Capítulo 1

Probabilidade - Primeiros Conceitos

1.1 Probabilidade Condicional

Considerando novamente o lançamento de dois dados honestos, vamos chamar de A o evento "sair o total 6 ", ou seja:

$$A = \{(1,5),(2,4),(3,3),(4,2),(5,1)\}.$$

Como $|A| = 5$ (número de elementos de A) e como já vimos $|\Omega| = 36$ (número de elementos de Ω), pela abordagem clássica, temos que:

$$\mathbb{P}(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{5}{36} \sim \frac{5}{35} = \frac{1}{7}.$$

Vamos supor que não se presencie o lançamento dos dados, mas se receba a seguinte informação: "saiu o número 1 em algum dos lançamentos".

Nestas condições, pergunta-se:

Qual é a probabilidade de A dada essa nova informação? Ou seja, qual a probabilidade do total ser 6 no lançamento de dois dados honestos, sendo que saiu o número 1 em algum dos lançamentos?

Com essa nova informação temos um novo espaço amostral.

$$\Omega_{\text{novo}} = \{(1,1);(1,2);(1,3);(1,4);(1,5);(1,6);(2,1);(3,1);(4,1),(5,1),(6,1)\},$$

E nesse novo espaço A fica reduzido a.

$$A_{\text{novo}} = \{(1,5);(5,1)\},$$

$$\mathbb{P}(A_{\text{novo}}) = \frac{|A_{\text{novo}}|}{|\Omega_{\text{novo}}|} = \frac{2}{11}$$

Essa nova probabilidade de A é chamada de *probabilidade condicional.*

Definição 1.1.1 *Seja* $(\Omega, \mathbb{P})$ *um espaço de probabilidade, com* A *e* B *eventos de* Ω*, com* $\mathbb{P}(B) > 0$*. A probabilidade condicional de qualquer evento* A*, dado um evento* B *é definida por:*

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}.$$

Exemplo 1.1.1 *Considerando novamente o lançamento de dois dados honestos.*

Sejam A o evento "sair o total de 6 na soma dos dois lançamentos"

$$A = \{(1,5),(2,4),(3,3),(4,2),(5,1)\},$$

e B o evento "sair o número 1 em qualquer lançamento"

$$B = \{(1,1);(1,2);(1,3);(1,4);(1,5);(1,6);(2,1);(3,1);(4,1),(5,1),(6,1)\},$$

$$\Rightarrow \quad \mathbb{P}(B) = 11/36.$$

E:

$$A \cap B = \{(1,5),(5,1)\} \quad \Rightarrow \quad \mathbb{P}(A \cap B) = 2/36$$

.

Portanto a probablidade de A, dado que o evento B ocorreu, é:

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{2/36}{11/36} = \frac{2}{11}.$$

A Probabilidade Condicional é um exemplo de uma Função de Probabilidade? Será que obedece os Axiomas?

Vamos verificar os três axiomas da definição axiomática para $\mathbb{P}(A|B)$:

1. Primeiro precisamos verificar se $\mathbb{P}(A|B) \geq 0$.

   Se $\emptyset \subset (A \cap B)$, temos que $0 = \mathbb{P}(\emptyset) \leq \mathbb{P}(A \cap B)$.

   Então
   $$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} \geq \frac{\mathbb{P}(\emptyset)}{\mathbb{P}(B)} = 0 \tag{1.1}$$

   Por (1.1), concluímos que $\mathbb{P}(A|B) \geq 0$.

2. Agora vamos verificar se $\mathbb{P}(\Omega|B) = 1$. Seja B um evento de Ω.

$$\Rightarrow \mathbb{P}(\Omega|B) = \frac{\mathbb{P}(\Omega \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}(B)} = 1.$$

3. O axioma 3 diz que, dado dois ou mais eventos disjuntos, a probabilidade conjunta desses eventos é igual a soma de cada um dos eventos.

   Portanto, dado A_1 e A_2 tais que $A_1 \cap A_2 = \emptyset$, temos que verificar se

$$\mathbb{P}(A_1 \cup A_2|B) = \mathbb{P}(A_1|B) + \mathbb{P}(A_2|B).$$

   Então vamos começar:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(A_1 \cup A_2|B) &= \frac{\mathbb{P}((A_1 \cup A_2) \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\mathbb{P}((A_1 \cap B) \cup (A_2 \cap B))}{\mathbb{P}(B)} \\
&= \frac{\mathbb{P}(A_1 \cap B)}{\mathbb{P}(B)} + \frac{\mathbb{P}(A_2 \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \mathbb{P}(A_1|B) + \mathbb{P}(A_2|B).
\end{aligned}$$

Portanto, a Probabilidade Condicional satisfaz os axiomas da definição axiomática, e é uma Função de Probabilidade.

Exemplo 1.1.2 *Em um reino, há um rei que vem de uma família de dois filhos.* ***Nestas condições pergunta-se:*** *Qual é a probabilidade do rei ter uma irmã?*

Vamos denotar por H o irmão do rei se for homem e M se for mulher.

O espaço amostral em questão é

$$\Omega = \{(H,H),(H,M),(M,H),(M,M)\}.$$

Vamos assumir que os quatros eventos elementares sejam equiprováveis.

$$\mathbb{P}(\{(H,H)\}) = \mathbb{P}(\{(H,M)\}) = \mathbb{P}(\{(M,H)\}) = \mathbb{P}(\{(M,M)\}) = 1/4$$

Sejam os eventos:

$U =$ *"uma das crianças é uma menina"*$= \{(H,M),(M,H),(M,M)\}$.

V*: "uma das crianças é o rei"*$= \{(H,H),(H,M),(M,H)\}$.

$U \cap V =$ *"uma das crianças é uma menina e a outra criança é o rei "*$= \{(H,M),(M,H)\}$.

Logo, a probabilidade do rei ter uma irmã, é dada por:

$$\mathbb{P}(U|V) = \frac{\mathbb{P}(U \cap V)}{\mathbb{P}(V)} = \frac{2/4}{3/4} = \frac{2}{3}.$$

1.1.1 Teorema do Produto

Podemos usar a Probabilidade Condicional,

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)},$$

para escrever a seguinte expressão:

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(B) \cdot \mathbb{P}(A|B),\ \mathbb{P}(B) > 0.$$

Ou ainda:

$$\mathbb{P}(B|A) = \frac{\mathbb{P}(B \cap A)}{\mathbb{P}(A)},$$

e chegar em

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B|A),\ \mathbb{P}(A) > 0.$$

Essas expressões impõem a ideia de passo-a-passo, de tempo

Exemplo 1.1.3 *Uma urna contém 5 bolas brancas e 2 bolas azuis. Uma bola é retirada e, sem reposição, uma segunda bola é retirada.*

Qual a probabilidade de ambas serem brancas?

Sendo A e B dois eventos:

B_1*: a primeira bola retirada é branca.*

B_2*: a segunda bola retirada é branca.*

Esses dois eventos interferem um no outro, pois a probabilidade de ocorrência de B_2 depende do que ocorreu na retirada da primeira bola.

Temos que:

$$\mathbb{P}(B_1) = 5/7.$$

Tendo sido retirada uma bola branca e não havendo reposição na urna, restam agora 6 bolas: 4 brancas e 2 azuis.

Logo, a probabilidade de retirar-se outra bola branca na segunda retirada é:

$$\mathbb{P}(B_2|B_1) = 4/6 = 2/3.$$

Portanto,

$$\mathbb{P}(B_1 \cap B_2) = \mathbb{P}(B_1)\mathbb{P}(B_2|B_1) = (5/7)(2/3) = 10/21.$$

Qual a probabilidade da segunda bola retirada ser azul sabendo-se que a primeira bola retirada foi branca?

Qual a probabilidade da primeira bola retirada ser azul sabendo-se que a segunda bola retirada foi branca?

1.1.2 Teorema da Multiplicação

Seja $(\Omega, \mathbb{P})$ um espaço de probabilidade e $A_1, A_2 \ldots, A_n$ eventos de Ω, tais que $\mathbb{P}(A_i) > 0$ para todo i, tem-se:

$$\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n) = \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}(A_2|A_1)\mathbb{P}(A_3|A_1 \cap A_2) \ldots \mathbb{P}(A_n|A_1 \cap \ldots \cap A_{n-1}).$$

Vemos que o *Teorema da multiplicação* é uma generalização do *Teorema do Produto*, de modo que agora temos a probabilidade da intersecção de n eventos $A_1, A_2, ...A_n$, por meio das probabilidades condicionais sucessivas.

Para verificar que a fómula funciona, vamos considerar os eventos $A_1, A_2, A_3 \in \Omega$. A probabilidade de A_3 dado que a intersecção de A_1 e A_2 ocorreu é

$$\mathbb{P}(A_3|A_1 \cap A_2) = \frac{\mathbb{P}((A_1 \cap A_2) \cap A_3)}{\mathbb{P}(A_1 \cap A_2)}$$

Daí decorre que

$$\mathbb{P}((A_1 \cap A_2) \cap A_3) = \mathbb{P}(A_3|A_1 \cap A_2)\mathbb{P}(A_1 \cap A_2) = \mathbb{P}(A_3|A_1 \cap A_2)\mathbb{P}(A_2|A_1)\mathbb{P}(A_1).$$

A prova para n eventos é feita por indução.

Exemplo 1.1.4 *Uma urna contém 10 bolas idênticas das quais 5 são pretas, 3 são vermelhas e 2 são brancas. Quatro bolas são retiradas uma a uma e sem reposição. Encontre a probabilidade da primeira bola ser preta, da segunda ser vermelha, da terceira ser branca, e da quarta ser preta também.*

Vamos denotar por:

A_1 *o evento em que a primeira bola retirada é preta;*

A_2 *o evento em que a segunda bola retirada é vermelha;*

A_3 *o evento em que a terceira bola retirada é branca;*

A_4 *o evento em que a quarta bola retirada é preta;*

Sabendo que Ω será formado por todas as combinações possíveis de 4 bolas, qual a probabilidade pedida?

Queremos saber a probabiliade de inrterseção desses 4 eventos elementares, assim a probabilidade de interesse será denotada por

$$\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4) = \mathbb{P}(A_4|A_1 \cap A_2 \cap A_3)\mathbb{P}(A_3|A_2 \cap A_1)\mathbb{P}(A_2|A_1)\mathbb{P}(A_1).$$

Vamos assumir que em cada passo os eventos elementares de Ω sejam equiprováveis. Sabendo que

- $\mathbb{P}(A_1) = 5/10$
- $\mathbb{P}(A_2|A_1) = 3/9$
- $\mathbb{P}(A_3|A_2 \cap A_1) = 2/8$
- $\mathbb{P}(A_4|A_1 \cap A_2 \cap A_3) = 4/7$

Obtemos

$$\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4) = (5/10)(3/9)(2/8)(4/7) = (1/42).$$

1.1.3 Conceito de Partição de Ω

Dizemos que a coleção $\{A_1, A_2, ...A_n\}$ forma uma partição de Ω, se seus elementos forem disjuntos, ou seja, $A_i \cap A_j = \emptyset$ para todo i e todo j com $i \neq j$, e se a sua união, denotada por $\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i$, for igual a Ω.

Seja B um evento, tal que $B \subset \Omega$. De maneira geral, para uma partição $\{A_1, A_2, ...A_n\}$ de Ω, temos que:

$$B = \bigcup_{i=1}^{n}(B \cap A_i).$$

Isso implica em

$$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} B \cap A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(B \cap A_i) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(B|A_i)\mathbb{P}(A_i).$$

1.1.4 Teorema da Probabilidade Total

Seja $\{A_1, A_2, ...A_n\}$ uma partição de Ω e B um evento. Sendo $\mathbb{P}(A_i) > 0$ para todo i, temos que:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(B) &= \mathbb{P}(A_1 \cap B) + ... + \mathbb{P}(A_n \cap B) \\
&= \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}(B|A_1) + ... + \mathbb{P}(A_n)\mathbb{P}(B|A_n) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(B|A_i)\mathbb{P}(A_i)
\end{aligned}$$

Exemplo 1.1.5 *Observou-se que num posto de gasolina da BR, a proporção de motoristas que usam gasolina comum, gasolina aditivada e gasolina premium durante um certo período de tempo é: 30%, 35% e 25% respectivamente. A proporção com que os motoristas enchem o tanque com essas gasolinas é: 30%, 50% e 60%. Qual é a probabilidade de um motorista selecionado de maneira aleatória dentre os clientes do posto, e nesse mesmo período de tempo colocar gasolina no seu tanque?*

Denotamos os seguintes eventos:

E - *"encher o tanque no período de tempo considerado ".*

A_1 - *"motorista usa gasolina comum ".*

A_2 - *"motorista usa gasolina aditivada ".*

A_3 - *"motorista usa gasolina premium ".*

A partir desses eventos obtemos as seguintes probabilidades:

$$\mathbb{P}(A_1) = 0.4,\ \mathbb{P}(A_2) = 0.35,\ \mathbb{P}(A_3) = 0.25,$$

$$\mathbb{P}(E|A_1) = 0.3,\ \mathbb{P}(E|A_2) = 0.5 \text{ e } \mathbb{P}(E|A_3) = 0.6.$$

Seja $\{A_1, A_2, A_3\}$ *a partição de* Ω *e* E *o evento de interesse. Pelo teorema da probabilidade total, temos que:*

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(E) &= \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}(E|A_1) + \mathbb{P}(A_2)\mathbb{P}(E|A_2) + \mathbb{P}(A_3)\mathbb{P}(E|A_3) \\
&= (0.4)(0.3) + (0.35)(0.5) + (0.25)(0.6) = 0.445.
\end{aligned}$$

1.1.5 Fórmula de Bayes

Seja B um evento e $\{A_1, A_2 \text{ e } A_3\}$ uma partição do espaço amostral Ω. Assumindo que $\mathbb{P}(A_i) > 0$ para $i = 1, 2$ e 3, temos uma outra aplicação da probabilidade condicional:

$$\mathbb{P}(A_i|B) = \frac{\mathbb{P}(A_i)\mathbb{P}(B|A_i)}{\mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}(B|A_1) + \mathbb{P}(A_2)\mathbb{P}(B|A_2) + \mathbb{P}(A_3)\mathbb{P}(B|A_3)}.$$

Podemos escrever essa mesma fórmula para A_1 e A_2.

Observem que se tomarmos um evento A, então A e A^c formam uma partição de Ω. Temos assim que

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B|A)}{\mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B|A) + \mathbb{P}(A^c)\mathbb{P}(B|A^c)}.$$

Exemplo 1.1.6 *Durante o mês de agosto a probabilidade de chuva em um dia determinadado é de* $4/10$.

O Fluminense ganha um jogo em um dia com chuva com probabilidade $6/10$ *e em um dia sem chuva com probabilidade* $4/10$.

Sabendo-se que o Fluminense ganhou um jogo num dia de agosto, qual a probabilidade de que tenha chovido nesse dia?

Denotamos os eventos por:

A - "O Fluminense ganhou o jogo ".

A_1 - "Choveu ".

A_2 - "Não choveu ".

As probabilidades de vitória do Fluminense, em dias de chuva e em dias sem chuva, são respectivamente:

$$\mathbb{P}(A|A_1) = \frac{6}{10} \quad e \quad \mathbb{P}(A|A_2) = \frac{4}{10}.$$

Portanto, a probabilidade de ter chovido em um dia em que o Fluminense ganhou um jogo, é dada por

$$\mathbb{P}(\ choveu \mid ganhou) = \mathbb{P}(A_1|A) = \frac{(4/10)(6/10)}{(4/10)(6/10) + (6/10)(4/10)} = 1/2.$$

Exemplo 1.1.7 *Um teste para uma doença rara está correto 95% das vezes. Em outras palavras, se uma pessoa tem a doença, o teste dá positivo com probabilidade 0.95, e se a pessoa não tem a doença o resultado do teste dá negativo com probabilidade 0.95.*

Uma pessoa escolhida aleatoriamente de determinada população tem probabilidade 0.001 de ter a doença. Dado que o resultado do teste para uma determinada pessoa deu positivo, qual é a probabilidade dela ter a doença?

Temos os seguintes eventos:

A = *"a pessoa possui a doença ".*

A^c = *"a pessoa não possui a doença ".*

B = *"o resultado do teste deu positivo ".*

E sabemos que:

$$\mathbb{P}(B|A) = 0.95 \Rightarrow \mathbb{P}(B|A^c) = 0.05.$$

Portanto a probabilidade da pessoa ter a doença, sendo que o resultado do exame deu positivo é:

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{(0.001)(0.95)}{(0.001)(0.95) + (0.999)(0.05)} = 0.0187.$$

O próximo exemplo foi retirado de Morettin(1999).

Exemplo 1.1.8 *A administração de um fundo de investimentos em ações pretende divulgar, após o encerramento do pregão, a probabilidade de queda de um índice da bolsa no dia seguinte, baseando-se nas informações disponíveis até aquele momento. Suponha que a previsão inicial seja de 0.10. Após encerrado o pregão, nova informação sugere uma alta do dólar frente ao real. A experiência passada indica que, quando houve queda da bolsa no dia seguinte, 20% das vezes foram precedidas por esse tipo de notícia, enquanto, nos dias em que a bolsa esteve em alta, apenas em 5% das vezes houve esse tipo de notícia no dia anterior.*

Chamando de E o evento que indica "queda da bolsa ", a sua probabilidade a priori é $\mathbb{P}(E) = 0.10$, enquanto a probabilidade de alta é $\mathbb{P}(E^c) = 0.90$. Se B indicar "alta do dólar ", então temos que

$$\mathbb{P}(B|E) = 0,20.$$

$$\mathbb{P}(B|E^c) = 0,05.$$

Logo pelo Teorema de Bayes, teremos que

$$\mathbb{P}(B|E) = \frac{\mathbb{P}(E)\mathbb{P}(B|E)}{\mathbb{P}(E)\mathbb{P}(B|E) + \mathbb{P}(E^c)\mathbb{P}(B|E^c)}.$$

ou seja,

$$\mathbb{P}(B|E) = \frac{(0,10)(0,20)}{(0,10)(0,20) + (0,90)(0,05)} = \frac{0,02}{0,065} = 0,31.$$

Portanto a nova informação aumenta a probabilidade de que haja queda na bolsa de 10% para 31%.

Suponha, agora, que horas depois surja uma nova informação relevante: o Banco Central irá reduzir a taxa de juros vigente a partir do dia seguinte. Denotando-se, agora, por B_1 o evento "alta do dólar"e por B_2 o evento "queda na taxa de juros ", o interessante será saber como essa nova informação, B_2, afetará a probabilidade calculada, $\mathbb{P}(E|B_1)$. Segue-se que essa é agora a probabilidade a priori para E com respeito a B_2.

Novamente, informações passadas mostram que, dado que tenha havido alta no dólar e queda na bolsa, 60% das vezes foram precedidas de queda dos juros. Então temos que

$$\mathbb{P}(B_2|E, B_1) = 0,10.$$

$$\mathbb{P}(B_2|E^c, B_1) = 0,60.$$

O Teorema de Bayes fica escrito agora na forma

$$\mathbb{P}(E|B_1, B_2) = \frac{\mathbb{P}(E|B_1)\mathbb{P}(B_2|E, B_1)}{\mathbb{P}(E|B_1)\mathbb{P}(B_2|E, B_1) + \mathbb{P}(E^c|B_1)\mathbb{P}(B_2|E^c, B_1)}.$$

do que segue, que

$$\mathbb{P}(E|B_1, B_2) = \frac{(0,31)(0,10)}{(0,31)(0,10) + (0,69)(0,60)} = \frac{0,031}{0,445} = 0,07.$$

Ou seja, a informação B_2 causa um decréscimo na probabilidade de queda da bolsa, de 0.31 para 0.07, que é menor ainda do que a probabilidade a prori inicial, $\mathbb{P}(E) = 0.10$.

Observe que usamos a notação $\mathbb{P}(E|B_1, B_2) = \mathbb{P}(E|B_1 \cap B_2)$*, ou seja, para a probabilidade de* E *dado a ocorrência simultânea dos eventos* B_1 *e* B_2*.*

1.1.6 Exercícios

(a) Em um dia qualquer a chance de chover é de 25%. A chance de chover em dois dias consecutivos é de 10%.

  i. Dado que está chovendo hoje, qual é a chance de chover amanhã?

  ii. Dado que choverá amanhã, qual é a chance de chover hoje?
  Dica: crie uma notação para os eventos de interesse, tendo como índices o tempo: A_n**="choveu hoje",** A_{n+1}**="choverá amanhã". Assim, as informações dadas podem ser escritas como** $\mathbb{P}(A_n) = 25\%$ **e** $\mathbb{P}(A_n \cap A_{n+1}) = 10\%$

(b) Os eventos A, B e C satisfazem as seguintes condições: $\mathbb{P}(A|B \cap B) = 1/4$, $\mathbb{P}(B|C) = 1/3$ e $\mathbb{P}(C) = 1/2$. Encontre $\mathbb{P}(A^c \cap B \cap C)$.

(c) Sejam A e B dois eventos independentes para os quais $\mathbb{P}(B|A \cup B) = 2/3$ e $\mathbb{P}(A|B) = 1/2$. Encontre $\mathbb{P}(B)$.

(d) Mostre que para a probabilidade condicional $\mathbb{P}(A|B)$ vale que

  i. $\mathbb{P}(A_1 \cup A_2|B) = \mathbb{P}(A_1|B) + \mathbb{P}(A_2|B)$ quando A_1 e A_2 forem disjuntos.

  ii. $\mathbb{P}(A|B) = 1 - \mathbb{P}(A^c|B)$.

1.2 Independência de eventos

Definição 1.2.1 *Sejam* A *e* B *dois eventos suponha que* $\mathbb{P}(A) > 0$*. O evento* B *é dito independente do evento* A *se:*

$$\mathbb{P}(B|A) = \mathbb{P}(B).$$

Esta definição é bastante intuitiva, pois diz que a probabilidade de ocorrência de B não é influenciada com a informação de que o evento A ocorreu.

Portanto se o evento B é independente do evento A, então pela fórmula de probabilidade condicional, temos que:

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B).$$

No caso de $A \cap B = \emptyset$, temos:

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(\emptyset) = 0 = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B).$$

Isso quer dizer que A e B não são independentes a menos que um deles tenha probabilidade zero.

Se o evento B for independente do evento A, então esperamos que A também seja independente de B. De fato isso ocorre, como é verificado a seguir:

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}(B)} = \mathbb{P}(A).$$

Exemplo 1.2.1 *Considerando novamente o lançamento de duas moedas, onde a probabilidade de todos os eventos elementares é igual a* $1/4$, *ou seja, a probabilidadede de cada evento sair é:*

$$\mathbb{P}(\{HH\}) = \mathbb{P}(\{HT\}) = \mathbb{P}(\{TH\}) = \mathbb{P}(\{TH\}) = 1/4.$$

Temos os seguintes eventos:

A_1 - *"sair cara no primeiro lançamento ", tal que* $A_1 = \{HH, HT\}$.

B_2 - *"sair coroa no segundo lançamento ", tal que* $B_2 = \{HT, TT\}$.

$A_1 \cap B_2$ - *"sair cara no primeiro lançamento e sair coroa no segundo", tal que* $A_1 \cap B_2 = \{HT\}$.

Calculando-se as probabilidades desses eventos, obtemos:

$$\mathbb{P}(B_2|A_1) = 1/2 = \mathbb{P}(B_2).$$

Portanto, B_2 *é independente de* A_1.

Exemplo 1.2.2 *Considerando o exemplo anterior, só que agora com cada evento possuindo probabilidades diferentes, ou seja, agora temos que a probabilidade de cada evento sair é:*

$$\mathbb{P}(\{HH\}) = 5/24,\ \mathbb{P}(\{HT\}) = 9/24,\ \mathbb{P}(\{TH\}) = 7/24 \quad e \quad \mathbb{P}(\{TT\}) = 3/24.$$

A_1 e B_2 continuam sendo os mesmos eventos, logo:

$$\mathbb{P}(A_1) = \mathbb{P}(\{HT\}) + \mathbb{P}(\{HH\}) = 9/24 + 5/24 = 14/24 = 7/12$$

$$\mathbb{P}(B_2) = \mathbb{P}(\{HT\}) + \mathbb{P}(\{TT\} = 9/24 + 3/24 = 12/24 = 6/12$$

$$\mathbb{P}(A_1 \cap B_2) = \mathbb{P}(\{HT\}) = 9/24.$$

Então temos que

$$\mathbb{P}(B_2|A_1) = \frac{\mathbb{P}(A_1 \cap B_2)}{\mathbb{P}(A_1)} = \frac{9/24}{14/24} = 9/14.$$

Como $\mathbb{P}(B_2|A_1) \neq \mathbb{P}(B_2)$, então nesse caso B_2 é dependente de A_1.

Conclusão: A independência de eventos "depende " da distribuição de probabilidade.

Exemplo 1.2.3 *Suponha-se que joguemos dois dados. Definindo os eventos A, B e C da seguinte forma:*

A - "o primeiro dado mostra um número par ".

B - "o segundo dado mostra um número ímpar ".

C - "ambos os dados mostram números ímpares ou ambos mostram números pares ".

Decorre daí que:

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(C) = 1/2$$

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A \cap C) = \mathbb{P}(B \cap C) = 1/4.$$

Observamos a partir disso as seguintes igualdades:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(A \cap B) &= \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B) \\ \mathbb{P}(B \cap C) &= \mathbb{P}(B)\mathbb{P}(C) \\ \mathbb{P}(A \cap C) &= \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(C). \end{aligned}$$

Portanto, os três eventos são todos independentes dois a dois.

Contudo,

$$\mathbb{P}(A \cap B \cap C) = 0 \neq \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)\mathbb{P}(C).$$

Este exemplo sugere a seguinte definição.

Definição 1.2.2 *Diremos que os três eventos A, B e C são mutualmente independentes se, e somente se, todas as condições seguintes forem válidas:*

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(A \cap B) &= \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B) \\ \mathbb{P}(A \cap C) &= \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(C) \\ \mathbb{P}(B \cap C) &= \mathbb{P}(B)\mathbb{P}(C) \\ \mathbb{P}(A \cap B \cap C) &= \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)\mathbb{P}(C). \end{aligned}$$

Conclusão: Os eventos $A_1, A_2, ..., A_n$, tal que $(n \geq 2)$, são chamados de coletivamente independentes se:

$$\mathbb{P}(A_{i1} \cap A_{i_2} \cap \cdots \cap A_{i_m}) = \mathbb{P}(A_{i_1}) \cdot \mathbb{P}(A_{i_2}) \cdot \ldots \mathbb{P}(A_{i_m}),$$

para todo $1 \leq i_1 \leq i_2 \leq \cdots < i_m \leq n, m = 2, 3...$

1.2.1 Exercícios

1. Um dado honesto é lançado duas vezes. Seja A o evento "a soma dos lançamentos é igual a 4", e seja B o evento "pelo menos um dos resultados dos lançamentos é igual a 3".

   a. Calcule $\mathbb{P}(A|B)$.

   b. A e B são independentes? Justifique sua resposta.

2. Sejam A e B dois eventos independentes, tais que $\mathbb{P}(B|A \cup B) = 2/3$ e $\mathbb{P}(A|B) = 1/2$. Quanto vale $\mathbb{P}(B)$?

3. Sejam A e B dois eventos quaisquer. Se A e B forem independentes mostre que

   a. A e B^c também são independentes;

   b. A^c e B também são independentes;

4. Seja o espaço de probabilidade $(\Omega, \mathbb{P})$, tal que

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\},$$

e

$$\mathbb{P}(\{\omega_1\}) = \mathbb{P}(\{\omega_2\}) = \mathbb{P}(\{\omega_3\}) = \mathbb{P}(\{\omega_4\}) = 1/4.$$

Sejam os seguintes eventos:

- $A = \{\omega_1, \omega_2\}$;
- $B = \{\omega_2, \omega_3\}$;
- $C = \{\omega_2, \omega_4\}$.

(a) Mostre que:

   i. A e B são independentes;

   ii. A e C são independentes;

   iii. B e C são independentes.

(b) Os eventos A, B e C são independentes? Justifique sua resposta.

5. Sejam A e B dois eventos independentes, tais que $0 < \mathbb{P}(A) < 1$ e $0 < \mathbb{P}(B) < 1$. Responda as seguintes perguntas com justificativas e contra-exemplos quando forem necessários.

   a. Se A e B forem disjuntos, podem ser independentes?

   b. Se A e B forem independentes, podem ser disjuntos?

   c. Se $A \subset B$, podem A e B serem independentes?

   d. Se A e B forem independentes, podem A e $A \cup B$ serem independentes?