

OPERAÇÕES ENTRE CONJUNTOS

I. Definições básicas:

Sejam A e B dois conjuntos. Definimos:

1. A *união* de A e B , denotada por $A \cup B$, é o conjunto $\{x : x \in A \text{ ou } x \in B\}$.
2. A *intersecção* de A e B , denotada por $A \cap B$, é o conjunto $\{x : x \in A \text{ e } x \in B\}$.
3. O *complemento de A em relação a B* é o conjunto $B \setminus A = \{x : x \in B \text{ e } x \notin A\}$.
4. A *diferença simétrica* entre A e B é o conjunto $A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.

Seja $\mathcal{C}$ um conjunto de conjuntos (dizemos também *uma família de conjuntos*). Às vezes escrevemos $\mathcal{C} = \{A_i : i \in I\}$, onde I é um conjunto de índices qualquer.

5. A *união* de $\mathcal{C}$ é o conjunto $\{x : x \in A \text{ para algum } A \in \mathcal{C}\}$, ao qual denotamos por $\bigcup \mathcal{C}$ ou $\bigcup \{A : A \in \mathcal{C}\}$. Se $\mathcal{C}$ está indexado por I , também escrevemos $\bigcup \{A_i : i \in I\}$, ou $\bigcup_{i \in I} A_i$.
6. Se $\mathcal{C} \neq \emptyset$, a *intersecção* de $\mathcal{C}$ é o conjunto $\{x : x \in A \text{ para todo } A \in \mathcal{C}\}$. Análogo ao caso da união, as seguintes notações são usadas: $\bigcap \mathcal{C}$, $\bigcap \{A : A \in \mathcal{C}\}$, $\bigcap \{A_i : i \in I\}$, ou $\bigcap_{i \in I} A_i$.

II. Exercícios (propriedades básicas):

1. Sejam A, B, C conjuntos quaisquer. Mostre as seguintes propriedades:

- (a) Comutativa: $A \cap B = B \cap A$ e $A \cup B = B \cup A$;
- (b) Associativa: $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ e $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$;
- (c) Distributiva: $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ e $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$;
- (d) Leis de De Morgan: $C \setminus (A \cap B) = (C \setminus A) \cup (C \setminus B)$ e $C \setminus (A \cup B) = (C \setminus A) \cap (C \setminus B)$.
- (e) $A \cup A = A$, $A \cap A = A$, $A \cup \emptyset = A$ e $A \cap \emptyset = \emptyset$;
- (f) $A \cap B \subset A$, $A \subset A \cup B$, $A \cap (A \cup B) = A$ e $A \cup (A \cap B) = A$;
- (g) $(B \setminus A) \cap A = \emptyset$, $(B \setminus A) \cup A \supset B$ e $A \setminus A = \emptyset$.

2. Mostre que são equivalentes:

- (i) $A \subset B$;
- (ii) $A \cap B = A$;
- (iii) $A \cup B = B$;
- (iv) $A \setminus B = \emptyset$.

3. Mostre ou dê contraexemplo:

- (a) $A \cap (B \setminus C) = (A \cap B) \setminus C$;
- (b) $A \subset B \cap C$ se e só se $A \subset B$ e $A \subset C$;
- (c) $A \subset B \cup C$ implica $A \subset B$ ou $A \subset C$;
- (d) $B \cap C \subset A$ implica que $B \subset A$ ou $C \subset A$.
- (e) $A \cap B = A$ e $A \cup B = A$ se e só se $A = B$.

4. Prove as seguintes afirmações abaixo para $A, B \subset X$:

- (a) $X \setminus (X \setminus A) = A$;
- (b) $A \subset B$ se e só se $X \setminus A \supset X \setminus B$;
- (c) $A = B$ se e só se $X \setminus A = X \setminus B$;
- (d) $A \setminus B = A \cap (X \setminus B)$.

5. Determine $\bigcup\{A_i : i \in I\}$ e $\bigcap\{A_i : i \in I\}$ onde:
- $A_i = \{0, 1, i, i + 1\}$ e $I = \mathbb{N}$;
 - $A_i = \{n \in \mathbb{N} : n \geq i\}$ e $I = \mathbb{N}$, $I = \text{números ímpares}$ e $I = \{i \in \mathbb{N} : i \geq 3\}$.
6. Mostre que se $\mathcal{C} = \emptyset$, então $\bigcup \mathcal{C} = \emptyset$.
7. Sejam X um conjunto qualquer e $a, b \in X$, $a \neq b$. Defina $\mathcal{C} = \{A \subset X : a \in A\} \cup \{B \subset X : b \in B\}$. Mostre que se $\mathcal{D}$ é uma coleção não vazia de elementos de $\mathcal{C}$, então $\bigcup \mathcal{D} \in \mathcal{C}$. O mesmo vale para a intersecção?
8. Mostre que para quaisquer conjuntos X e Y :
- $\bigcup\{X\} = X$;
 - $\bigcup\{X, Y\} = X \cup Y$;
 - $\bigcap\{X, Y\} = X \cap Y$;
 - $\bigcup \mathcal{P}(X) = X$;
 - $\bigcap \mathcal{P}(X) = \emptyset$;
 - $X \cap \{Y\} \neq \emptyset$ se e só se $Y \in X$.
9. Seja $\mathcal{C} = \{A_i : i \in I\}$ uma família de conjuntos. Mostre que $\bigcap \mathcal{C} \subset A_i \subset \bigcup \mathcal{C}$, $\forall i \in I$.
10. (*Leis de De Morgan*) Seja $\mathcal{C}$ uma família de subconjuntos de X . Mostre que:
- $X \setminus \bigcup \mathcal{C} = \bigcap \{X \setminus A : A \in \mathcal{C}\}$ e
 - $X \setminus \bigcap \mathcal{C} = \bigcup \{X \setminus A : A \in \mathcal{C}\}$.
11. (*Propriedade distributiva*) Seja $\mathcal{C}$ uma família de subconjuntos de X e $B \subset X$. Mostre:
- $B \cap (\bigcup \mathcal{C}) = \bigcup \{B \cap A : A \in \mathcal{C}\}$ e
 - $B \cup (\bigcap \mathcal{C}) = \bigcap \{B \cup A : A \in \mathcal{C}\}$.
12. Seja $\mathcal{C}$ uma coleção não vazia de subconjuntos de X e $B \subset X$. Mostre que:
- $B \cup (\bigcup \mathcal{C}) = \bigcup \{B \cup A : A \in \mathcal{C}\}$ e
 - $B \cap (\bigcap \mathcal{C}) = \bigcap \{B \cap A : A \in \mathcal{C}\}$