $X(x(t), \xi)$ .
  - Por simplicidade omite-se os argumentos.

# Caracterização de um processo aleatório



- ❖ Observe que no instante  $t_1$  não existe um valor único para  $x(t_1)$ .
- ❖ Portanto,  $x_{t_1}$  é uma variável aleatória caracterizada por uma função densidade de probabilidade  $p(x_{t_1})$ .
- ❖ Considerando os instantes  $t_i$   
 $i = 1, 2, \dots, n$ 
  - $X(t_i) = x(t_i)$  são  $n$  variáveis aleatórias distintas.
- ❖ O processo aleatório  $X$  é então caracterizado pela função densidade de probabilidade conjunta destas  $n$  variáveis.

$$p(x_{t_1}, x_{t_2}, \dots, x_{t_n})$$

## Processos estacionários

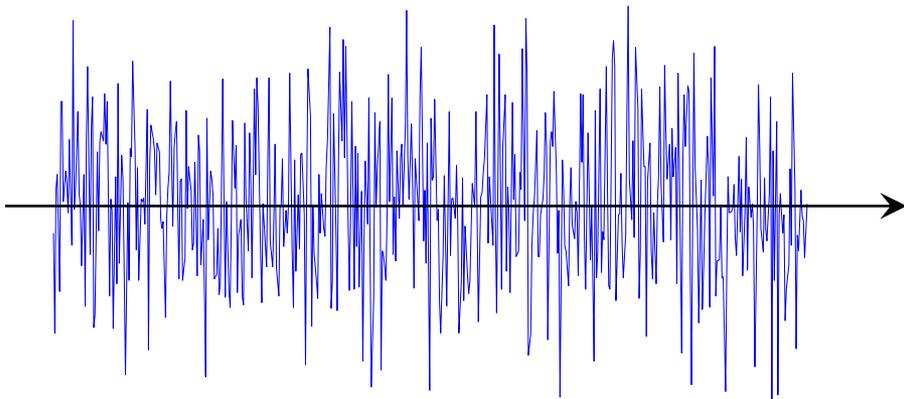
- ❖ Um processo aleatório é estacionário no sentido estrito se a pdf conjunta não variar com o deslocamento do tempo.

$$p(x_{t_1}, x_{t_2}, \dots, x_{t_n}) = p(x_{t_1+\tau}, x_{t_2+\tau}, \dots, x_{t_n+\tau})$$

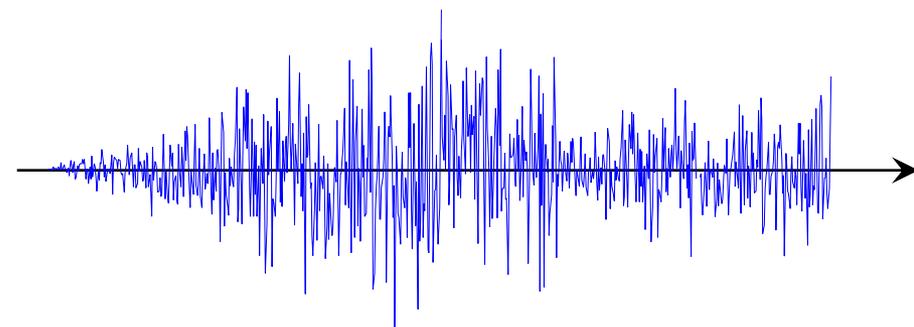
- ❖ Para um processo estacionário todas as suas estatísticas são invariantes ao deslocamento do tempo. Assim, ele é caracterizado por uma única pdf (função densidade de probabilidade).

$p(x)$

**estacionário**



**não estacionário**



## Médias estatísticas para um processo aleatório

- ❖ O conhecimento único da pdf é muito inadequado na descrição de um processo aleatório.
- ❖ Um processo aleatório é muitas vezes caracterizado por algumas médias “**estatísticas de primeira ordem**”, tais como: valor médio, valor quadrático médio, variância, etc.
- ❖ Para se extrair informações sobre o conteúdo de frequências de um sinal aleatório utilizam-se as estatísticas conjuntas - “**estatísticas de segunda ordem**”, tais como: funções de correlação, covariância e densidade espectral de potência.

## Estatísticas de primeira ordem

- ❖ Considere um processo aleatório com todas medidas feitas em um instante  $t_i$ .
- ❖ **Definição:** O  $m$ -ésimo momento deste processo é definido como o valor esperado de  $X^m(t_i)$ .

$$E[X^m(t_i)] = \int_{-\infty}^{\infty} x_{ti}^m p(x_{ti}) dx_{ti}$$

- ❖ Observe que:
  - $x(t_i)$  é uma variável aleatória do instante  $t_i$ .
  - Para cada instante  $t_i$  distinto tem-se um momento diferente.
  - Portanto:  $E[ \cdot ]$  depende do tempo  $t_i$

❖ Mas, se o processo for **estacionário**, uma única pdf  $[p(x)]$ , é suficiente para descrevê-lo. Assim:

$$E[X^m] = \int_{-\infty}^{\infty} x^m p(x) dx$$

- Neste caso  $E[.]$  não depende do tempo.
- $m = 1$  → valor médio (componente DC).
- $m = 2$  → valor quadrático médio (potência média total).

$$m_X = E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x p(x) dx \qquad E[X^2] = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 p(x) dx$$

## Estatísticas de segunda ordem

- ❖ Considere duas variáveis aleatórias  $x_{t_1}$  e  $x_{t_2}$ , definidas nos instantes  $t_1$  e  $t_2$ .
- ❖ Seja a pdf conjunta  $p(x_{t_1}, x_{t_2})$ .
- ❖ A correlação entre elas é definida como:

$$\gamma_x(t_1, t_2) = E[X_{t_1}, X_{t_2}] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x_{t_1} x_{t_2} p(x_{t_1}, x_{t_2}) dx_{t_1} dx_{t_2}$$

- Esta função mede a dependência entre as variáveis aleatórias nos instantes  $t_1$  e  $t_2$ .
- Quanto maior o valor de  $\gamma_x$ , maior a dependência.
- $\gamma_x$  é chamada de função de autocorrelação de  $X$ .

❖ Quando o processo é **estacionário** tem-se que:

$$p(x_{t_1}, x_{t_2}) = p(x_{t_1+\tau}, x_{t_2+\tau})$$

- A propriedade acima indica que  $\gamma_x$  depende da diferença entre  $t_1$  e  $t_2$ .  
Admitindo  $\tau = t_2 - t_1$ :

$$\gamma_x(t_1, t_2) = E[X_{t_1}, X_{t_1+\tau}] = \gamma_x(\tau)$$

✓ **Potência média total:**

- ✓ É calculada para deslocamento nulo, isto é,  $\tau = 0$ .

$$\gamma_x(0) = E[X^2]$$

- ✓ Ela inclui as componentes AC e DC do sinal.

- ✓ Um processo aleatório estacionário é um modelo ideal que não se observa no mundo real.

## ❖ OBS:

- Qualquer processo físico tem um início e um fim.
- As estatísticas dependem da origem do tempo.
- Portanto um processo estacionário é um modelo ideal.
- Define-se dois tipos de processos: **estacionário no sentido amplo e processo ergódico.**

### **Processo estacionário no sentido amplo**

- ❖ Um processo estacionário no sentido amplo considera somente as médias de primeira e segunda ordem.
  - Ele é estacionário no sentido amplo se:

$$m_x = E[X] \Rightarrow \text{cte. para todo } t$$
$$\gamma_x(t_1, t_2) = \gamma_x(\tau)$$

## Definições

- ❖ a covariância, ou variância conjunta, é uma medida do grau de interdependência (ou inter-relação) numérica entre duas variáveis aleatórias. Assim, variáveis independentes têm covariância zero.
- ❖ autocorrelação é uma medida que informa o quanto o valor de uma realização de uma variável aleatória é capaz de influenciar seus vizinhos. Por exemplo, o quanto a existência de um valor mais alto condiciona valores também altos de seus vizinhos.
  - O valor da autocorrelação está entre 1 (correlação perfeita) e -1, o que significa anti-correlação perfeita. O valor 0 significa total ausência de correlação.
  - A autocorrelação de uma dada variável se define pela distância, ou atraso com que se deseja medi-la. Quando essa distância é zero, tem-se o valor máximo 1, pois trata-se da variável correlacionada com ela mesma. Outros valores devem ser calculados caso a caso.

## Função de autocovariância

- ❖ Está relacionada com a função de autocorrelação.

$$c_x(t_1, t_2) = E[\{X_{t_1} - m_x(t_1)\} \cdot \{X_{t_2} - m_x(t_2)\}]$$

← **retira-se a  
média do sinal**

$$c_x(t_1, t_2) = \gamma_x(t_1, t_2) - m_x(t_1)m_x(t_2)$$

- ❖ Para processos aleatórios estacionários

$$c_x(t_1, t_2) = c_x(\tau) = \gamma_x(\tau) - m_x^2$$

➤ **Variância:  $c_x(0)$**

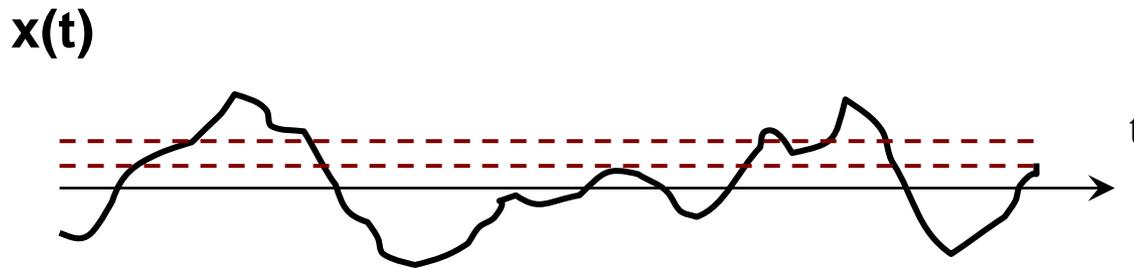
➤ Define a potência AC do processo aleatório:

$$\sigma_x^2 = c_x(0) = \gamma_x(0) - m_x^2$$

⇒ Desvio Padrão - valor rms:  $\sigma_x$

## Processos ergódicos

- ❖ Todas as funções amostras apresentam as mesmas informações.
  - Assim, uma única função amostra é suficiente para caracterizar o processo.
- ❖ Todas as estatísticas são determinadas a partir de uma função amostra.
- ❖ As médias temporais são iguais às médias estatísticas.



**valor médio no tempo**

$$\langle x(t) \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) dt$$

**função de autocorrelação temporal**

$$r_x(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t)x(t + \tau) dt$$

## ❖ Processos ergódicos:

➤ as médias temporais são iguais às médias estatísticas assim:

$$m_x = E[X] = \langle x(t) \rangle$$

$$\gamma_x(t_1, t_2) = \gamma_x(\tau) = r_x(\tau)$$

❖ Em geral, parâmetros tais como: valor dc, valor rms, potência média, são relacionados com um processo ergódico.

$$\bar{x} = \langle x(t) \rangle \quad \Rightarrow \textit{nível dc do sinal}$$

$$[\bar{x}]^2 = \langle x(t) \rangle^2 \quad \Rightarrow \textit{potênciado componente dc}$$

$$\gamma_x(0) = \langle x^2(t) \rangle \quad \Rightarrow \textit{potência total}$$

$$\sigma_x^2 = \langle x^2(t) \rangle - \langle x(t) \rangle^2 \quad \Rightarrow \textit{potência ac}$$

$$\sigma_x \quad \Rightarrow \textit{valor rms}$$

## Médias estatísticas de processos conjuntos

- ❖ Sejam  $\mathbf{X}$  e  $\mathbf{Y}$  dois processos aleatórios com pdf conjunta:

$$p(x_{t_1}, x_{t_2}, \dots, x_{t_n}, y_{t_1}, y_{t_2}, \dots, y_{t_m})$$

- Função de correlação cruzada

$$\gamma_{xy}(t_1, t_2) = E[X_{t_1}, Y_{t_2}] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x_{t_1} y_{t_2} p(x_{t_1}, y_{t_2}) dx_{t_1} dy_{t_2}$$

- Função de covariância cruzada

$$c_{xy}(t_1, t_2) = \gamma_{xy}(t_1, t_2) - m_x(t_1)m_y(t_2)$$

## Processos aleatórios independentes

$$p(x_{t_1}, x_{t_2}, \dots, x_{t_n}, y_{t'_1}, y_{t'_2}, \dots, y_{t'_m}) = p(x_{t_1}, \dots, x_{t_n}) \cdot p(y_{t'_1}, \dots, y_{t'_m})$$

## Processos aleatórios descorrelacionados

$$\gamma_{xy}(t_1, t_2) = E[X_{t_1}]E[Y_{t_2}]$$

  $c_{xy}(t_1, t_2) = \gamma_{xy}(t_1, t_2) - m_x(t_1)m_y(t_2) = 0$

**A função de covariância cruzada é nula**

## Densidade Espectral de potência

- ❖ Um processo aleatório é um sinal de energia infinita, portanto ele não apresenta transformada de Fourier.
- ❖ A característica Espectral é obtida através da função de sua autocorrelação.
- ❖ O teorema de Wiener-Kinchine estabelece que:
  - A transformada de Fourier da função de autocorrelação fornece a densidade espectral de potência média de um processo aleatório.

$$\Gamma_x(F) = \int_{-\infty}^{\infty} \gamma_x(\tau) e^{-j2\pi F\tau} d\tau \quad e \quad \gamma_x(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \Gamma_x(F) e^{j2\pi F\tau} dF$$

✓ No instante  $\tau = 0$

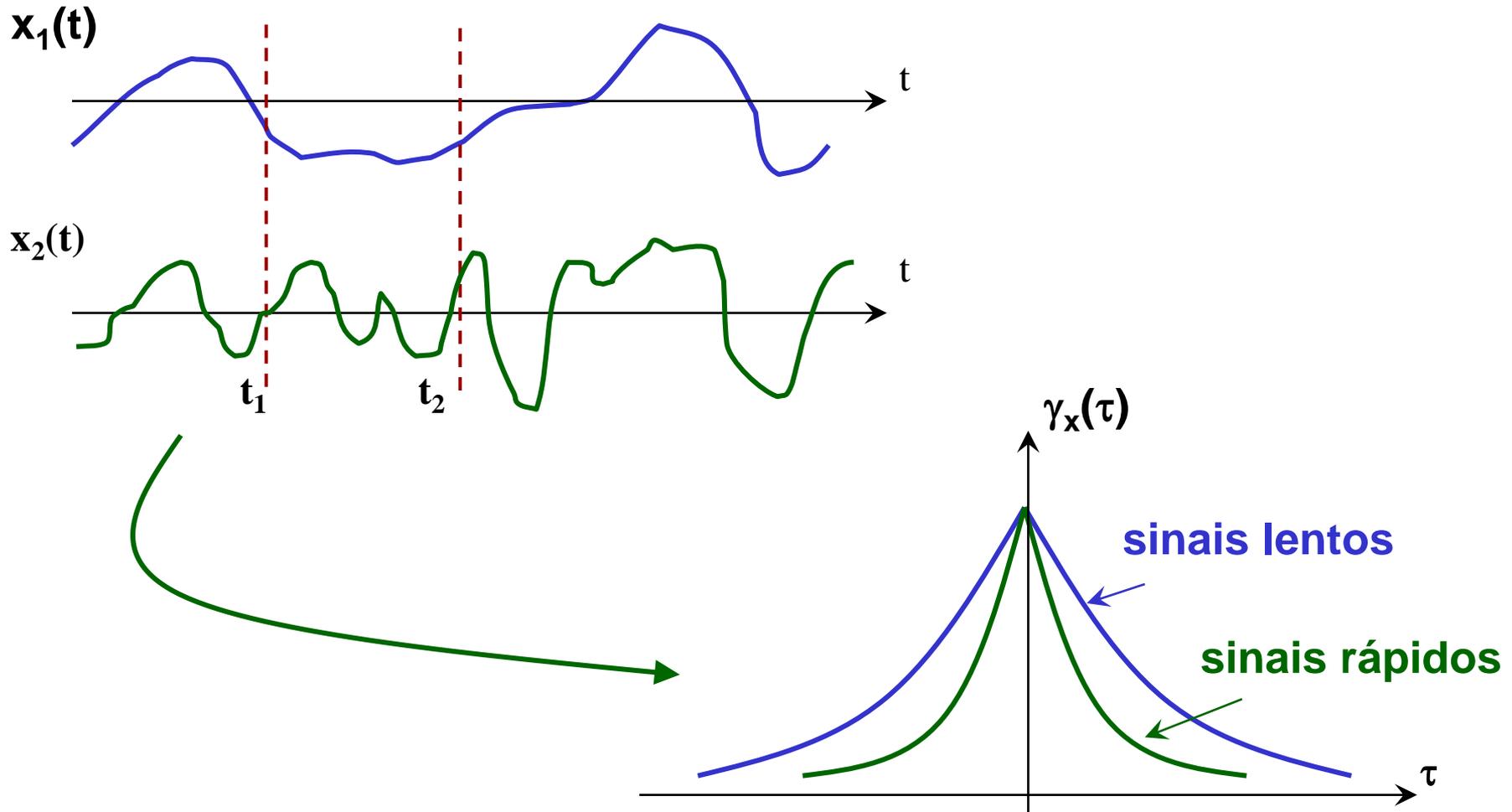
$$\gamma_x(0) = \int_{-\infty}^{\infty} \Gamma_x(F) dF = E[X^2] \geq 0$$

❖ Observações:

- $\Gamma_x(F) \geq 0$  (é real e par)
- A potência média total é calculada pela área sob  $\Gamma_x(F)$ .
- $\Gamma_x(F)$  representa a distribuição da potência em função da frequência.
- Assim:
  - $\Gamma_x(F)$  é denominado de **densidade espectral de potência**.

## Significado físico da função de autocorrelação

- ❖ É a medida mais significativa na análise de sinais aleatórios.
- ❖ Ela mede a rapidez das variações dos sinais.



## Propriedades dos processos estacionários

✓ A função de autocorrelação é par:  $\gamma_x(\tau) = \gamma_x(-\tau)$

✓ Se o processo tem um componente periódico, então:  $\gamma_x(\tau) = \gamma_x(\tau + T)$

✓ Para  $\tau$  tendendo ao infinito:  $\gamma_x(\infty) = m_x^2$

✓ Para  $\tau = 0$ :  $\gamma_x(0) = E[X^2]$   
 $\gamma_x(0) \geq |\gamma_x(\tau)|$

## Propriedades da função de correlação cruzada

- ✓ A função de correlação cruzada é par:  $\gamma_{xy}(\tau) = \gamma_{xy}(-\tau)$
- ✓ Se  $x$  e  $y$  são independentes:  $\gamma_{xy}(\tau) = m_x m_y$
- ✓ Se  $x$  e  $y$  são descorrelacionados:  $c_{xy}(\tau) = 0$        $c_{xy}(\infty) = 0$
- ✓ Se  $x$  e  $y$  são ortogonais:  $\gamma_{xy}(\tau) = 0$
- ✓ Limite máximo  $|\gamma_{xy}(\tau)| \leq \sqrt{\gamma_x(0)\gamma_y(0)}$

## Resumo

- ❖ Variáveis aleatórias modelam eventos desconhecidos.
- ❖ Processos aleatórios modelam sinais desconhecidos.
  - Um processo aleatório é uma coleção de sinais.
  - Pode ser pensado também como uma coleção de variáveis aleatórias.
  - Se  $\mathbf{X}(t)$  é um processo aleatório então:
    - $X(1)$ ,  $X(3)$ ,  $X(999)$  são variáveis aleatórias para um instante de tempo particular.
  - **Classes de processos aleatórios:**
    - Não estacionário.
    - Estacionário - estacionário no sentido amplo - ergódico.

- O modelo de processo ergódico é muito utilizado na prática, pois na maioria das vezes tem-se disponível uma única função amostra do sinal.

## ❖ Parâmetros importantes:

- Função densidade de probabilidade do sinal,
- Função de autocorrelação,
- Densidade espectral de potência, que é a transformada de Fourier da função de autocorrelação,
- Função de correlação cruzada para o caso de se ter dois processos aleatórios distintos (por exemplo sinal e ruído introduzido no sinal),
- Valor médio, valor quadrático médio, variância.

# Sinais aleatórios discretos no tempo

## Médias Estatísticas

- ❖ Uma vez que recordamos a teoria de probabilidade e algumas de suas ramificações, definimos o comportamento médio de um experimento aleatório. O **valor esperado** ou **média** de uma variável aleatória  $\mathbf{X}$  é definido por:

$$\mu_X(t) = E[\mathbf{X}(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} x p_{X(t)}(x) dx \quad (1)$$

Onde o operador  $E$  denota a esperança estatística. Ou seja, a média  $\mu_X$  situa o centro de gravidade da área sob a curva de densidade de probabilidade da variável aleatória  $x$ .

### Função de uma variável aleatória

- ❖ Seja  $X$  uma variável aleatória, e seja  $g(X)$  uma função de valor real definida sobre a reta real. Se  $Y$  for definida como:

$$Y = g(X) \quad (2)$$

$Y$  é também uma variável aleatória.

## Função de uma variável aleatória (cont.)

- ❖ Para encontrar o valor esperado de  $Y$  a partir da pdf,  $p_Y(y)$ , aplicamos a fórmula padrão

$$E[Y] = \int_{-\infty}^{\infty} y p_Y(y) dy$$

- ❖ Um procedimento mais simples é escrever:

$$E[g(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) p_X(x) dx \quad (3)$$

- ❖ A equação (3) pode ser vista como uma generalização do conceito de valor esperado para uma função arbitrária  $g(X)$  de uma variável aleatória  $X$ .

## Exemplo 1

### ❖ Variável aleatória cossenoidal

➤ Seja  $Y = g(X) = \cos(X)$

➤ Onde  $X$  é uma variável aleatória uniformemente distribuída no intervalo  $(-\pi, \pi)$ , ou seja

$$p_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi}, & -\pi < x < \pi \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

➤ De acordo com a eq. (3), o valor esperado de  $Y$  é:

$$E[Y] = \int_{-\pi}^{\pi} (\cos x) \frac{1}{2\pi} dx = -\frac{1}{2\pi} \operatorname{sen} x \Big|_{-\pi}^{\pi} = 0$$

## Momentos

- ❖ Para o caso específico de  $g(X) = X^n$ , utilizando-se a eq. (3), obtemos o n-ésimo momento da distribuição de probabilidade da variável aleatória  $X$ , ou seja,

$$E[g(X^n)] = \int_{-\infty}^{\infty} x^n p_X(x) dx \quad (4)$$

- ❖ Os mais importantes momentos de  $X$  são os dois primeiros.
- ❖ Fazendo  $n=1$ , em (4), obtém-se a **média** da variável aleatória, enquanto para  $n=2$ , obtém-se o **valor quadrático médio** de  $X$ .

$$E[g(X^2)] = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 p_X(x) dx \quad (5)$$

- ❖ Também podemos definir **momentos centrais**, que são os momentos das diferenças entre a variável aleatória e a sua média  $\mu_X$ . O n-ésimo momento central é:

$$E[(X - \mu_X)^n] = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu_X)^n p_X(x) dx \quad (6)$$

## Momentos

- ❖ Para  $n=1$ , o momento central é zero, enquanto para  $n=2$  o segundo momento central é conhecido como **variância** da variável aleatória  $X$ :

$$\text{var}[X] = E[(X - \mu_X)^2] = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu_X)^2 p_X(x) dx \quad (7)$$

- ❖ A variância é muitas vezes representada por  $\sigma_X^2$
- ❖ A raiz quadrada da variância, representada por  $\sigma_X$ , é também conhecida como **desvio padrão** da variável aleatória  $X$ .
- ❖ A variância de uma variável aleatória é uma medida da 'aleatoriedade' da variável. Especificando a variância, restringimos a largura efetiva da função densidade de probabilidade  $p_X(X)$  da variável  $X$  em torno da média  $\mu_X$ .

## Momentos

- ❖ A 'desigualdade de Chebyshev' afirma que para qualquer número  $\varepsilon$  positivo, temos:

$$P(|X - \mu_X| \geq \varepsilon) \leq \frac{\sigma_X^2}{\varepsilon^2} \quad (8)$$

- ❖ É uma **descrição parcial** de sua distribuição de probabilidade.
- ❖ A partir das eqs. (5) e (7) a variância e o valor quadrático médio,  $E|X^2|$ , são relacionados por:

$$\sigma_X^2 = E|X^2 - 2\mu_X X + \mu_X^2| = E|X^2| - 2\mu_X E|X| + \mu_X^2 = E|X^2| + \mu_X^2 \quad (9)$$

$$E[g(X^2)] = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 p_X(x) dx \quad (5)$$

$$\text{var}[X] = E[(X - \mu_X)^2] = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu_X)^2 p_X(x) dx \quad (7)$$

## Função característica

- ❖ Outra média estatística importante, a função característica  $\Phi_X(\nu)$  da pdf de uma variável aleatória  $x$ , é definida como a esperança da função exponencial complexa  $[\exp(j\nu X)]$ , como mostrado:

$$\Phi_X(\nu) = E[\exp(j\nu X)] = \int_{-\infty}^{\infty} p_X(x) \exp(j\nu x) dx \quad (10)$$

- ❖ Onde  $\nu$  é real e  $j = (-1)^{1/2}$ . Em outras palavras,  $\Phi_X(\nu)$  é, exceto por uma mudança de sinal no expoente, a transformada de Fourier da função densidade de probabilidade  $p_X(x)$ .
- ❖ Lembrando que  $\nu$  e  $x$  exercem papéis análogos aos das variáveis  $2\pi f$  e  $t$  das transformadas de Fourier, respectivamente, deduzimos a relação inversa, análoga à transformada de Fourier inversa:

$$p_X(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_X(\nu) \exp(-j\nu x) d\nu \quad (11)$$

- ❖ Essa relação pode ser utilizada para avaliar a pdf da variável aleatória  $X$  a partir de sua função característica  $\Phi_X(\nu)$ .

## Exemplo 2

### ❖ Variável aleatória Guassiana

- É comumente encontrada em análise estatística de uma grande variedade de sistemas físicos, incluindo sistemas de comunicação. Seja  $X$  uma variável aleatória de distribuição Gaussiana de média  $\mu_X$  e variância  $\sigma_X^2$ . A pdf desta variável é definida como:

$$p_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma_X} \exp\left(-\frac{(x - \mu_X)^2}{2\sigma_X^2}\right), \quad -\infty < x < \infty \quad (12)$$

- Neste exemplo, utilizam a função característica para avaliar os momentos de ordem mais alta da variável aleatória Gaussiana  $X$ .
- Solução: Diferenciamos ambos os lados da eq. (10) em relação a  $\nu$ , um total de  $n$  vezes e então fazemos  $\nu=0$ , obtendo:

$$\left. \frac{d^n}{d\nu^n} \Phi_X(\nu) \right|_{\nu=0} = (j)^n \int_{-\infty}^{\infty} x^n p_X(x) dx$$

## Exemplo 2 (cont.)

❖ A integral do lado direito desta relação

$$\left. \frac{d^n}{d\nu^n} \Phi_X(\nu) \right|_{\nu=0} = (j)^n \int_{-\infty}^{\infty} x^n p_X(x) dx$$

❖ é reconhecida como o n-ésimo momento da variável aleatória X. Portanto:

$$E[X^n] = (-j)^n \left. \frac{d^n}{d\nu^n} \Phi_X(\nu) \right|_{\nu=0} \quad (13)$$

❖ A função característica de uma variável aleatória Gaussiana X de média  $\mu_X$  e variância  $\sigma_X^2$  é dada por

$$\Phi_X(\nu) = \exp\left(j\nu\mu_X - \frac{1}{2}\nu^2\sigma_X^2\right) \quad (14)$$

As eq. (13) e (14) mostram que os momentos de ordem mais alta da variável aleatória Gaussiana são unicamente determinados pela média e pela variância.

## Momentos conjuntos

- ❖ Seja o par de variáveis  $X$  e  $Y$ . Um conjunto de médias estatísticas importantes são os momentos conjuntos, também chamados de valores esperados de  $X^i Y^k$ , onde  $i$  e  $k$  podem assumir qualquer valor inteiro positivo. Assim:

$$E[X^i Y^k] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x^i y^k p_{X,Y}(x, y) dx dy \quad (15)$$

- ❖ Um momento conjunto de importância particular é a **correlação**, definida por  $E[XY]$ , que corresponde a  $i=k=1$  na eq. (15).
- ❖ A correlação das variáveis aleatórias centradas  $X-E[X]$  e  $Y-E[Y]$ , ou seja, o momento conjunto

$$\text{cov}[XY] = E[(X - E[X])(Y - E[Y])] \quad (16)$$

- ❖ é chamado de **covariância** de  $X$  e  $Y$ .

## Momentos conjuntos

- ❖ Sendo  $\mu_X=E[X]$  e  $\mu_Y=E[Y]$ , podemos expandir a eq. (16) para obter:

$$\text{cov}[XY]=E[XY]-\mu_X\mu_Y \quad (17)$$

- ❖ A covariância de X e Y, normalizada ao produto dos desvios padrão  $\sigma_X\sigma_Y$ , é chamada de **coeficiente de correlação** de X e Y:

$$\rho=\frac{\text{cov}[XY]}{\sigma_X\sigma_Y} \quad (18)$$

- ❖ Dizemos que duas variáveis aleatórias X e Y são descorrelacionadas se e somente se sua covariância for zero, ou seja,  $E[XY]=0$ .
- ❖ A partir da eq. (17) observamos que se uma das variáveis, X e Y, ou ambas, tiverem média zero, e se forem ortogonais, então elas serão descorrelacionadas, ou vice versa.
- ❖ Também, se X e Y forem estatisticamente independentes, elas serão descorrelacionadas, mas a recíproca não necessariamente é verdadeira

## Processos aleatórios

- ❖ Sinais aleatórios apresentam duas propriedades:
  - São funções do tempo definidos em algum intervalo de observação
  - São aleatórios no sentido de que antes de se realizar um experimento não é possível descrever as formas de onda que serão observadas
  - Portanto, ao descrevermos sinais aleatórios, vemos que cada ponto amostrado no espaço amostral é uma função do tempo.
  - O espaço amostral, ou conjunto de funções do tempo, é chamado de processo aleatório ou estocástico.
  - Assumimos a existência de uma distribuição de probabilidade definida ao longo de uma classe apropriada de conjuntos no espaço amostral, portanto podemos falar em probabilidade de vários eventos.

## Processos aleatórios

❖ Seja um experimento aleatório especificado pelos resultados  $\xi_i$  de algum espaço amostral  $\xi$ , pelos eventos definidos no espaço amostral  $\xi$  e pelas probabilidades destes eventos.

❖ Atribuimos a cada ponto uma função do tempo, de acordo com a regra

$$X(t, \xi_i) \quad -T \leq t \leq T \quad (19)$$

❖ Onde  $2T$  é o intervalo de observação total. Para um ponto amostral fixo,  $\xi_j$ , o gráfico  $X(t, \xi_j)$  versus tempo é chamado de uma realização ou **função amostral** do processo aleatório.

❖ Para simplificar, denotamos a função amostral como:

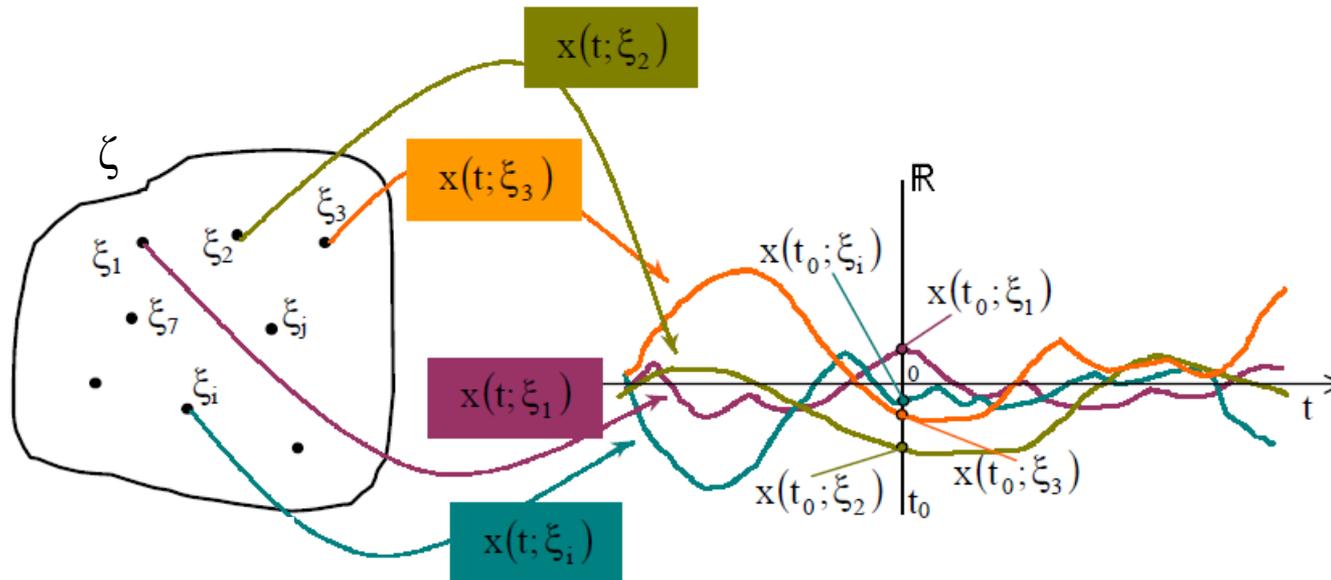
$$x_j(t) = X(t, \xi_j) \quad (19)$$

## Processos aleatórios

- ❖ A figura ilustra o conjunto de funções amostrais. A partir dela, observamos que para um tempo fixo  $t_k$ , dentro de um intervalo de observação, **o conjunto de números**

$$\{x_1(t_k), x_2(t_k), \dots, x_n(t_k)\} = \{X(t_k, \xi_1), X(t_k, \xi_2), \dots, X(t_k, \xi_n)\}$$

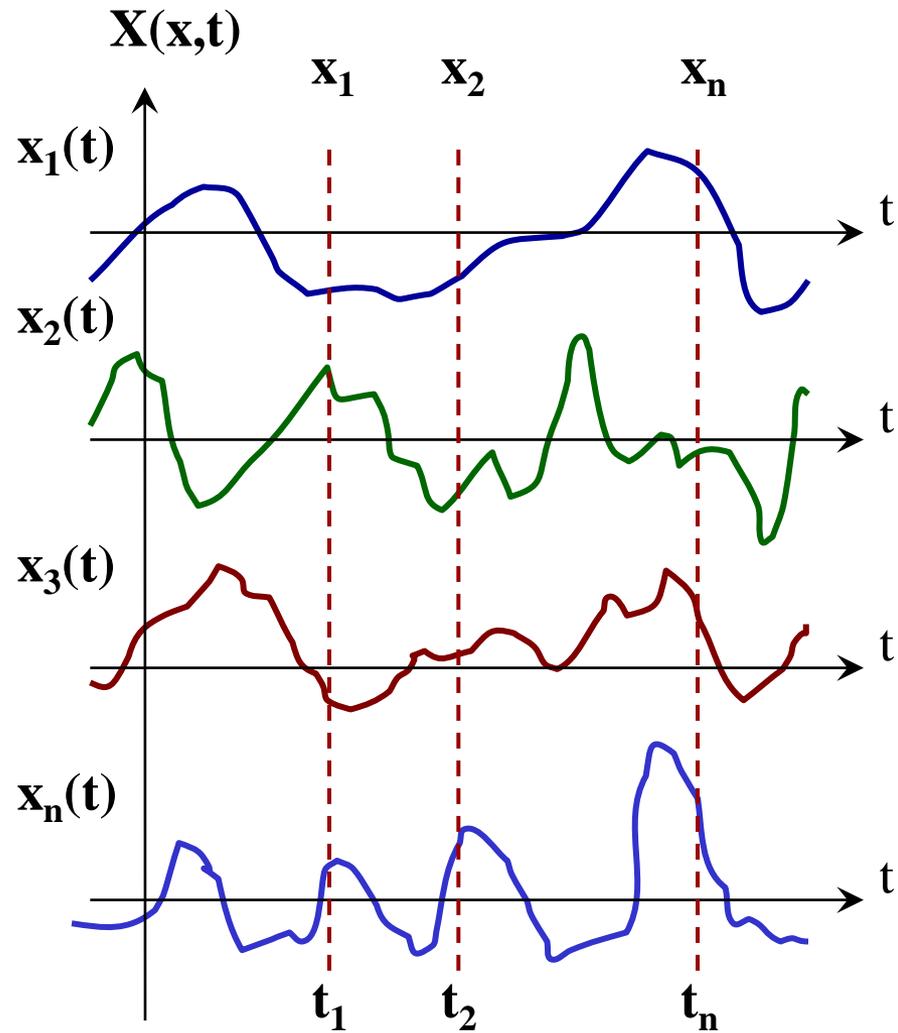
- ❖ **constitui uma variável aleatória.**
- ❖ Dessa forma, temos um conjunto indexado (família) de variáveis aleatórias  $[X(t, \xi)]$  que é chamado de **processo aleatório.**



## Processos aleatórios

- ❖ Para simplificar, a prática é suprimir o  $\xi_i$  e simplesmente utilizar o  $X(t)$  para denotar um processo aleatório.
- ❖ Podemos então definir formalmente processo aleatório  $X(t)$  como um conjunto de funções do tempo com uma regra de probabilidade que atribui uma probabilidade a todo evento significativo associado a uma observação de uma das funções do processo aleatório.
- ❖ Distinção entre variável e processo aleatórios:
  - Para uma variável aleatória, o resultado de um experimento aleatório é mapeado em um número
  - Para um processo aleatório, o resultado de um experimento é mapeado em uma forma de onda que é uma função do tempo.

# Processos aleatórios



## Funções de média, correlação e covariância

- ❖ Para um processo aleatório  $X(t)$ , definimos a média do processo como o valor esperado da variável aleatória obtido observando-se o processo em algum tempo  $t$  (onde  $p_{X(t)}$  é a função densidade de probabilidade do processo no tempo  $t$ ), temos:

$$\mu_X(t) = E[X(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} x p_{X(t)}(x) dx \quad (20)$$

## Funções de média, correlação e covariância

- ❖ Um processo aleatório é dito **estacionário de primeira ordem** se a função distribuição (e portanto a função densidade) de  $X(t)$  não varia com o tempo. Ou seja, as funções densidade para as variáveis aleatórias  $X(t_1)$  e  $X(t_2)$  satisfazem (para todo  $t_1$  e  $t_2$ ):

$$p_{X(t_1)}(x) = p_{X(t_2)}(x) \quad (21)$$

- ❖ Consequentemente, para um processo estacionário de primeira ordem, a **média do processo aleatório é uma constante**, como mostrado por:

$$\mu_X(t) = \mu_X \quad \text{para todo } t \quad (22)$$

- ❖ Por um argumento similar, podemos também deduzir que a variância de tal processo é também constante.

## Autocorrelação

- ❖ Função de autocorrelação do processo  $X(t)$  é definida como a esperança do produto de duas variáveis aleatórias  $X(t_1)$  e  $X(t_2)$ , obtidas pela observação de  $X(t)$  nos tempos  $t_1$  e  $t_2$ , respectivamente (ou seja,  $x_1$  e  $x_2$ , respectivamente):

$$R_X(t_1, t_2) = E[X(t_1)X(t_2)] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x_1 x_2 p_{X(t_1), X(t_2)}(x_1, x_2) dx_1 dx_2 \quad (23)$$

- ❖ Onde  $p_{X(t_1), X(t_2)}(x_1, x_2)$  é a função densidade de probabilidade conjunta das variáveis aleatórias  $X(t_1)$  e  $X(t_2)$ .
- ❖ O processo aleatório  $X(t)$  é estacionário de segunda ordem se a pdf conjunta  $p_{X(t_1), X(t_2)}(x_1, x_2)$  depende apenas da diferença entre os tempos de observação  $t_1$  e  $t_2$ .
- ❖ Por sua vez, isso implica que a função de autocorrelação de um processo estacionário (de segunda ordem) depende somente das diferenças de tempo  $t_2 - t_1$ :

$$R_X(t_1, t_2) = R_X(t_1, t_2) = R_X(t_2 - t_1) \quad (24)$$

## Autocovariância

- ❖ De forma similar, a função de autocovariância de um processo aleatório estacionário  $X(t)$  é descrita como

$$C_X(t_1, t_2) = E[(X(t_1) - \mu_X)(X(t_2) - \mu_X)] = R_X(t_2 - t_1) - \mu_X^2 \quad (25)$$

- ❖ A eq. (25) mostra que, à semelhança da função de autocorrelação, a função de autocovariância de um processo aleatório estacionário  $X(t)$  depende somente da diferença de tempo  $t_2 - t_1$ .
- ❖ A média e a função de autocorrelação do processo são suficientes para descrever os primeiros dois momentos do processo,

## Propriedades das funções de autocorrelação

- ❖ A função de autocorrelação é uma função par, isto é:

$$\gamma_x(k) = \gamma_x(-k) \quad (26)$$

- ❖ Se um processo tem um componente periódico de valor  $N$  então:

$$\gamma_x(k) = \gamma_x(k + N) \quad (27)$$

- ❖ Para  $k$  tendendo ao infinito:

$$\gamma_x(\infty) = \mu_x^2 \quad (28)$$

- ❖ Para  $k$  igual a zero:

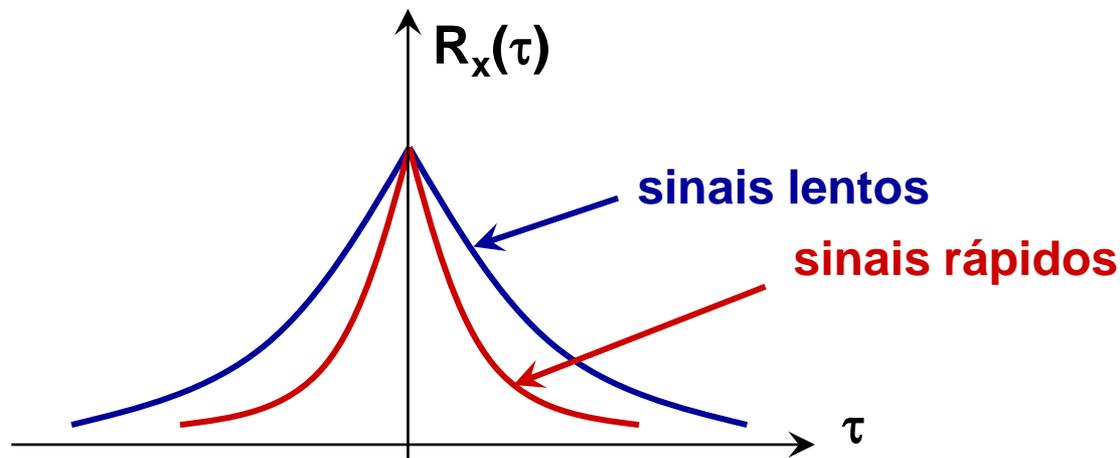
$$\gamma_x(0) = E[x^2] \quad (29)$$

- ❖ A função de autocorrelação é uma função decrescente, isto é:

$$\gamma_x(0) \geq |\gamma_x(k)| \quad (30)$$

## Importância física da autocorrelação

- ❖ A função  $R_X(\tau)$  descreve a interdependência de duas variáveis aleatórias obtidas observando-se o processo aleatório  $X(t)$  em instantes separados entre si de  $\tau$  segundos.
- ❖ Quanto mais rapidamente o  $X(t)$  mudar com o tempo, mais rapidamente a função de autocorrelação decrescerá a partir de seu máximo  $R_X(0)$ .
- ❖ Este decréscimo pode ser caracterizado por um tempo de descorrelação  $\tau_0$ , de modo que para  $t > \tau_0$ , a magnitude da função de autocorrelação  $R_X(t)$  permanece abaixo de um valor prescrito.



## Importância física da autocorrelação (cont.)

- ❖ Define-se o tempo de descorrelação  $\tau_0$  como o tempo necessário para que a magnitude da função de autocorrelação até um certo valor, 1% por exemplo, de seu valor máximo.

## Funções de correlação cruzada

- ❖ Seja o caso mais geral de dois processos aleatórios  $X(t)$  e  $Y(t)$  com funções de autocorrelação  $R_X(t,u)$  e  $R_Y(t,u)$ , respectivamente.
- ❖ A função de autocorrelação cruzada de  $X(t)$  e  $Y(t)$  é definida por

$$R_{XY}(t,u) = E[X(t)Y(u)] \quad (40)$$

- ❖ Se os processos aleatórios  $X(t)$  e  $Y(t)$  forem amplamente estacionários individualmente e, além disso, forem estacionários no sentido amplo conjuntamente, a função de correlação cruzada poderá ser escrita como

$$R_{XY}(t,u) = R_{XY}(\tau) \quad \text{onde } \tau = t - u \quad (41)$$

- ❖ A função de correlação cruzada não é, em geral, uma função par de  $\tau$ , como era a função de autocorrelação, e nem tem um máximo na origem. Mas ela obedece à seguinte relação de simetria:

$$R_{XY}(\tau) = R_{YX}(-\tau) \quad \text{onde } \tau = t - u \quad (42)$$

# Processos ergódicos

- ❖ As esperanças de um processo estocástico  $X(t)$  são médias ao longo do processo.
  - Ex.: a média de um processo estocástico em algum tempo fixo  $t_k$  é a esperança da variável aleatória  $X(t_k)$  que descreve todos os valores possíveis das funções amostrais do processo observado no tempo  $t=t_k$ .
  - Assim, as esperanças de um processo estocástico são muitas vezes chamadas de médias conjuntas.
- ❖ Em muitos casos é difícil ou impossível observar todas as funções amostrais de um processo aleatório em um dado intervalo de tempo. Então é mais conveniente observar uma função única por um longo intervalo de tempo. Para uma função amostral única podemos computar a média temporal de uma função particular.
  - Ex.: para uma função amostral  $x(t)$ , a média temporal sobre um período de observação  $2T$  é
$$\mu_{x,T} = \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t) dt \quad (46)$$
- ❖ Para muitos processos de interesse, as médias temporais e as médias conjuntas são iguais, uma propriedade conhecida como **ergodicidade**.
  - Quando uma média conjunta é requerida, podemos estimá-la utilizando uma média temporal. Assim, consideramos que os processos aleatórios são **ergódicos**.

## Densidade Espectral de Potência

- ❖ Quando analisamos sinais determinísticos no domínio do tempo, observá-los também no domínio da frequência é importante.
- ❖ Estas representações são relacionadas pela transformada de Fourier.
- ❖ Dado que uma função amostral de um processo aleatório  $X(t)$  é também um sinal no domínio do tempo podemos definir sua transformada de Fourier. PORÉM, uma função amostra  $x(t)$  individual não pode ser representativa de todo o conjunto de funções amostrais que compreendem um processo aleatório.
- ❖ Uma média estatística das funções amostrais, tal como a autocorrelação  $R_X(\tau)$  é uma representação mais útil. Sua transformada de Fourier é conhecida como **densidade espectral de potência**  $S_X(f)$  do processo aleatório  $X(t)$ .

## Densidade Espectral de Potência

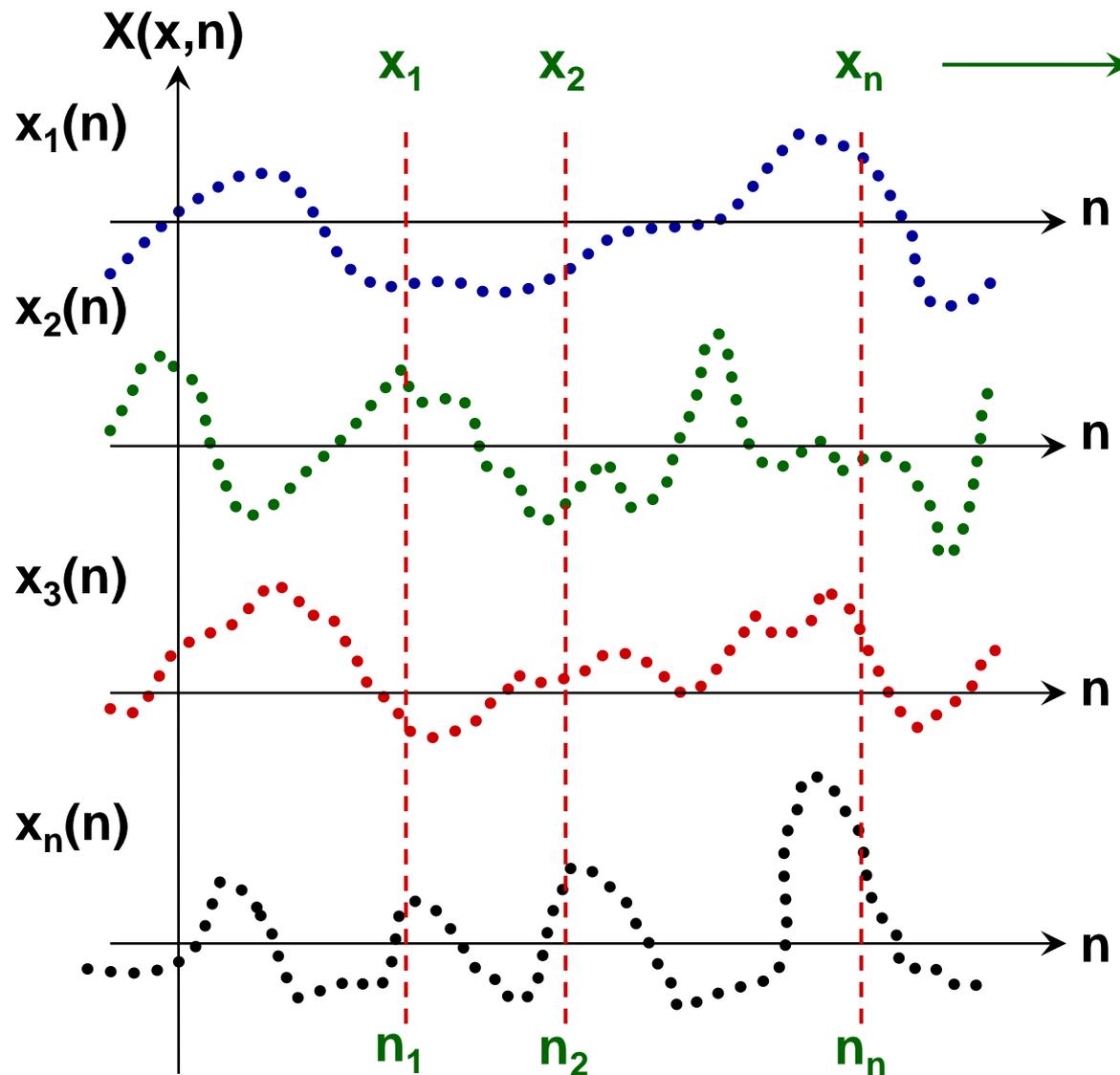
- ❖ A densidade espectral de potência  $S_X(f)$  e a autocorrelação  $R_X(\tau)$  formam o par

$$S_X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} R_X(\tau) \exp(-j2\pi f\tau) d\tau \quad (54)$$

$$R_X(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S_X(f) \exp(j2\pi f\tau) df \quad (55)$$

- ❖ As equações (54) e (55) são as relações básicas na teoria de análise espectral de processos aleatórios e, em conjunto elas constituem as normalmente chamadas **relações de Einstein-Wiener-Khintchine**.
- ❖ As relações de Einstein-Wiener-Khintchine mostram que se a função de autocorrelação ou a densidade espectral de potência for conhecida, a outra pode ser encontrada exatamente.

# Introdução



variáveis aleatórias  
nos instantes  
 $n_1, n_2, \dots$

# Introdução

- ❖ Toda a caracterização e conceitos dados para os sinais aleatórios contínuos no tempo podem ser estendidos para os sinais aleatórios discretos no tempo.
- ❖ Formalmente, um processo aleatório discreto no tempo é uma família  $X_i$  de sequências aleatórias  $x_i(n)$ .
- ❖ Se  $X(n)$  é um processo aleatório, então  $x_i(1), x_i(2), \dots, x_i(n)$  são variáveis aleatórias.
- ❖ Ele é então caracterizado pela função densidade de probabilidade conjunta de todas estas variáveis aleatórias.

$$p(x_{n1}, x_{n2}, \dots, x_{nn})$$

## Caracterização de um processo aleatório discreto no tempo

- ❖ Somente o conhecimento das funções densidade de probabilidade individuais de um processo aleatório discreto no tempo não é suficiente para caracterizá-lo.
- ❖ As outras ferramentas importantes para caracterizá-lo são:
  - Valor médio - valor quadrático médio - variância,
  - Função de autocorrelação,
  - Densidade espectral de potência,
  - Função de correlação cruzada, quando se trabalha com dois processos distintos.
- ❖ Uma observação importante:
  - Para um processo aleatório discreto as estatísticas acima podem ser facilmente estimadas.

## Momentos

- ❖ O m-ésimo momento é definido como o valor esperado de  $X^m(n)$ .

$$E[X^m(n)] = \int_{-\infty}^{\infty} x_n^m p(x_n) dx_n$$

- Para  $m = 1$  e  $m = 2$  tem-se as medidas mais utilizadas:
  - $m = 1$  : valor médio,
  - $m = 2$  : valor quadrático médio (potência total),
  - Retirando o quadrado do valor médio do valor quadrático médio do sinal obtém-se a variância ou a potência AC.

## Valor médio

- Admitindo  $m = 1$ , na equação anterior:

$$m_x = E[X(n)] = \int_{-\infty}^{\infty} x_n p(x_n) dx_n$$

- Propriedades:

$$E[X_n + Y_m] = E[X_n] + E[Y_m]$$

$$E[aX_n] = aE[X_n]$$

## ❖ Sequência de autocorrelação

- Mede as variações do sinal com o tempo.
- De um modo intuitivo:  $X(1)$  e  $X(2)$  são mais relacionados do que, por exemplo,  $X(1)$  e  $X(100000)$ .
- Definição:

$$\gamma_x(n, m) = E[X_n, X_m] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x_n x_m p(x_n, x_m) dx_n dx_m$$

## ✓ Sequência de autocovariância

$$c_x(n, m) = E[X_n - m_x(n), X_m - m_x(m)]$$

$$c_x(n, m) = \gamma_x(n, m) - m_x(n)m_x(m)$$

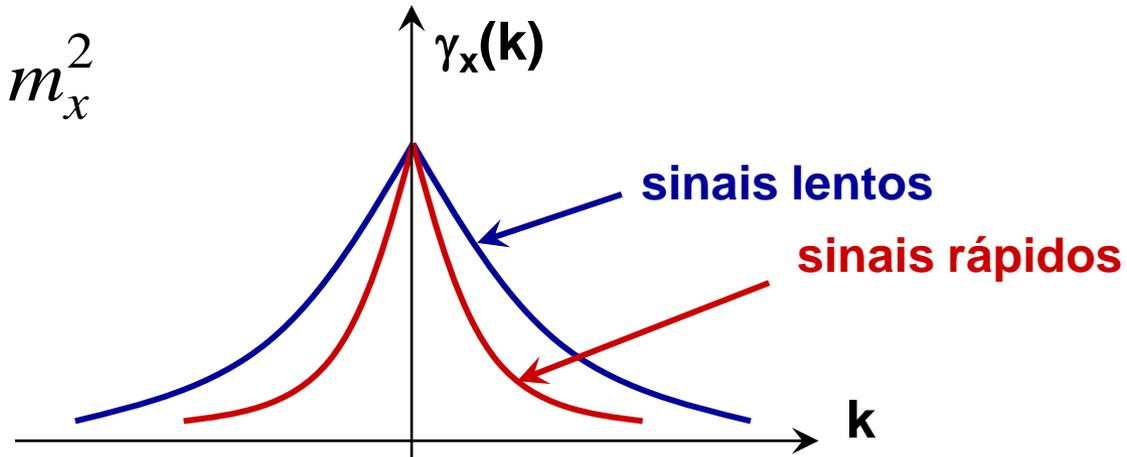
## Processos aleatórios estacionários

- Seja  $k = n - m$
- Para um processo estacionário tem-se:

$$\left. \begin{aligned} \gamma_x(n, m) &= \gamma_x(k), \quad k = m - n \\ c_x(n, m) &= c_x(k) = \gamma_x(k) - m_x^2 \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{Não dependem dos instantes} \\ \text{n e m, mas somente do atraso} \\ \text{k = n - m} \end{array}$$

- **Variância ( potência ac ):**

$$\sigma_x^2 = c_x(0) = \gamma_x(0) - m_x^2$$



## Densidade Espectral de Potência

- ❖ Um processo aleatório discreto no tempo é uma sequência de energia infinita.
  - Portanto, ele não possui transformada de Fourier.
  - Mas, apresenta potência média finita, isto é,

$$\gamma_x(0) = E[X^2] < \infty$$

- Então ele apresenta uma **densidade espectral de potência**.
  - **Utilizando o teorema de Wiener-Kinchine tem-se que:**

$$\Gamma_x(f) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \gamma_x(k) e^{-j2\pi f k} \quad e \quad \gamma_x(k) = \int_{-1/2}^{1/2} \Gamma_x(f) e^{j2\pi f k} df$$

## ❖ Observações:

- $\Gamma_x(f)$  representa a distribuição da potência do sinal em função da frequência.
- Por este motivo  $\Gamma_x(f)$  é chamado de **Densidade Espectral de Potência**.
- Para  $k = 0$ , temos a potência média do sinal (valor quadrático médio), isto é,

$$\gamma_x(0) = \int_{-1/2}^{1/2} \Gamma_x(f) df$$

## Médias temporais para um par discreto no tempo

- ❖ Na prática é comum ter-se somente uma sequência amostra do sinal aleatório.
  - Neste caso utiliza-se **as médias temporais**, isto é, consideramos o processo em estudo como sendo um processo ergódico.
- ❖ **Sabemos que um Processo Ergódico apresenta as seguintes propriedades:**
  - Uma única sequência amostra é representativa de todo o processo.
  - Assim, **“As médias temporais convergem para as médias estatísticas.”**
    - A menos que especificado considera-se um processo como estacionário no sentido amplo e ergódico.

# Definições para processos aleatórios discretos ergódicos

❖ Valor Médio:

$$\langle x_n \rangle = m_x = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^N x(n)$$

❖ Sequência de autocorrelação:

$$r_x(k) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^N x^*(n)x(n+k)$$

❖ Variância:

$$\sigma_x^2 = r_x(0) - m_x^2 \quad \text{potência ac}$$

## Estimativa das médias temporais

- ❖ Na prática dispõe-se de uma sequência aleatória com tamanho ou duração finita,

$$\{ x(n), n = 0, 1, 2, \dots, N-1 \},$$

➤ isto é,  $N$  é finito.

- ❖ Neste caso, admitindo um processo ergódico, pode-se fazer uma estimativa das médias temporais do sinal e admiti-las iguais às médias estatísticas.
- ❖ Nesta estimativa é necessário verificar a qualidade dos estimadores empregados.
- ❖ Seja um estimador  $\hat{\alpha}$  de um parâmetro  $\alpha$ .
  - ❖ Este estimador varia com as diferentes realizações do processo aleatório (p. a.)
  - ❖ Portanto este estimador é uma variável aleatória:

## ❖ Define-se as seguintes medidas:

⇒ Polarização do estimador:

$$B[\hat{\alpha}] = \alpha - E[\hat{\alpha}]$$

⇒ Variância do estimador:

$$\text{var}[\hat{\alpha}] = E[\hat{\alpha}^2] - E^2[\hat{\alpha}]$$

---

⇒ Estimador não polarizado:

$$B[\hat{\alpha}] = 0 \quad [\hat{\alpha} \rightarrow \alpha]$$

⇒ Estimador consistente:

$$B[\hat{\alpha}] = 0 \quad e \quad \text{var}[\hat{\alpha}] = 0$$

## Estimativa do valor médio de um sinal

$$\hat{m}_x = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x(n)$$

➤ Estimador para o valor médio

⇒ Valor esperado deste estimador:

$$E[\hat{m}_x] = E\left[\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x(n)\right] = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} E[x(n)] = m_x$$

$E[\hat{m}_x] = m_x \Rightarrow$  ➤ O valor esperado é igual ao valor real, portanto o estimador do valor médio é não polarizado

⇒ **Variância do estimador:**

$$\begin{aligned} E[\hat{m}_x^2] &= E\left[\frac{1}{N^2} \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{N-1} x(n)x(m)\right] = \frac{1}{N^2} \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{N-1} E[x(n)x(m)] \\ &= \frac{1}{N^2} \left[ \sum_{n=0}^{N-1} E[x^2(n)] + \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{m \neq n} E[x(n)]E[x(m)] \right] \end{aligned}$$

⇒  $E[x(n)x(m)] = E[x(n)]E[x(m)] = (m_x)^2$  pois o processo é ergódico, assim,

$$= \frac{1}{N} E[x^2(n)] + \frac{N-1}{N} m_x^2$$

$$\text{var}[\hat{m}_x] = \frac{1}{N} E[x^2(n)] + \frac{N-1}{N} m_x^2 - m_x^2 = \frac{\sigma_x^2}{N}$$

tende a zero  
conforme  
 $N \rightarrow \infty$

❖ Resumindo: o estimador do valor médio é definido como:

$$\hat{m}_x = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x(n)$$

❖ Em que:

$$B[\hat{m}_x] = E[\hat{m}_x] - m_x = 0$$

$$var[\hat{m}_x] = \frac{\sigma_x^2}{N}$$

➤ O estimador é consistente quando N tende ao infinito (grande).

## Estimativa da variância de um sinal:

$$\hat{\sigma}_x^2 = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} [x(n) - \hat{m}_x]^2$$

$$E[\hat{\sigma}_x^2] = \frac{N-1}{N} \sigma_x^2$$



⇒ Valor esperado do estimador:

- Para uma polarização nula: divide-se a estimativa acima por N-1 em vez de N. Ou seja é melhor utilizar a seguinte equação para a estimativa da variância:

$$\hat{\sigma}_x^2 = \frac{1}{N-1} \sum_{n=0}^{N-1} [x(n) - \hat{m}_x]^2$$

⇒ Variância do estimador:

$$\text{var}[v] = \frac{1}{N} \left[ E[v^2] + E^2[v] \right] \quad \text{onde: } v = \hat{\sigma}_x^2$$

⇒ Para  $N \rightarrow \infty$  a variância tende a zero.

➤ Como para  $N$  um valor muito grande a polarização e a variância de  $\hat{\sigma}_x^2$ , tende a zero a equação abaixo é uma estimativa consistente da variância:

$$\hat{\sigma}_x^2 = \frac{1}{N-1} \sum_{n=0}^{N-1} [x(n) - \hat{m}_x]^2$$

## Estimativa da função de autocorrelação:

⇒ Primeiro modo:

$$\hat{r}_x(k) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1-|k|} x^*(n)x(n+k)$$

Admitindo  $m_x = 0$

$$E[\hat{r}_x(k)] = \frac{N-|k|}{N} \gamma_x(k)$$

$$\text{var}[\hat{r}_x(k)] \approx \frac{1}{N} \sum_{l=-\infty}^{\infty} [\gamma_x^2(l) + \gamma_x(l+k)\gamma_x(l-k)]$$

- Para valores de  $k$ , próximos de  $N$ , o estimador é altamente polarizado.

“tem-se poucos pontos no cálculo da estimativa”.

$$\text{"Bias"} \quad B = \frac{k}{N} \gamma_x(k) \neq 0$$

- Portanto para polarização baixa os valores de  $k$  devem ser pequenos quando comparados com  $N$ .
- Para valores grandes de  $N$  a variância é aproximadamente nula.

$$\text{var}[\hat{r}_x(k)] \approx 0$$

## Estimativa da função de autocorrelação:

$$\Rightarrow \text{Segundo modo: } \hat{r}_x(k) = \frac{1}{N - |k|} \sum_{n=0}^{N-1-|k|} x^*(n)x(n+k)$$

Admitindo  $m_x = 0 \rightarrow$

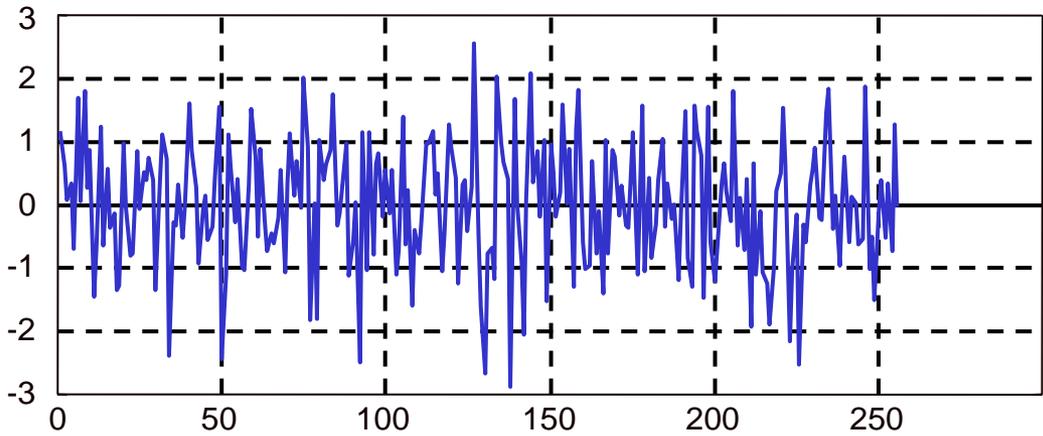
$$E[\hat{r}_x(k)] = \gamma_x(k)$$

$$\text{var}[\hat{r}_x(k)] \approx \frac{N}{(N - |k|)^2} \sum_{l=-\infty}^{\infty} [\gamma_x^2(l) + \gamma_x(l+k)\gamma_x(l-k)]$$

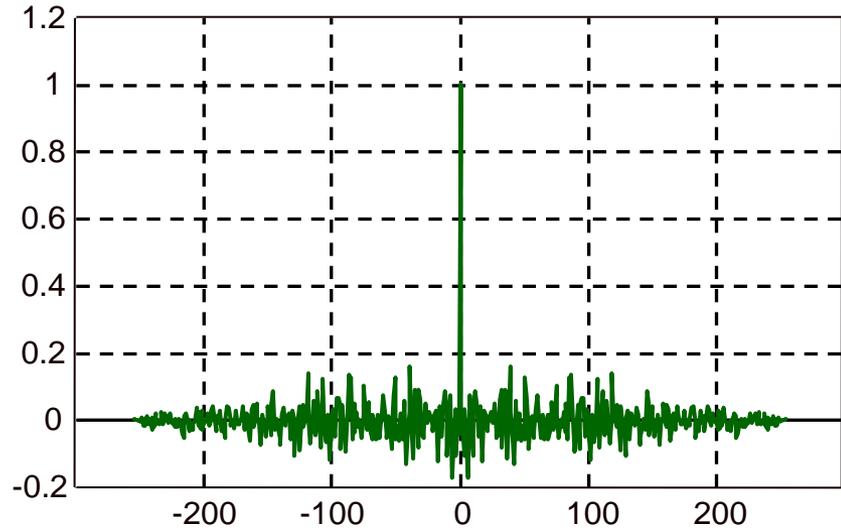
- Para valores de  $k$  próximos de  $N$  a variância é muito alta. “tem-se poucos pontos no cálculo da estimativa”.
- A polarização é nula. “Bias”  $B = 0$
- Conjectura-se que o primeiro estimador é melhor.

Exemplo: Função de autocorrelação do ruído branco gaussiano com valor médio zero e variância igual a 1.

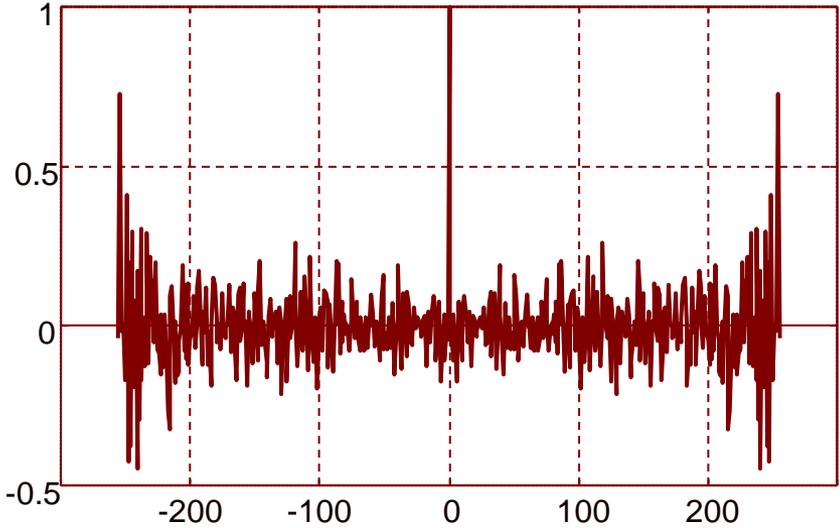
$$\gamma_x(k) = \sigma_x^2 \delta(k)$$



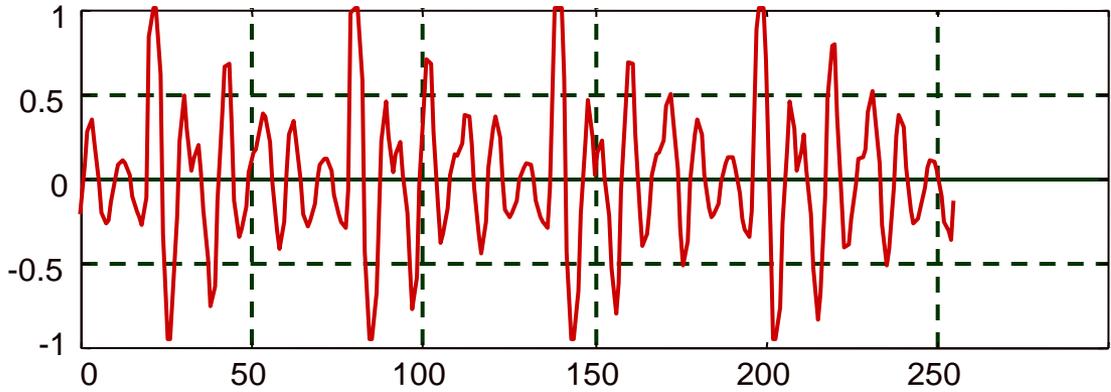
polarizada



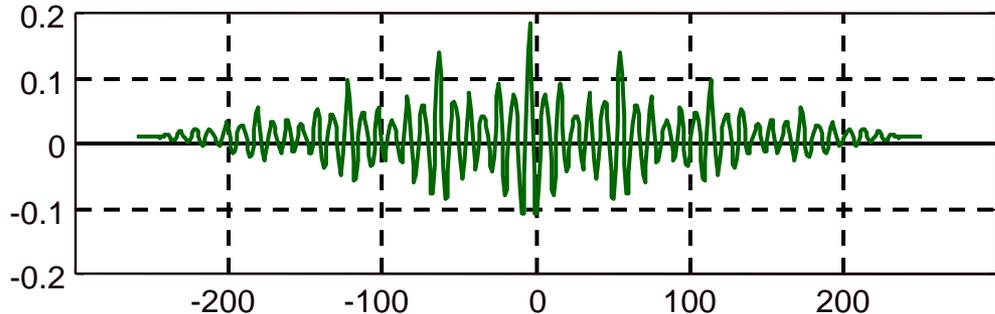
não-polarizada



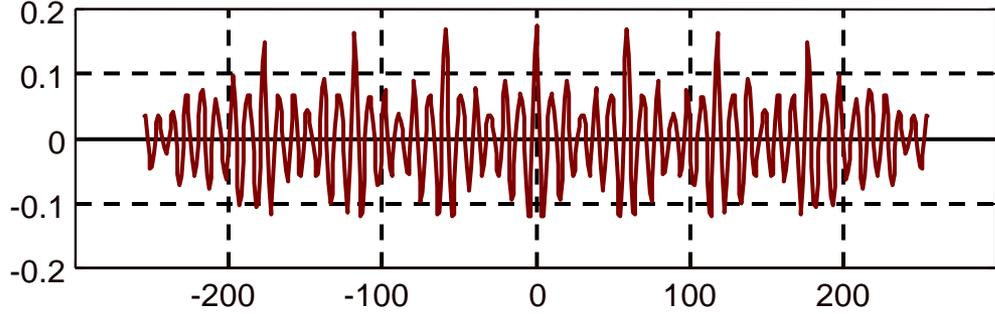
# Exemplo: Função de autocorrelação de um trecho de um sinal de voz



**polarizada**



**não polarizada**



## Resumo

✓ Processos aleatórios discretos no tempo modelam sequências (ou sinais discretos no tempo) desconhecidas.

⇒ Um p.a. discreto no tempo é uma coleção de sequências.

⇒ Pode ser pensado também como uma coleção de variáveis aleatórias.

⇒ Se  $X(n)$  é um processo aleatório então:

⇒  $X(1)$ ,  $X(3)$  e  $X(1000)$  são variáveis aleatórias para  $n$  particular.

⇒ **Classes de processos aleatórios:**

⇒ Estacionário - Estacionário no sentido amplo - Ergódico.

## Resumo

- ✓ Parâmetros importantes:
  - ⇒ Função densidade de probabilidade,
  - ⇒ Função de autocorrelação – Densidade espectral de potência,
  - ⇒ Função de correlação cruzada,
  - ⇒ Valor médio, variância (desvio padrão).
- ✓ na estimativa dos parâmetros admite-se, em geral, um processo aleatório ergódico.