Aula 1 - Integral de Riemann

Prof. Rogério Augusto dos Santos Fajardo

Instituto de Matemática e Estatística

MAT1352 – Cálculo para funções de uma variável real II

Problema do cálculo da área

- Como calcular a área abaixo do gráfico de uma função?
- Consideramos que o domínio da função f é um intervalo $[a, b]$.
- Dividimos $[a, b]$ em "pequenos intervalos".
- Em cada um desses pequenos intervalos escolhemos um ponto x qualquer.
- Consideramos o retângulo que tem como base esse intervalo e altura $f(x)$.
- A soma das áreas de todos esses retângulos é aproximadamente o valor da área abaixo de f.
- Quanto menor o tamanho desses pequenos intervalos, melhor é a aproximação da área.

Definição formal: partição

- Uma *partição* de um intervalo $[a, b]$ é um subconjunto finito P de $[a, b]$ que possui a e b como elementos.
- **Notação:** quando escrevemos $P = \{x_0, \ldots, x_n\}$ e que P é uma partição, fica implícito que essa enumeração está em ordem crescente. Isto é, $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$.
- Definimos o *diâmetro* de uma partição $P = \{x_0, \ldots, x_n\}$ como o máximo do conjunto $\{x_i - x_{i-1} : 1 \leq i \leq n\}$.
- Isto é, o diâmetro de uma partição de um intervalo é o máximo dos tamanhos de cada pequeno intervalo que o compõe.
- Denotamos o diâmetro de uma partição P por $diam(P)$.

Partição etiquetada

- Uma *amostra* para uma partição $P = \{x_0, \ldots, x_n\}$ é uma n-upla ordenada $(t_1, \ldots, t_n)$ satisfazendo $t_i \in [x_{i-1}, x_i]$, para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$.
- Isto é, uma amostra "escolhe" um ponto em cada um dos pequenos intervalos que compõem a partição.
- Note que $a = x_0 \leq t_1 \leq x_1 \leq \ldots \leq x_{n-1} \leq t_n \leq x_n = b$.
- Uma *partição etiquetada* é um par (P, A), onde P é uma partição e A uma amostra para P.
- Se (P, A) é uma partição etiquetada, definimos o *diâmetro* de (P, A) – que denotaremos por $diam(P, A)$ – como o diâmetro de P.

Soma de Riemann

- Supondo que:
  - $f : D \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função;
  - $[a, b] \subseteq D$;
  - $P = \{x_0, \ldots, x_n\}$ é uma partição de $[a, b]$;
  - $A = (t_1, \ldots, t_n)$ é uma amostra para P;
- definimos:

$$\sum_{(P,A)} f := \sum_{i=1}^{n} f(t_i)(x_i - x_{i-1}).$$

- Tal soma é chamada de *soma de Riemann de f no intervalo $[a, b]$ para a partição etiquetada (P, A)*.

Exemplo

Calcule $\sum_{(P,A)} f$, onde:

- $f(x) = 4x - x^2$;
- $[a, b] = [0, 4]$;
- $P = \{0, 1, 2, 3, 4\}$;
- $A = (\frac{1}{2}, 1\frac{1}{2}, 2\frac{1}{2}, 3\frac{1}{2})$.

Exemplo 2

Calcule $\sum_{(P,A)} f$, onde:

- $f(x) = 2x - x^2$;
- $[a, b] = [0, 4]$;
- $P = \{0, 1, 2, 3, 4\}$;
- $A = (\frac{1}{2}, 1\frac{1}{2}, 2\frac{1}{2}, 3\frac{1}{2})$.

Funções Riemann-integráveis

- Seja $f : D \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função, com $[a, b] \subseteq D$.
- Dizemos que f é *Riemann-integrável em* $[a, b]$ (ou somente *Riemann-integrável*, quando $D = [a, b]$) se $\displaystyle\sum_{(P,A)} f$ tende a algum número real, quando $diam(P, A)$ tende a 0, sendo (P, A) partição etiquetada de $[a, b]$.
- Formalmente: quando existe um número real I tal que, para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que, para toda (P, A) partição etiquetada de $[a, b]$ cujo diâmetro é menor do que δ, temos

$$|I - \sum_{(P,A)} f| < \varepsilon$$

Exemplo de função não Riemann-integrável:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x \text{ é racional} \\ 1, & \text{se } x \text{ é irracional} \end{cases}$$

- Seja $P = \{x_0, \ldots, x_n\}$ qualquer partição de $[0, 1]$.
- Seja $A_1 = (y_1, \ldots, y_n)$ amostra para P com $y_i \in \mathbb{Q}$.
- Seja $A_2 = (z_1, \ldots, z_n)$ amostra para P com $z_i \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.
- Temos $\displaystyle\sum_{(P,A_1)} f = 0$ e $\displaystyle\sum_{(P,A_2)} f = 1$.
- Logo, f não é Riemann-integrável em $[0, 1]$.

Teorema 1

Toda função contínua é Riemann-integrável.

Integral de Riemann

- Seja $f : D \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função Riemann-integrável em $[a, b] \subseteq D$.
- Seja I o limite de $\displaystyle\sum_{(P,A)} f$ quando $diam(P)$ tende a 0.
- I será chamado de *integral de Riemann de* f *entre* a *e* b.
- I será denotado por $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$.
- Também escrevemos $\displaystyle\int_a^b f(x)dx = \lim_{diam(P,A)\to 0} \sum_{(P,A)} f$.

Observações finais

- Há outras definições de integral (Lebesgue, Darboux, Gauge, etc.) na literatura matemática.
- Como não estudaremos outras definições de integral nesta disciplina, usaremos as expressões *integral* e *integrável* no lugar de *integral de Riemann* e *Riemann-integrável*, respectivamente.
- Também usamos a expressão *integral definida*, para não ser confundido com *primitiva*, ou *integral indefinida*, que veremos mais à frente.
- Também dizemos *integral própria*, para contrastar com a definição de *integral imprópria*, que veremos posteriormente.