FZEB0171– Física Geral e Experimental I

Aula 6

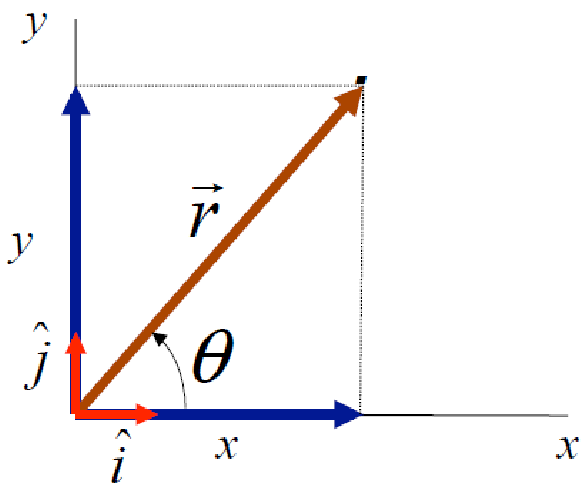
Eliria M. J. Agnolon Pallone
eliria@usp.br

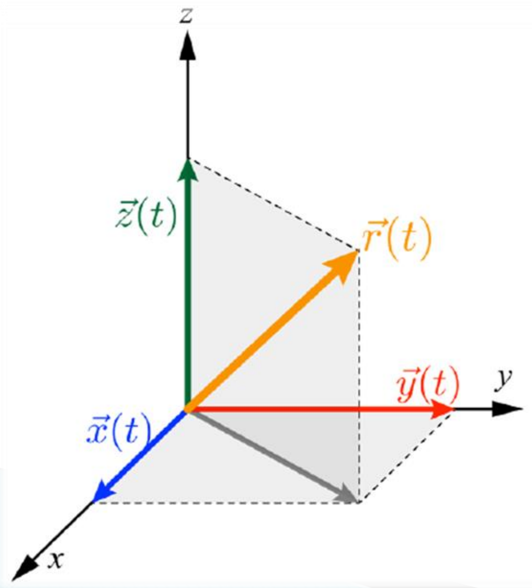
Movimento em 2 e 3 dimensões

O vetor posição em 2D fica definido em termos de suas coordenadas cartesianas por:

Posição e deslocamento

$$\vec{r}(t) = x(t)\hat{i} + y(t)\hat{j}$$





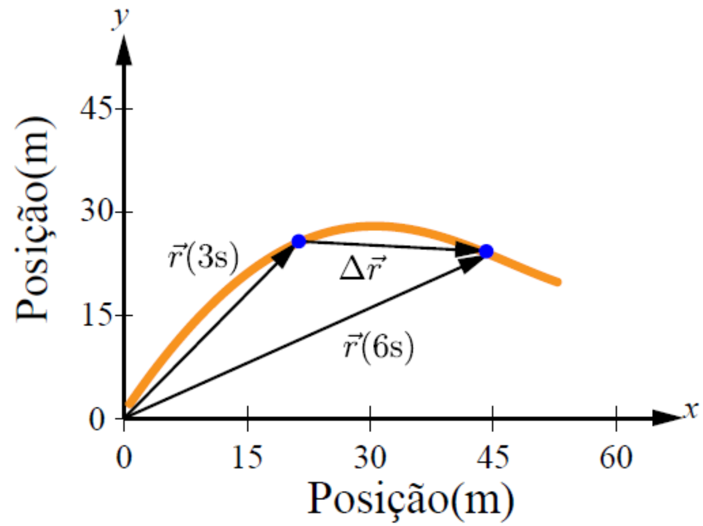
No caso espacial, 3D, temos:

$$\vec{r}(t) = x(t)\hat{i} + y(t)\hat{j} + z(t)\hat{k}$$

Posição e deslocamento

Exemplo: um ponto na trajetória de um móvel é dado pelas equações (em unidades SI):

$$\begin{cases} x(t) = 0{,}2t^2 + 5{,}0t + 0{,}5 \\ y(t) = -1{,}0t^2 + 10{,}0t + 2{,}0 \end{cases}$$



Calcular o deslocamento entre 3 e 6 s:

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}(6) - \vec{r}(3)$$

em t = 3 s : $x(3) = 17$ m e $y(3) = 23$ m

em t = 6 s : $x(6) = 38$ m e $y(6) = 26$ m

Daí: $\Delta\vec{r} = \vec{r}(6) - \vec{r}(3) \cong (21\hat{i} + 3\hat{j})$m

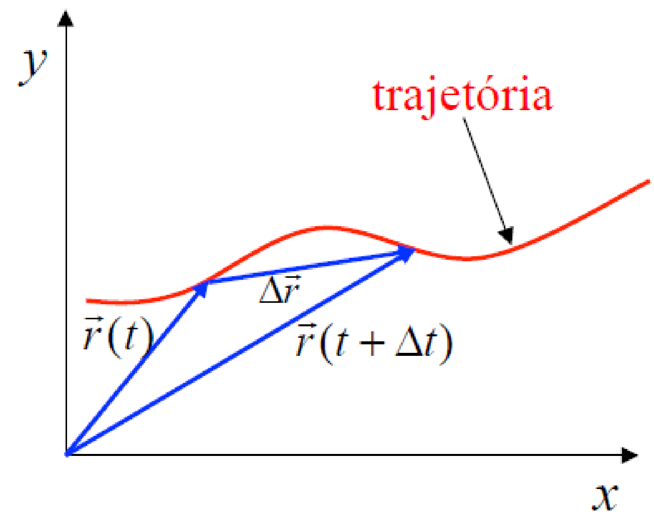
Velocidade

Como no caso unidimensional, o vetor velocidade média é:

$$\vec{v}_m = \frac{\vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t} = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{\Delta x}{\Delta t}\hat{i} + \frac{\Delta y}{\Delta t}\hat{j}$$

O vetor velocidade instantânea é:

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt} \qquad (1)$$



Em termos de componentes cartesianas:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \frac{dx}{dt}\hat{i} + \frac{dy}{dt}\hat{j} \quad \text{ou:} \quad \vec{v} = v_x \hat{i} + v_y \hat{j}$$

$\vec{v}$ é sempre tangente à trajetória;

$|\vec{v}|$ coincide com o módulo da velocidade escalar

Aceleração

Novamente como no caso 1D, a aceleração média é:

$$\vec{a}_m = \frac{\vec{v}(t+\Delta t) - \vec{v}(t)}{\Delta t} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{\Delta v_x}{\Delta t}\hat{i} + \frac{\Delta v_y}{\Delta t}\hat{j}$$

A aceleração instantânea é:

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{v}(t+\Delta t) - \vec{v}(t)}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt}$$

Em termos de componentes cartesianas:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = \frac{dv_x}{dt}\hat{i} + \frac{dv_y}{dt}\hat{j} \qquad \text{ou:} \qquad \vec{a} = a_x \hat{i} + a_y \hat{j}$$

a) a aceleração resulta de *qualquer variação* do vetor velocidade (quer seja do módulo, da direção ou do sentido de $\vec{v}$);

b) O vetor aceleração está sempre voltado para o "interior" da trajetória.

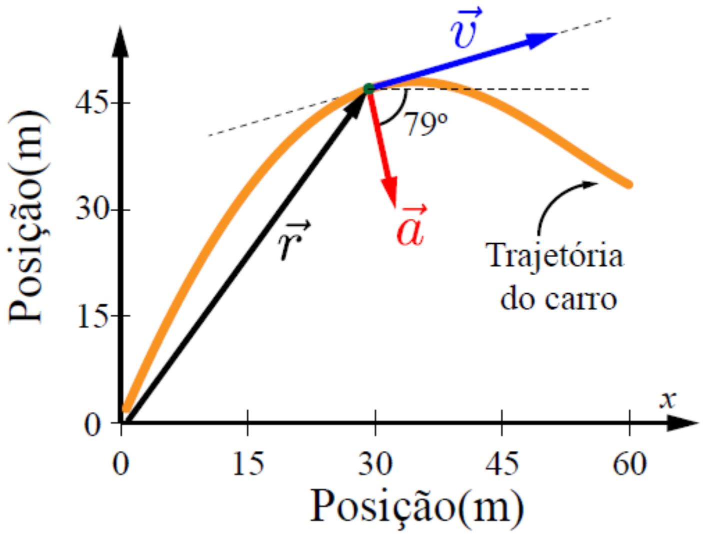
Velocidade e aceleração

Voltando ao exemplo do móvel, as componentes do vetor velocidade são:

$$\begin{cases} x(t) = 0{,}2t^2 + 5{,}0t + 0{,}5 \\ y(t) = -1{,}0t^2 + 10{,}0t + 2{,}0 \end{cases}$$

$$v_x = \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}(0{,}2t^2 + 5{,}0t + 0{,}5) = 0{,}4t + 5{,}0$$

$$v_y = \frac{dy}{dt} = \frac{d}{dt}(-1{,}0t^2 + 10t + 2{,}0) = -2{,}0t + 10$$



Em t =3 s:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= 6{,}2\, m/s \\ \frac{dy}{dt} &= 4{,}0\, m/s \end{aligned}\right\} \vec{v} = (6{,}2\hat{i} + 4{,}0\hat{j})\, m/s$$

$\vec{v}$ é tangente à trajetória!

Velocidade e aceleração

$$v_x = \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}(0{,}2t^2 + 5{,}0t + 0{,}5) = 0{,}4t + 5{,}0$$

$$v_y = \frac{dy}{dt} = \frac{d}{dt}(-1{,}0t^2 + 10t + 2{,}0) = -2{,}0t + 10$$

$$\begin{cases} x(t) = 0{,}2t^2 + 5{,}0t + 0{,}5 \\ y(t) = -1{,}0t^2 + 10{,}0t + 2{,}0 \end{cases}$$

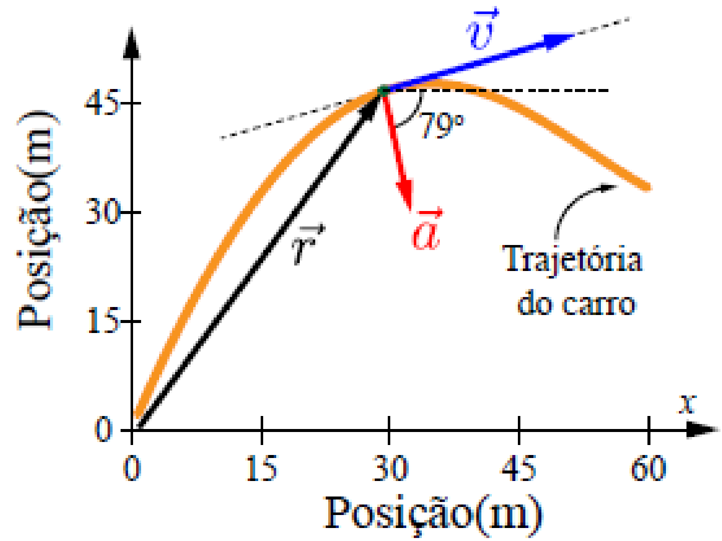
As componentes do vetor aceleração são:

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d}{dt}(0{,}4t + 5) = 0{,}4 m/s^2$$

$$a_y = \frac{dv_y}{dt} = \frac{d}{dt}(-2{,}0t + 10) = -2{,}0 m/s^2$$

$$\Downarrow$$

$$\vec{a} = (0{,}4\hat{i} - 2{,}0\hat{j})\, m/s^2$$



Módulo:

$$a = |\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} \cong \sqrt{4{,}2} = 2{,}0 m/s^2$$

Ângulo: $tg\,\theta = \frac{a_y}{a_x} = \frac{-2{,}0}{0{,}4} = -5{,}0$

$$\theta \cong -79^o$$

Exercícios

1) Uma partícula desloca-se da origem de um sistema de coordenadas xy a $t=0$ com velocidade inicial de $\overrightarrow{v_0} = (20\hat{\imath} - 15\hat{\jmath})\, m/s$ e $\vec{a} = 4{,}0\hat{\imath}\, m/s^2$

a) Determine as componentes da velocidade em função do tempo e o vetor velocidade total em qualquer tempo;
b) Calcule a velocidade e a velocidade escalar (módulo) em $t=5s$.

2) É dada uma tacada em uma bola de golfe na beirada de um barranco. Suas coordenadas x e y como função do tempo são dadas pelas seguintes expressões

$x = (18{,}0\ m/s)t$ e $y = (4m/s)t - (4{,}90m/s^2)t^2$

a) Obtenha uma expressão vetorial para a posição, velocidade e aceleração da bola em função do tempo;
b) Expresse a posição, a velocidade e a aceleração para $t = 3{,}0s$