

MAE 327

Planejamento e Pesquisa II

Profa. Júlia Maria Pavan Soler

pavan@ime.usp.br

IME/USP

Já vimos:

- **Por que Planejar um Experimento?**

Evidenciar Fontes de Variação de Interesse e controlar Erro

- **Princípios do Planejamento de Experimentos**

Caracterização da **População Alvo** e da **População Disponível** para o estudo (unidades amostrais), dos **Fatores de Interesse** (Tratamentos; var. X), dos **Fatores de Controle do Erro** (Blocagem, Covariáveis), das **Unidades Experimentais** (réplicas) e **Aleatorização** (procedimento de atribuição dos tratamentos às u.e.), da **Variável Resposta**

- **É esperado que o Planejamento e a Análise dos Dados, sob “boas práticas”, garantam resultados válidos e reprodutíveis**

Tipos de Delineamentos Experimentais

⇒ combinações das seguintes estruturas:

Estrutura de Tratamentos

- ✓ Esquema Fatorial de Tratamentos (1 ou mais fatores cruzados)
- ✓ Esquema Hierárquico de Tratamentos (embutido, “nested”)

Estrutura de Aleatorização

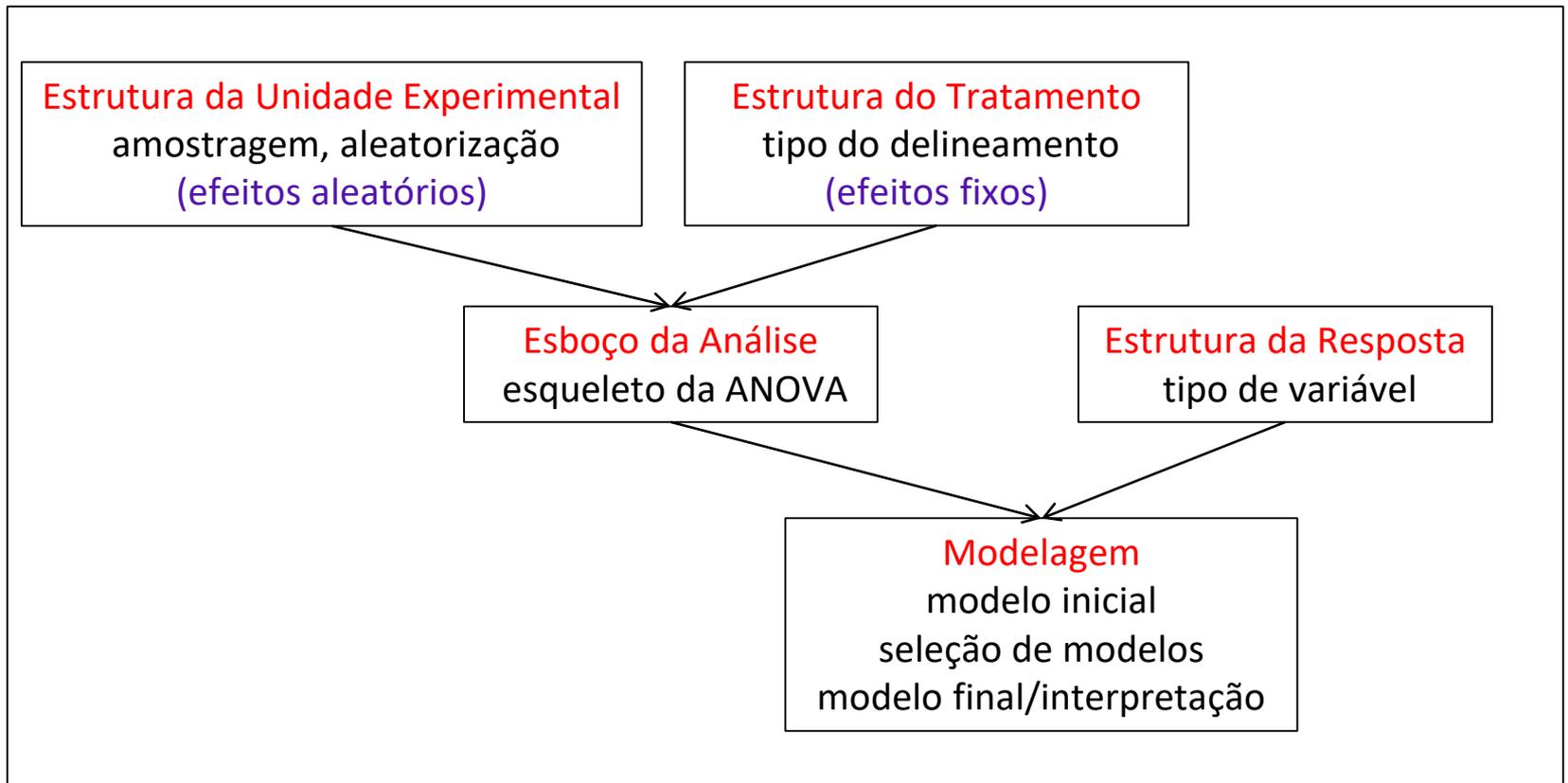
- ✓ Aleatorização Completa (DCA: Delineamento Completamente Aleatorizado)
- ✓ Aleatorização Restrita a Blocos (DAB: Delineamento Aleatorizado em Blocos)
 - Blocos Completos ou Incompletos (Quadrado Latino)
- ✓ Aleatorização Restrita (hierárquica) a níveis dos Tratamentos (Del. Split-Plot)

Estrutura da Variável Resposta

- ✓ Uma Única Condição de Avaliação
- ✓ Medidas Repetidas

Planejamento e Análise de Dados

Estrutura Geral de Análise de Dados: (Goos and Gilmour, 2012)



Delineamento Completamente Aleatorizado - DCA

Delineamento Inteiramente Casualizado

$N(\mu_1; \sigma^2)$	$N(\mu_2; \sigma^2)$...	$N(\mu_J; \sigma^2)$
↓	↓		↓
T_1	T_2	...	T_J
y_{11}	y_{12}	...	y_{1J}
...
y_{n_11}	y_{n_22}	...	y_{n_JJ}
\bar{y}_1	\bar{y}_2	...	\bar{y}_J
s_1	s_2	...	s_J

- **Tratamento:** 1 Fator (fixo) em J níveis

- **Aleatorização completa** (sem restrição) de n unidades amostrais aos K tratamentos, com r réplicas, tal que, $n = \sum_j n_j$, $n_j = r$, $j = 1, \dots, J$.

- **Suposições:** $Y_{ij} \stackrel{iid}{\sim} N(\mu_j; \sigma^2)$

Normalidade

Homocedasticidade

Independência

Exemplo: DCA

Dados: Medidas de *clorofila a* avaliadas em amostras de água submetidas a 4 tratamentos

T1	T2	T3	T4
6,2	12,7	7,0	8,3
4,8	11,3	4,4	7,1
3,0	9,3	3,8	11,7
5,6	9,5	5,0	10,0
7,1	11,7	5,5	8,5
4,8	15,3	3,2	12,4

$$J = 4$$

$$r = 6$$

$$n = 24$$

✓ **Estrutura das Unidades Experimentais**

24 u.e. aleatorizadas a 4 tratamentos
6 réplicas em cada tratamento: amostras balanceadas

✓ **Estrutura de Tratamentos**

⇒ 1 Fator (Tratamento) em 4 níveis
⇒ Fator Fixo: T1, T2, T3 e T4

✓ **Estrutura da variável resposta**

Uma única variável quantitativa: concentração de *clorofila a* dissolvida na água

Há evidência amostral de efeito significativo de tratamento?

Companions	Longevity (days)												
None	35	37	49	46	63	39	46	56	63	65	56	65	70
	63	65	70	77	81	86	70	70	77	77	81	77	
1 pregnant	40	37	44	47	47	47	68	47	54	61	71	75	89
	58	59	62	79	96	58	62	70	72	75	96	75	
1 virgin	46	42	65	46	58	42	48	58	50	80	63	65	70
	70	72	97	46	56	70	70	72	76	90	76	92	
8 pregnant	21	40	44	54	36	40	56	60	48	53	60	60	65
	68	60	81	81	48	48	56	68	75	81	48	68	
8 virgin	16	19	19	32	33	33	30	42	42	33	26	30	40
	54	34	34	47	47	42	47	54	54	56	60	44	

Dados
 (Problema 3.2, Oehlert, 2010):
 Cientistas investigam se o
 gasto energético destinado à
 reprodução afeta a longevidade
 em moscas de frutas

$J = 5$
 $r = 25$
 $n = 125$

Dados (Problema 3.3, Oehlert, 2010): Altura de plantas submetidas ao stress da passagem (pisada) de transeuntes.

Number of passes	Height (cm)			
0	20.7	15.9	17.8	17.6
25	12.9	13.4	12.7	9.0
75	11.8	12.6	11.4	12.1
200	7.6	9.5	9.9	9.0
500	7.8	9.0	8.5	6.7

$J = 5$
 $r = 4$
 $n = 20$

Delineamentos Completamente Aleatorizados Balanceados.

Há evidência amostral de efeito significativo de tratamento?

Exemplo: DCA

Objetivo do Experimento: avaliar o efeito de um inóculo de fungos no crescimento de mudas de *Eucalyptos citriodora*.

Tratamentos de interesse:

T1 - inóculo ausente;

T2 - inóculo selvagem (proveniente da raiz de grama de batatais)

T3 - inóculo de *G. mosseae* (proveniente da raiz do arroz)

Sementes de eucalipto de mesma origem foram semeadas em sacos plásticos contendo o mesmo tipo de solo, os quais foram mantidos em Casa de Vegetação em condições ambientais consideradas homogêneas. Foram usadas 5 réplicas para cada tratamento (sob um delineamento inteiramente casualizado, DCA). Após 48 dias, a altura (cm) das mudas foi mensurada.

Trat	Repetições					Média
T1	7.86	6.38	6.90	7.78	7.17	7.218
T2	6.20	7.82	8.50	6.50	7.09	7.222
T3	9.67	8.08	9.25	8.20	8.64	8.768
Média						7.736

$J = 3$ tratamentos

$r = 5$ réplicas

$n = 15$ total de u.e.

Há evidência amostral de efeito significativo de tratamento?

DCA: Modelo Estrutural e Distribucional

- **Parametrização de Médias**

y_{ij} : resposta da unidade experimental i ao tratamento j

$$y_{ij} = \mu_j + e_{ij}; \quad i = 1, \dots, n_j; \quad j = 1, \dots, J$$

J parâmetros para o efeito do tratamento

μ_j : valor esperado da resposta para unidades submetidas ao tratamento T_j

e_{ij} : erro aleatório, normal, media zero, variância constante e independentes


$$e_{ij} \stackrel{iid}{\sim} N(0; \sigma^2) \Rightarrow y_{ij} \stackrel{iid}{\sim} N(\mu_j; \sigma^2); \quad i = 1, \dots, n_j; \quad j = 1, \dots, J$$

DCA: Modelo Estrutural e Distribucional

- **Parametrização Casela de Referência**

Adotada no
pacote R.

y_{ij} : resposta da unidade experimental i ao tratamento j

$$y_{ij} = \begin{cases} \mu_1 + e_{ij} & j = 1 \\ \mu_1 + \tau_j + e_{ij} & i = 1, \dots, n_j; j = 2, \dots, J \end{cases}$$

J parâmetros para o
efeito do tratamento

μ_1 : valor esperado da resposta para unidades submetidas ao tratamento T_1
(considerado como referência)

τ_j ($j = 2, \dots, k$) : Efeito (desvio) do tratamento T_j em relação ao valor
esperado da resposta ao tratamento de referência, T_1 .

e_{ij} : erro aleatório, normal, media zero, variância constante e independentes


$$e_{ij} \stackrel{iid}{\sim} N(0; \sigma^2) \Rightarrow y_{ij} \stackrel{iid}{\sim} N(\mu_j = \mu_1 + \tau_j; \sigma^2); i = 1, \dots, n_j, j = 2, \dots, J$$

DCA: Modelo Estrutural e Distribucional

- **Parametrização de Desvios**

Adotada no
pacote SAS.

y_{ij} : resposta da unidade experimental i ao tratamento j

$$y_{ij} = \mu + \tau_j + e_{ij}; \quad \sum_{j=1}^J \tau_j = 0$$

Restrição de identificabilidade

J parâmetros para o efeito do tratamento

$\mu_j = \mu + \tau_j$: valor esperado da resposta ao tratamento T_j ; τ_j é o efeito (desvio) do tratamento T_j em relação à media basal, μ .

$$\mu = \frac{\mu_1 + \dots + \mu_J}{J} : \quad \text{valor esperado (basal) da resposta}$$

e_{ij} : erro aleatório (normal, media zero, variância constante e independentes)



$$e_{ij} \stackrel{iid}{\sim} N(0; \sigma^2) \Rightarrow y_{ij} \stackrel{iid}{\sim} N(\mu_j = \mu + \tau_j; \sigma^2); \quad j = 1, \dots, J$$

DCA: Notação Matricial

$$y_{ij} = \mu + \tau_j + e_{ij} \quad ; \quad \sum_{j=1}^J \tau_j = 0$$

$$Y_{n \times 1} = X_{n \times J} \beta_{J \times 1} + e_{n \times 1}$$

Vetor de
observações

Matriz de
Planejamento

Vetor de
parâmetros

Vetor de erros

Considerando a parametrização de Desvios em relação à media geral, escreva o modelo linear na forma matricial (Y, X, β, e) para os dados de *clorofila a*.

Escreva a formulação matricial também para a parametrização de Médias e casela de Referência.

Parametrização de Desvios da média

DCA: 1 fator em 4 níveis e 5 réplicas (n=20)

$$y_{ij} = \mu + \tau_j + e_{ij} \quad ; \quad \sum_{j=1}^J \tau_j = 0$$

$$\begin{matrix} Y_{n \times 1} \\ \left[\begin{array}{c} y_{11} \\ y_{21} \\ y_{31} \\ y_{41} \\ y_{51} \\ y_{12} \\ y_{22} \\ y_{32} \\ y_{42} \\ y_{52} \\ y_{13} \\ y_{23} \\ y_{33} \\ y_{43} \\ y_{53} \\ y_{14} \\ y_{24} \\ y_{34} \\ y_{44} \\ y_{54} \end{array} \right] \end{matrix} = \begin{matrix} X_{n \times k} \\ \left[\begin{array}{cccc} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \end{array} \right] \end{matrix} \begin{matrix} \beta_{k \times 1} \\ \left[\begin{array}{c} \mu \\ \tau_1 \\ \tau_2 \\ \tau_3 \end{array} \right] \end{matrix} + \begin{matrix} e_{n \times 1} \\ \left[\begin{array}{c} e_{11} \\ e_{21} \\ e_{31} \\ e_{41} \\ e_{51} \\ e_{12} \\ e_{22} \\ e_{32} \\ e_{42} \\ e_{52} \\ e_{13} \\ e_{23} \\ e_{33} \\ e_{43} \\ e_{53} \\ e_{14} \\ e_{24} \\ e_{34} \\ e_{44} \\ e_{54} \end{array} \right] \end{matrix}$$

Tabela de ANOVA

Modelo estrutural e distribucional

$$Y_{ij} = \mu + \tau_j + e_{ij}; \quad \sum_{j=1}^J \tau_j = 0; \quad e_{ij} \stackrel{iid}{\sim} N(0; \sigma^2)$$

Identidade útil

$$Y_{ij} = \hat{\mu} + (\hat{\tau}_j - \hat{\mu}) + (Y_{ij} - \hat{\tau}_j)$$

Estimadores de MVS,
(Estimadores de MQ dos erros)

Somas de Quadrados (ortogonalidade)

$$\sum_{j=1}^J \sum_{i=1}^{n_j} (Y_{ij} - \bar{Y})^2 = \sum_{j=1}^J n_j (\bar{Y}_j - \bar{Y})^2 + \sum_{j=1}^J \sum_{i=1}^{n_j} (Y_{ij} - \bar{Y}_j)^2$$

SQTotal

SQTratamento

SQResidual

Tabela de ANOVA

$$H_0 : \mu_j = \mu \quad (\Leftrightarrow H_0 : \tau_j = 0), \quad j = 1, \dots, J$$

H_1 : Existe pelo menos uma diferença entre as médias

Teste global do
efeito de
tratamento

Fonte de Variação	Número de graus de liberdade	Soma de Quadrados (SQ)	Quadrado Médio (QM)	Estatística F	Valor-p
Tratamento	$J-1$	$\sum_j n_j (\bar{y}_j - \bar{y})^2$	$SQ_{Trat} / (J-1)$	$\frac{QM_{Trat}}{QM_{Res}}$	
Resíduo	$n-J$	$\sum_{ij} (y_{ij} - \bar{y}_j)^2$	$SQ_{Res} / (n-J)$		
TOTAL	$n-1$	$\sum_{ij} (y_{ij} - \bar{y})^2$			

$$F = \frac{QM_{Trat}}{QM_{Res}} \stackrel{H_0}{\sim} F_{(J-1)(n-J)}$$

$$E(QM_{Res}) = \sigma^2$$

Quadrado Médio residual é um estimador não viciado da variabilidade puramente aleatória (erro) presente no experimento. Assim, o número de graus de liberdade residual reflete o tamanho amostral efetivo do experimento.

Dados: Medidas de clorofila a dissolvida na água

T1	T2	T3	T4
6,2	12,7	7,0	8,3
4,8	11,3	4,4	7,1
3,0	9,3	3,8	11,7
5,6	9,5	5,0	10,0
7,1	11,7	5,5	8,5
4,8	15,3	3,2	12,4

**Defina as hipóteses sob teste.
Quais são as suposições envolvidas.
Interprete a estatística F e as fontes de variabilidade Entre e Dentro de tratamentos.
Conclusão.**

Analysis of Variance for Resp

Source	DF	SS	MS	F	P
Trat	3	201,45	67,15	20,59	0,000
Error	20	65,23	3,26		
Total	23	266,68			

Level	N	Mean	StDev
T1	6	5,250	1,408
T2	6	11,633	2,222
T3	6	4,817	1,348
T4	6	9,667	2,075

Parametrização casela de referência			
(Intercept)	Trat2	Trat3	Trat4
5.250	6.350	-0.433	4.417

Pooled StDev = 1,806 $\leftarrow \sqrt{QM Res}$

Variabilidade Puramente Aleatória: σ^2

DCA:

$$N(\mu_1; \sigma_1^2) \quad N(\mu_1; \sigma_2^2) \quad \dots \quad N(\mu_1; \sigma_J^2)$$



$$T_1 \quad T_2 \quad \dots \quad T_J$$

$$y_{11} \quad y_{12} \quad \dots \quad y_{1J}$$

$$\dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots$$

$$y_{n_11} \quad y_{n_22} \quad \dots \quad y_{n_JJ}$$

$$\bar{y}_1 \quad \bar{y}_2 \quad \dots \quad \bar{y}_J \quad \bar{y}$$

$$s_1 \quad s_2 \quad \dots \quad s_J$$

$$QM \text{ Res} = \frac{\sum_{ij} (y_{ij} - \bar{y}_j)^2}{n - J} \quad \text{FV Dentro}$$

$$= \frac{(n_1 - 1)s_1^2 + \dots + (n_J - 1)s_J^2}{n - J} = s_c^2 \Rightarrow \sigma^2$$

$$\frac{\sum_j (\bar{y}_j - \bar{y})^2}{J - 1} \Rightarrow \frac{\sigma^2}{r} \quad \text{FV Entre}$$

Distribuição amostral de \bar{Y} sob H_0

$$\frac{\sum_j r (\bar{y}_j - \bar{y})^2}{J - 1} = QM \text{ Trat} \stackrel{H_0}{\Rightarrow} \sigma^2$$

$$E(QM \text{ Res}) \stackrel{H_0}{=} \sigma^2$$

$$E(QM \text{ Trat}) \stackrel{H_0}{=} \sigma^2$$

Sob H_0 as duas estatísticas estimam σ^2

Tabela de ANOVA – Notação Matricial

$$H_0 : \mu_j = \mu \quad (\Leftrightarrow H_0 : \tau_j = 0), \quad j = 1, \dots, J$$

H_1 : Existe pelo menos uma diferença entre as médias

Fonte de Variação	Número de graus de liberdade	Soma de Quadrados (SQ)	Quadrado Médio (QM)	Estatística F	Valor-p
Tratamento	$J-1$	$Y' \left[P - \frac{1}{n} 1_{n \times n} \right] Y$	$SQ_{Trat} / (J-1)$	$\frac{QM_{Trat}}{QM_{Res}}$	
Resíduo	$n-J$	$Y' [I_n - P] Y$	$SQ_{Res} / (n-J)$		
TOTAL	$n-1$	$Y' \left[I_n - \frac{1}{n} 1_{n \times n} \right] Y$			

$$P = X (X' X)^{-1} X' : \text{projedor}$$

$$1_{n \times n} = 1_n 1_n' : \text{matriz de 1's}$$

$$F = \frac{QM_{Trat}}{QM_{Res}} \stackrel{H_0}{\sim} F_{(J-1)(n-J)}$$

Estimadores da ANOVA

Formulação via modelos lineares

$$y_{ij} = \mu + \tau_j + e_{ij} \quad ; \quad \sum_{j=1}^J \tau_j = 0; \quad i = 1, \dots, n_j; \quad j = 1, \dots, J$$

$$Y_{n \times 1} = X_{n \times J} \beta_{J \times 1} + e_{n \times 1}; \quad \beta = (\mu, \tau_1, \dots, \tau_{J-1})'$$

$$\hat{\beta}; \quad \min \hat{e}'\hat{e} = \min (Y - X \hat{\beta})' (Y - X \hat{\beta})$$

$$\hat{\beta} = (X' X)^{-1} X' Y$$

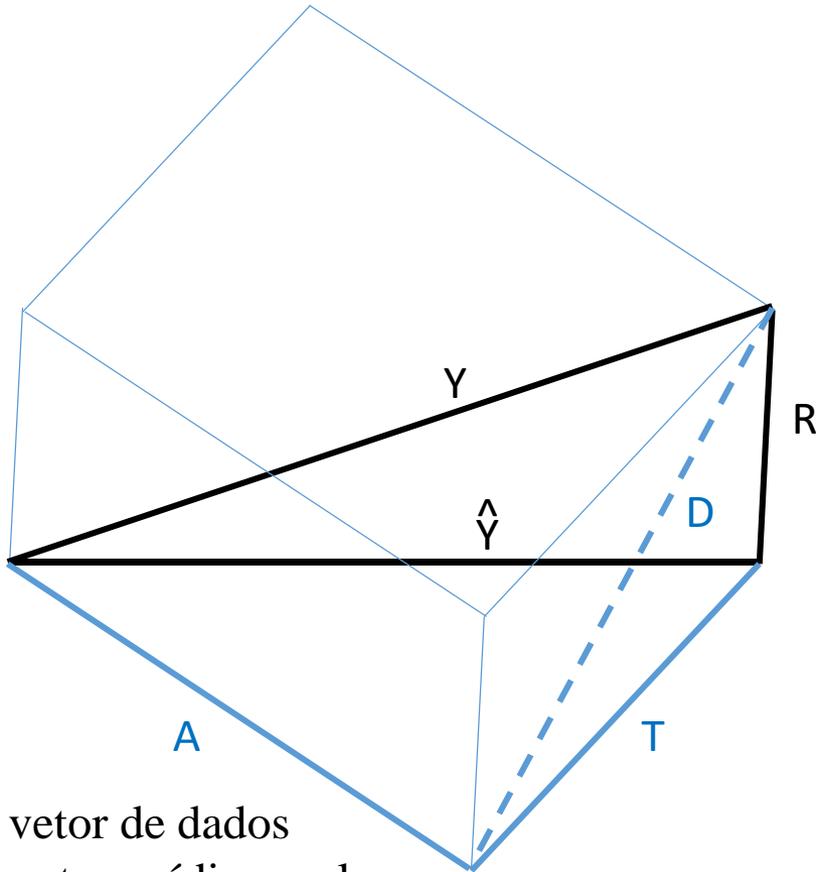
$$\hat{Y} = \underbrace{X (X' X)^{-1} X'}_{\text{Matriz de Projeção}} Y; \quad \hat{Y}_{ij} = \bar{Y}_j = \bar{Y} + \hat{\tau}_j$$

Matriz de Projeção

Solução via o Método de Mínimos Quadrados dos erros.

Solução equivalente aos estimadores de Máxima Verossimilhança (sob normalidade, homocedasticidade e independência).

Geometria da ANOVA



Y: vetor de dados

A: vetor média geral

D=Y-A: desvios das observações em relação à média geral

T= \hat{Y} -A: desvios das médias dos tratamentos em relação à média geral ($\hat{Y}=\bar{Y}$)

R: resíduos

$$\sum_{j=1}^J \sum_{i=1}^r \bar{y}(y_{ij} - \bar{y}) = 0 \quad D \text{ é ortogonal a } A$$

$$\sum_{j=1}^J \sum_{i=1}^r \bar{y}(\bar{y}_j - \bar{y}) = 0 \quad A \text{ é ortogonal a } Tr$$

$$\sum_{j=1}^J \sum_{i=1}^r \bar{y}(y_{ij} - \bar{y}_j) = 0 \quad A \text{ é ortogonal a } R$$

$$\sum_{j=1}^J \sum_{i=1}^r (\bar{y}_j - \bar{y})(y_{ij} - \bar{y}_j) = 0 \quad R \text{ é ortogonal a } Tr$$

$$Y = \hat{Y} + R \quad \hat{Y} = A + Tr$$

$$S = S_A + S_{Tr} + S_R \quad \text{Aditividade das Somas de Quadrados (comprimento ao quadrado dos vetores)}$$

ANOVA – Análises de Diagnóstico

$$y_{ij} = \bar{y}_j + (y_{ij} - \bar{y}_j)$$

\hat{y}_{ij} \hat{e}_{ij}
y ajustado resíduo

- Análises Descritivas dos Resíduos

⇒ Histogramas e box-plots dos resíduos

⇒ Quantis dos resíduos contra quantis da normal

} Distribuição simétrica?
Normalidade?

⇒ $\hat{e}_j \times \text{ordem}(\text{obs})$

erros independentes

$\hat{e}_j \times \hat{y}_j$

homocedasticidade

tendências não modeladas

ANOVA – Análises de Diagnóstico

$$\hat{e}_{ij} = y_{ij} - \hat{y}_{ij} = y_{ij} - \bar{y}_j = y_{ij} - h_{ii} y_{ij} = (1 - h_{ii}) y_{ij} \quad \text{Resíduo}$$

$$h_{ii} = X_i (X' X)^{-1} X_i'$$

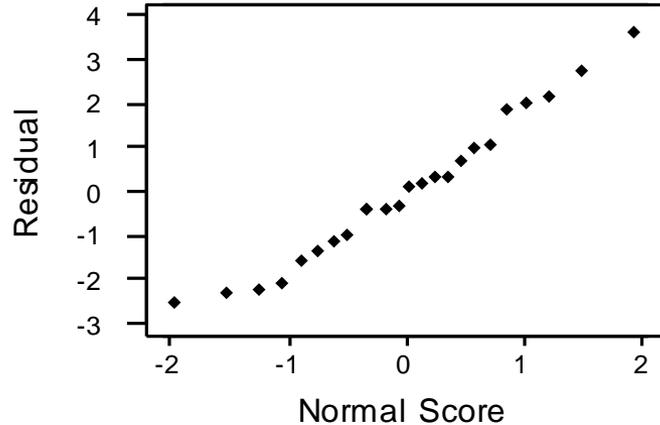
$$\tilde{e}_{ij} = \frac{\hat{e}_{ij}}{\sqrt{QM \text{ Res}}} \quad \text{Resíduo semi-studentizado}$$

$$r_{ij} = \frac{\hat{e}_{ij}}{\sqrt{QM \text{ Res} (1 - h_{ii})}} \quad \text{Resíduo studentizado}$$

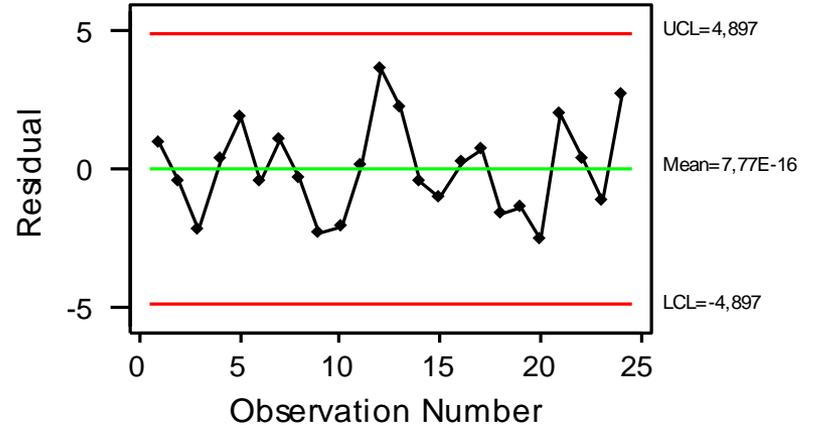
Residual Model Diagnostics

Dados de clorofila a

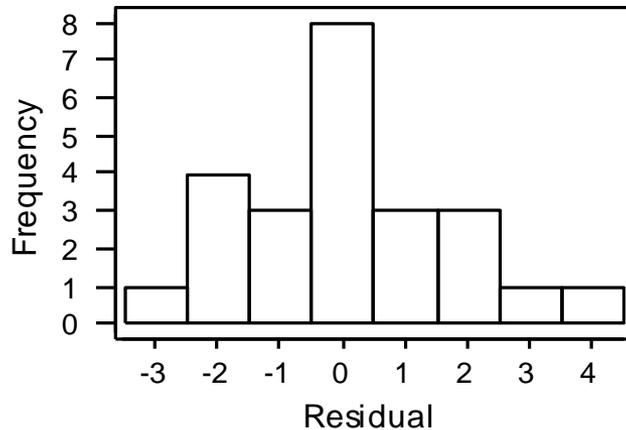
Normal Plot of Residuals



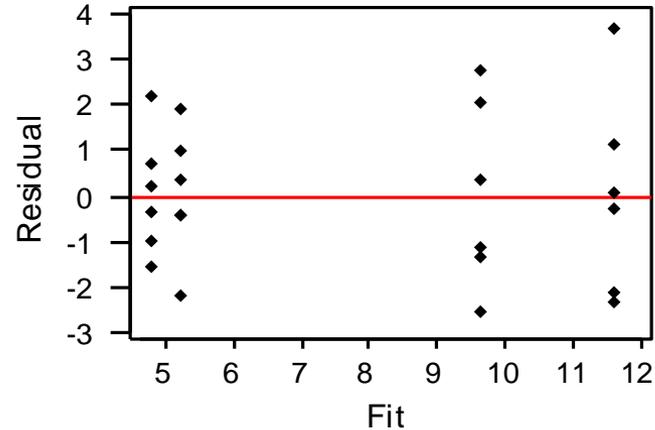
I Chart of Residuals



Histogram of Residuals



Residuals vs. Fits



**E quando os dados não satisfazem as suposições impostas pelo modelo?
Quais são as medidas remédio?**

ANOVA – Análises de Diagnóstico

- Teste para a verificação da Normalidade
Teste de Shapiro-Wilk, Teste de Kolmogorov-Smirnov
- Testes para a verificação da homocedasticidade (variâncias homogêneas)
Teste de Bartlet (sensível a desvios da Normalidade)
Teste de Levene (robusto)

Hipótese Global de Efeito de Tratamentos

$$y_{ij} = \mu_j + e_{ij} = \mu + \tau_j + e_{ij}; \quad e_{ij} \stackrel{iid}{\sim} N(0; \sigma^2)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{H}_0: \mu_j = \mu \Leftrightarrow \tau_j = 0; \quad j = 1, \dots, J \\ \mathbf{H}_1: \text{existe pelo menos uma diferença} \end{array} \right.$$

Existe evidência de diferenças entre as médias ?



A variação ENTRE médias é maior que a variação DENTRO dos tratamentos ?

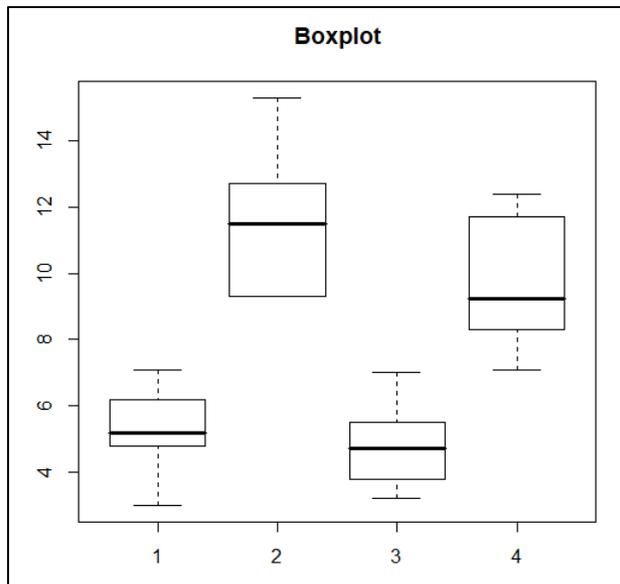
No caso da rejeição de H_0 ($p \leq \alpha$) e da análise de diagnóstico indicar que as premissas estão satisfeitas, o próximo passo da análise é a realização de “comparações múltiplas” entre as médias.

Comparações Múltiplas

Considerando os dados de *clorofila a*:

$$\begin{cases} H_0 : \mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu_4 = \mu & \Leftrightarrow \tau_1 = \dots = \tau_4 = 0 \\ H_1 : \exists \text{ pelo menos uma diferença entre as médias} \end{cases}$$

Conclusão: $F=20,59$ $p=0,000 \Rightarrow$ há evidência amostral para a rejeição de $H_0 \Rightarrow$ há pelo menos uma diferença entre as médias



Discuta as limitações envolvidas na realização de testes “t” individuais para todas as possíveis comparações entre duas médias!

Comparações Múltiplas

- **Intervalo de Confiança para μ_j ($j=1, \dots, J$)**

$$\bar{y}_j - t_{(\alpha/2; r-1)} \sqrt{\frac{QM Res}{n_j}} \leq \mu_j \leq \bar{y}_j + t_{(\alpha/2; r-1)} \sqrt{\frac{QM Res}{n_j}}$$

- **Intervalo de Confiança para a Diferença entre Médias**

$$(\bar{y}_j - \bar{y}_k) \pm t_{(\alpha/2; n_j+n_k-2)} \sqrt{QM Res \left(\frac{1}{n_j} + \frac{1}{n_k} \right)}$$

Qual é o nível de confiança global (ou, equivalentemente, o **nível de significância global**) quando são realizados múltiplos testes simultaneamente (muitas comparações entre pares de médias)?

Tabela de ANOVA

One-way ANOVA: Resp versus Trat

Analysis of Variance for Resp

Source	DF	SS	MS	F	P
Trat	3	201,45	67,15	20,59	0,000
Error	20	65,23	3,26		
Total	23	266,68			

Individual 95% CIs For Mean
Based on Pooled StDev

Level	N	Mean	StDev	-----+-----+-----+-----		
T1	6	5,250	1,408	(-----*-----)		
T2	6	11,633	2,222		(-----*-----)	
T3	6	4,817	1,348	(-----*-----)		
T4	6	9,667	2,075		(-----*-----)	
Pooled StDev = 1,806				6,0	9,0	12,0

Defina a hipótese nula do teste global.

Interprete o nível descritivo da estatística F e os graus de liberdade.

Há necessidade de correções para múltiplos testes?

Suposições envolvidas e Conclusão.

Comparações Múltiplas

➔ **Nível de Significância Único para a Família de Comparações**

4 Tratamentos μ_1 μ_2 μ_3 μ_4

**Comparações
de interesse:**

$$\left\{ \begin{array}{ll} H_{01} : \mu_1 = \mu_2 & \Rightarrow \alpha_1 \\ H_{02} : \mu_1 = \mu_3 & \Rightarrow \alpha_2 \\ H_{03} : \mu_1 = \mu_4 & \Rightarrow \alpha_3 \\ H_{04} : \mu_2 = \mu_3 & \Rightarrow \alpha_4 \\ H_{05} : \mu_2 = \mu_4 & \Rightarrow \alpha_5 \\ H_{06} : \mu_3 = \mu_4 & \Rightarrow \alpha_6 \end{array} \right.$$

$\alpha?$

Para testar as 6 hipóteses, qual é o nível de significância global para esta família de comparações entre pares de medias?

Comparações Múltiplas

- **Comparações aos Pares** (pares de médias sendo comparadas)

$$H : \mu_j = \mu_k \Leftrightarrow \mu_j - \mu_k = 0$$

- **Contrastes entre Médias**

$$H : \frac{\mu_1 + \mu_3}{2} = \frac{\mu_2 + \mu_4}{2} \Leftrightarrow \frac{\mu_1 + \mu_3}{2} - \frac{\mu_2 + \mu_4}{2} = 0$$

- **Combinações Lineares de Médias**

$$H : 0,30 \mu_1 + 0,20 \mu_2 + 0,30 \mu_3 + 0,20 \mu_4 = 0$$

Comparações Múltiplas

- **Método de Tukey**

$$H : \mu_j = \mu_k \quad ; \quad j \neq k \quad \Rightarrow \quad \binom{J}{2} = \frac{J(J-1)}{2} \text{ comparações}$$

Intervalo de Confiança Simultâneo de Tukey

$$\left(\bar{Y}_j - \bar{Y}_k \right) \pm q_{J;v;\alpha/2} s_c \sqrt{\frac{1}{n}}$$

↓
n-J

Delineamento Balanceado

$q_{J;v;\alpha/2}$: range studentizado (valor tabelado) **Critério HSD (Honest Significant Difference)**

$$\left(\bar{Y}_j - \bar{Y}_k \right) \pm \frac{q_{J;v;\alpha/2}}{\sqrt{2}} s_c \sqrt{\frac{1}{n_j} + \frac{1}{n_k}}$$

Não Balanceado

Table D.8: Percent points for the Studentized range.

Table entries are $q_{.05}(K, \nu)$.

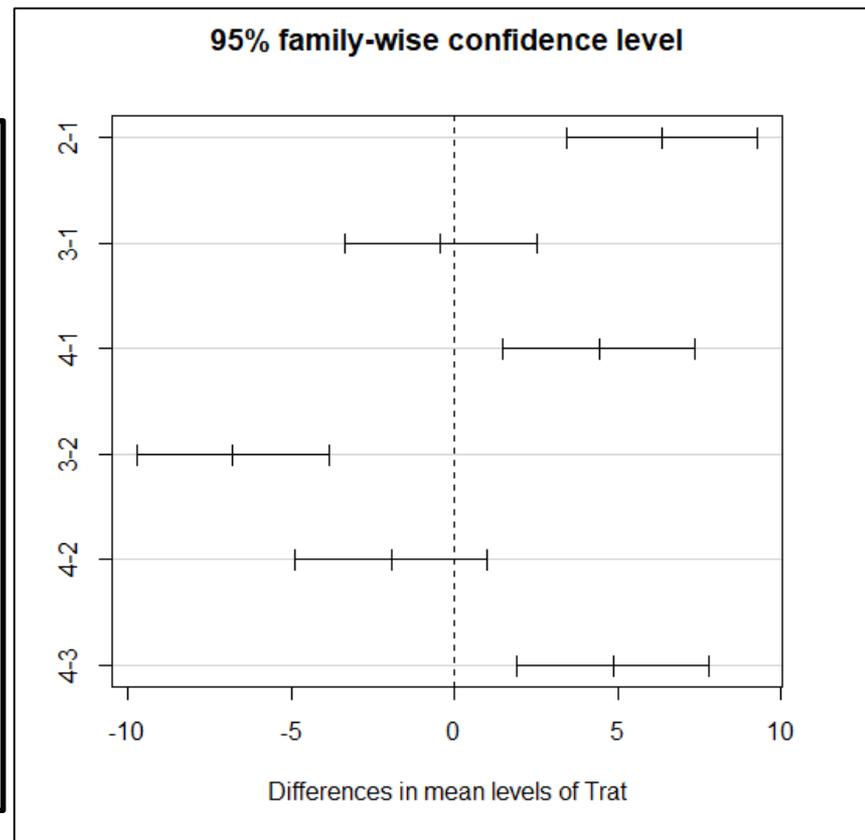
ν	K												
	2	3	4	5	6	7	8	9	10	15	20	30	50
1	18.0	27.0	32.8	37.1	40.4	43.1	45.4	47.4	49.1	55.4	59.6	65.1	71.7
2	6.09	8.33	9.80	10.9	11.7	12.4	13.0	13.5	14.0	15.7	16.8	18.3	20.0
3	4.50	5.91	6.82	7.50	8.04	8.48	8.85	9.18	9.46	10.5	11.2	12.2	13.4
4	3.93	5.04	5.76	6.29	6.71	7.05	7.35	7.60	7.83	8.66	9.23	10.0	10.9
5	3.64	4.60	5.22	5.67	6.03	6.33	6.58	6.80	6.99	7.72	8.21	8.87	9.67
6	3.46	4.34	4.90	5.30	5.63	5.90	6.12	6.32	6.49	7.14	7.59	8.19	8.91
7	3.34	4.16	4.68	5.06	5.36	5.61	5.82	6.00	6.16	6.76	7.17	7.73	8.40
8	3.26	4.04	4.53	4.89	5.17	5.40	5.60	5.77	5.92	6.48	6.87	7.40	8.03
9	3.20	3.95	4.41	4.76	5.02	5.24	5.43	5.59	5.74	6.28	6.64	7.14	7.75
10	3.15	3.88	4.33	4.65	4.91	5.12	5.30	5.46	5.60	6.11	6.47	6.95	7.53
11	3.11	3.82	4.26	4.57	4.82	5.03	5.20	5.35	5.49	5.98	6.33	6.79	7.35
12	3.08	3.77	4.20	4.51	4.75	4.95	5.12	5.27	5.39	5.88	6.21	6.66	7.21
13	3.06	3.73	4.15	4.45	4.69	4.88	5.05	5.19	5.32	5.79	6.11	6.55	7.08
14	3.03	3.70	4.11	4.41	4.64	4.83	4.99	5.13	5.25	5.71	6.03	6.46	6.98
15	3.01	3.67	4.08	4.37	4.59	4.78	4.94	5.08	5.20	5.65	5.96	6.38	6.89
16	3.00	3.65	4.05	4.33	4.56	4.74	4.90	5.03	5.15	5.59	5.90	6.31	6.81
17	2.98	3.63	4.02	4.30	4.52	4.70	4.86	4.99	5.11	5.54	5.84	6.25	6.74
18	2.97	3.61	4.00	4.28	4.49	4.67	4.82	4.96	5.07	5.50	5.79	6.20	6.68
19	2.96	3.59	3.98	4.25	4.47	4.65	4.79	4.92	5.04	5.46	5.75	6.15	6.63
20	2.95	3.58	3.96	4.23	4.45	4.62	4.77	4.90	5.01	5.43	5.71	6.10	6.58
21	2.94	3.56	3.94	4.21	4.42	4.60	4.74	4.87	4.98	5.40	5.68	6.07	6.53
22	2.93	3.55	3.93	4.20	4.41	4.58	4.72	4.85	4.96	5.37	5.65	6.03	6.49
23	2.93	3.54	3.91	4.18	4.39	4.56	4.70	4.83	4.94	5.34	5.62	6.00	6.45
24	2.92	3.53	3.90	4.17	4.37	4.54	4.68	4.81	4.92	5.32	5.59	5.97	6.42
25	2.91	3.52	3.89	4.15	4.36	4.53	4.67	4.79	4.90	5.30	5.57	5.94	6.39
26	2.91	3.51	3.88	4.14	4.35	4.51	4.65	4.77	4.88	5.28	5.55	5.92	6.36
27	2.90	3.51	3.87	4.13	4.33	4.50	4.64	4.76	4.86	5.26	5.53	5.89	6.34
28	2.90	3.50	3.86	4.12	4.32	4.49	4.62	4.74	4.85	5.24	5.51	5.87	6.31
29	2.89	3.49	3.85	4.11	4.31	4.47	4.61	4.73	4.84	5.23	5.49	5.85	6.29
30	2.89	3.49	3.85	4.10	4.30	4.46	4.60	4.72	4.82	5.21	5.47	5.83	6.27
35	2.87	3.46	3.81	4.07	4.26	4.42	4.56	4.67	4.77	5.15	5.41	5.76	6.18
40	2.86	3.44	3.79	4.04	4.23	4.39	4.52	4.63	4.73	5.11	5.36	5.70	6.11
45	2.85	3.43	3.77	4.02	4.21	4.36	4.49	4.61	4.70	5.07	5.32	5.66	6.06
50	2.84	3.42	3.76	4.00	4.19	4.34	4.47	4.58	4.68	5.04	5.29	5.62	6.02
100	2.81	3.36	3.70	3.93	4.11	4.26	4.38	4.48	4.58	4.92	5.15	5.46	5.83
∞	2.77	3.31	3.63	3.86	4.03	4.17	4.29	4.39	4.47	4.80	5.01	5.30	5.65

Comparações Múltiplas

Intervalos de Confiança Simultâneos de Tukey a 95%

Dados de *clorofila a*

	1	2	3
2	-9.303 -3.464	$\mu_1 < \mu_2$	
3	-2.486 3.353	$\mu_1 = \mu_3$	$\mu_2 > \mu_3$ 3.897 9.736
4	-7.336 -1.497	$\mu_1 < \mu_4$	$\mu_2 = \mu_4$
		-0.953 4.886	$\mu_3 < \mu_4$ -7.770 -1.930



Conclusão? $(\mu_2 = \mu_4)^* > (\mu_1 = \mu_3)$ Diferenças significantes a um nível de significância global igual a 5%

Dados de *Clorofila a*

Tukey multiple comparisons of means

95% family-wise confidence level

Fit: aov(formula = Resp ~ Trat, data = dados)

\$Trat

	diff	lwr	upr	p adj
2-1	6.3500000	3.411858	9.288142	0.0000360
3-1	-0.4333333	-3.371476	2.504809	0.9756358
4-1	4.4166667	1.478524	7.354809	0.0022547
3-2	-6.7833333	-9.721476	-3.845191	0.0000149
4-2	-1.9333333	-4.871476	1.004809	0.2840071
4-3	4.8500000	1.911858	7.788142	0.0008789

Conclusão? $(\mu_2 = \mu_4)^* > (\mu_1 = \mu_3)$ Diferenças significantes a um nível de significância global igual a 5%

Comparações Múltiplas

- **Método de Contrastes Ortogonais**
- **Método de Dunnett**
- **Método de Scheffé**
- **Método de Bonferroni**
- **Método FDR**
- ...

Comparações Múltiplas

- **Método de Bonferroni**

$$H : \sum_{j=1}^J c_j \mu_j = 0 \quad ; \quad \sum c_j = 0$$

$$\sum_{j=1}^J c_j \bar{Y}_j \pm B \sqrt{\hat{V} \left(\sum c_j \bar{Y}_j \right)}$$

Intervalo de Confiança Simultâneo de Bonferroni (é mais conservador que o de Tukey)

$$B = t_{(n-J);(1-\alpha/2K)}$$



Correção de Bonferroni para “K” múltiplos testes

Comparações Múltiplas

Correções para Múltiplos Testes

Rejeitar H_{0j} se:	Método
$p_{(k)} < \alpha / K$	Correção de <u>Bonferroni</u> para múltiplos testes
$p_{(j)} < \alpha / (K - j + 1)$ <i>para todo $j = 1, \dots, k$</i>	Correção de <u>Holm</u> (Controle “forte” da taxa de erro para os múltiplos testes)
$p_{(j)} < j\alpha / K$ <i>para algum $j \geq k$</i>	Correção FDR (Taxa de Falsa Descoberta): <u>Benjamini-Hochberg</u> Controle menos conservador da taxa de erro para os múltiplos testes)

K : número total de testes α : nível de significância global fixado

$p_{(j)}$: nível descritivo (p-valor) ordenado, $p_{(1)} \leq p_{(2)} \leq \dots \leq p_{(K)}$

Comparações Múltiplas

Correções para Múltiplos Testes

Valores-p dos Testes “t” bicaudal, Bolferroni, Holm e FDR (False Discover Rate)

	pt.value	adjustb	adjusth	adjustfdr
T2-T3	8.792659e-05	0.0005275596	0.0005275596	0.0004928938
T1-T2	1.642979e-04	0.0009857876	0.0008214896	0.0004928938
T3-T4	7.230700e-04	0.0043384199	0.0028922799	0.0014461400
T2-T3	1.528013e-03	0.0091680765	0.0045840383	0.0022920191
T2-T4	1.539205e-01	0.9235227555	0.3078409185	0.1847045511
T1-T3	5.980538e-01	1.0000000000	0.5980537708	0.5980537708

adjustb=6*pt.value

Aleatorização e Testes de Aleatorização

Gary Oehlert (2010) – Capítulo 2

Planejamento Experimental com atribuição completamente aleatória dos tratamentos às unidades experimentais (DCA)

T_1	T_2	...	T_J
y_{11}	y_{12}	...	y_{1J}
...
y_{n_11}	y_{n_22}	...	y_{n_JJ}

O teste F da tabela da ANOVA assume normalidade dos erros, variância constante e observações independentes.

O procedimento de aleatorizar os tratamentos oferece outro teste global de efeitos de tratamentos. O teste da aleatorização assume que, sob H_0 , a resposta de cada uma das u.e. é fixa e igual ao valor observado. O que é aleatório é o tratamento aplicado. A ideia do teste é a obtenção da distribuição de uma estatística de interesse, apenas, sob H_0 e sob o processo de aleatorização.

Aleatorização e Testes de Aleatorização

Gary Oehlert (2010) – Capítulo 2

Planejamento Experimental
com atribuição completamente
aleatória dos tratamentos às
unidades experimentais (DCA)

T_1	T_2	...	T_J
y_{11}	y_{12}	...	y_{1J}
...
y_{n_11}	y_{n_22}	...	y_{n_JJ}

Considere a estatística F observada para os dados de *clorofila a* ($F=20,59$). Com base neste valor, há evidência amostral de diferença significativa para pelo menos uma das médias de tratamentos?

Sob as premissas clássicas obtemos:

$$\text{valor } p = P\left(F_{(J-1; n-J)} \geq F_0\right)$$

Para os dados de *clorofila a*: $F=20,59$ (valor $p=0,000$)
E, portanto, há efeito (global) significativo dos tratamentos na medida de *clorofila a* dissolvida na água.

Contudo, supondo apenas aleatorização dos tratamentos às unidades experimentais, sob H_0 , é possível construir uma distribuição de referência para avaliação da significância da estatística observada no experimento.

Felizmente, o teste F sob premissas clássicas oferece resultados muito parecidos com o teste de aleatorização, podendo estes serem aplicados um como aproximação ao outro.

Passos para o Teste de Aleatorização:

1. Escolha uma estatística apropriada para avaliar H_0 , por exemplo,
 $F = QM_{Trat} / QM_{Residual}$
1. Calcule o valor da estatística para os dados do experimento realizado, por exemplo, no caso da clorofila a, $F_o = 20,59$
2. Mantendo as respostas fixas, faça todas as M combinações possíveis de sorteios de tratamentos às u.e. e calcule F_k , para $k = 1, 2, \dots, M$
3. Calcule a probabilidade de significância dada por:

$$valor\ p = \frac{\#(F_k \geq F_o)}{M}$$

Mesmo com os recursos computacionais de hoje, programar todas as combinações possíveis de sorteios pode ser complicado. Uma aproximação ao teste de aleatorização, mais fácil de implementar, é a geração de uma “grande amostra aleatória” de possíveis sorteios.

Aleatorização e Testes de Aleatorização

```
> anova(aov(formula = Resp ~ Trat, data = dados))
Analysis of Variance Table

Response: Resp
      Df Sum Sq Mean Sq F value    Pr(>F)
Trat   3 199.937   66.646   20.16 2.924e-06 ***
Residuals 20  66.117    3.306

> library(lmPerm)

> anova(lmp(Resp ~ Trat, data = dados))
Analysis of Variance Table

Response: Resp
      Df R Sum Sq R Mean Sq Iter  Pr(Prob)
Trat   3 199.937   66.646 5000 < 2.2e-16 ***
Residuals 20  66.117    3.306
```

**Teste F global sob
premissas clássicas**

**Teste de
Aleatorização**