

Subanéis versus ideais

Definição A: Seja $(A, +, \cdot)$ um anel (comutativo com unidade). Um subconjunto $B \subseteq A$ é um **subanel** de A se satisfaz:

- (i) $0 \in B$ e $1 \in B$.
- (ii) B é fechado pela subtração, isto é, $x, y \in B \implies x - y \in B$.
- (iii) B é fechado pela multiplicação, isto é, $x, y \in B \implies xy \in B$.

Se $(L, +, \cdot)$ é um corpo, um subconjunto $K \subseteq L$ é um **subcorpo** de L se K é um subanel de L que também satisfaz:

- (iv) $x \in K, x \neq 0 \implies x^{-1} \in K$.

Definição B: Seja $(A, +, \cdot)$ um anel (comutativo com unidade). Um subconjunto $I \subseteq A$ é um **ideal** de A se satisfaz:

- (v) $0 \in I$.
- (vi) I é fechado pela adição, isto é, $x, y \in I \implies x + y \in I$.
- (vii) I absorve, isto é, $x \in I, a \in A \implies ax \in I$.

Exemplos:

- (1) $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$. Nessa lista, cada um deles é subanel do outro no qual ele está contido. $\mathbb{Q}$ é subcorpo de $\mathbb{R}$; $\mathbb{R}$ é subcorpo de $\mathbb{C}$ e $\mathbb{Q}$ é subcorpo de $\mathbb{C}$.
- (2) $\mathbb{Z}[i]$ é subanel de $\mathbb{Q}(i)$ e $\mathbb{Q}(i)$ é subcorpo de $\mathbb{C}$. $\mathbb{Z}[i]$ também é subanel de $\mathbb{C}$.
- (3) $\mathbb{Z}[\sqrt{p}]$ é subanel de $\mathbb{Q}(\sqrt{p})$ e $\mathbb{Q}(\sqrt{p})$ é subcorpo de $\mathbb{R}$ e também de $\mathbb{C}$. $\mathbb{Z}[\sqrt{p}]$ também é subanel de $\mathbb{R}$ e de $\mathbb{C}$.
- (4) $\mathbb{Z}$ é subanel de $\mathbb{Q}$, mas não é um ideal de $\mathbb{Q}$ pois não satisfaz a condição (vii).
- (5) $A \subset A[X]$ é um subanel mas não é um ideal.

Mais exemplos:

- (6) Ideal gerado por um conjunto finito de elementos. Veja Garcia, Lequain Exemplo I.1.9, pág 14.

$$(\alpha_1, \dots, \alpha_n) := \{a_1\alpha_1 + \dots + a_n\alpha_n \mid a_1, \dots, a_n \in A\}.$$

Em particular, se $n = 1$ temos um ideal principal, isto é, um ideal I de A é **principal** se existe $\alpha \in A$ tal que $I = (\alpha) = \{a\alpha \mid a \in A\}$.

Obs: Veremos, mais tarde, que todo ideal de $\mathbb{Z}$ ou de $K[X]$ (K corpo) é principal.

Aviso: O gerador de um ideal principal não é único. Por exemplo, em $\mathbb{Z}$, $(n) = (-n)$ já que os múltiplos de n são os mesmos que os múltiplos de $-n$. Mais geralmente, se A é um anel, $a \in A, u \in U(A)$ (veja a definição das unidades de um anel A na lista de exercícios n.1) então $(a) = (ua)$. (Prove isto!)

- (7) Se $n \in \mathbb{Z}, n \neq 1$ então o ideal (principal) (n) não é um subanel pois $1 \notin I$ (parte da condição (i)).

Exercícios: Nos exercícios abaixo $(A, +, \cdot)$ será um anel (comutativo com unidade).

- (a) Seja $B \subseteq A$ um subconjunto não vazio. Mostre que se B satisfaz a condição (ii) acima então $0 \in B$.
- (b) Se $B \subseteq A$ é um subanel, então B também é fechado pela soma, isto é, $x, y \in B \implies x + y \in B$.
- (c) Se $I \subseteq A$ é um ideal, então I também é fechado pela subtração, isto é, $x, y \in I \implies x - y \in I$. Em particular, se $x \in I \implies -x \in I$.
- (d) Se $I \subseteq A$ é um subconjunto não vazio que satisfaz as condições (vi) e (vii) então $0 \in I$, isto é, I satisfaz a condição (v).
- (e) Se $I \subseteq A$ é um ideal, e $1 \in I$ então $I = A$. Mais geralmente, se I contém uma unidade $u \in U(A)$, então $I = A$.
- (f) Mostre que se A é um domínio e $B \subseteq A$ é um subanel, então B é um domínio. Em particular, todo subanel de um corpo é um domínio.