Lista 1 suplementar

Nícolas André da Costa Morazotti

8 de setembro de 2020

Questão 1

No circuito da figura 1, a corrente no tempo zero é nula, e o capacitor está carregado com $Q_0 = 2mC$. Encontre a corrente em função do tempo e mostre, em desenho do circuito, o sentido em que ela circulará nos primeiros instantes.

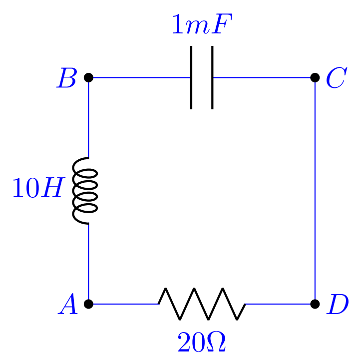


Figura 1: Questões 1 e 2.

A equação diferencial que traduz o circuito é

$$\frac{\mathrm{d}^2Q}{\mathrm{d}t^2} + \frac{2}{\tau}\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2 Q = 0, \tag{1}$$

com $\omega_0 = (LC)^{-1/2} = (10^{-2})^{-1/2} = 10rad/s$ e $\tau = 2L/R = 1s$. Podemos descobrir em qual regime de amortecimento estamos calculando $\omega_0\tau = 10 > 1$. Assim, sabemos que estamos no regime sub-amortecido e a solução da EDO pode ser escrita como

$$Q(t) = \alpha Q_x + \beta Q_y \tag{2}$$

$$Q_x = e^{-t/\tau}\cos(\omega_1 t) \tag{3}$$

$$Q_y = e^{-t/\tau}\frac{\sin(\omega_1 t)}{\omega_1} \tag{4}$$

$$\omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{1}{\tau^2}}. \tag{5}$$

Dessa maneira, podemos substituir as condições iniciais. Em geral, temos $Q(0) = Q_0$ e $I(0) = I_0$. A primeira condição trivialmente nos dá $\alpha = Q_0$ (pois $Q_x(0) = 1$ e $Q_y(0) = 0$). Para usar a segunda condição, vamos derivar a solução no tempo.

$$I(t) = \alpha\left(-\frac{1}{\tau}Q_x - \omega_1^2 Q_y\right) + \beta\left(-\frac{1}{\tau}Q_y + Q_x\right) \tag{6}$$

$$I(0) = -\frac{a}{\tau} + \beta = I_0 \tag{7}$$

$$\beta = I_0 + \frac{Q_0}{\tau}. \tag{8}$$

Colocando as constantes na equação da corrente, com $I(0) = 0$, temos

$$I(t) = Q_0\left(-\frac{1}{\tau}Q_x - \omega_1^2 Q_y\right) + \frac{Q_0}{\tau}\left(-\frac{1}{\tau}Q_y + Q_x\right) \tag{9}$$

$$= Q_x\left(-\frac{Q_0}{\tau} + \frac{Q_0}{\tau}\right) + Q_y\left(-\omega_1^2 Q_0 - \frac{Q_0}{\tau^2}\right) \tag{10}$$

$$= Q_0 Q_y\left(-\omega_1^2 - \frac{1}{\tau^2}\right) \tag{11}$$

$$= -\omega_0^2 Q_0 Q_y. \tag{12}$$

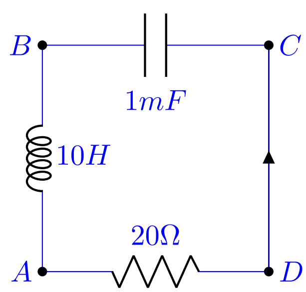
Para tempos pequenos, $Q_y \approx t$, o que nos dá

$$I(t) \approx -\omega_0^2 Q_0 t \tag{13}$$

$$= -100 \cdot 2mCt \tag{14}$$

$$= -0.2Ct < 0. \tag{15}$$

Assim, a corrente inicial circula em um sentido oposto ao sentido dado pela polarização do capacitor (a partir de aqui assumido sentido horário). Na figura, vemos pela seta no sentido anti-horário no segmento CD.



Questão 2

Resolva a questão 1 supondo que as condições iniciais são $Q_0 = 2mC$ e $I_0 = 1mA$.

Com as condições iniciais, temos $\alpha = Q_0$ e

$$I_0 = \beta - \frac{Q_0}{\tau} \tag{16}$$

$$\beta = I_0 + \frac{Q_0}{\tau} \tag{17}$$

Colocando na solução para a corrente, temos

$$I(t) = Q_0\left(-\frac{1}{\tau}Q_x - \omega_1^2 Q_y\right) + \left(I_0 + \frac{Q_0}{\tau}\right)\left(-\frac{1}{\tau}Q_y + Q_x\right) \tag{18}$$

$$= Q_x\left(-\frac{Q_0}{\tau} + I_0 + \frac{Q_0}{\tau}\right) + Q_y\left(-\omega_1^2 Q_0 - \frac{I_0}{\tau} - \frac{Q_0}{\tau^2}\right) \tag{19}$$

$$= I_0 Q_x + Q_y\left(-\omega_0^2 Q_0 - \frac{I_0}{\tau}\right). \tag{20}$$

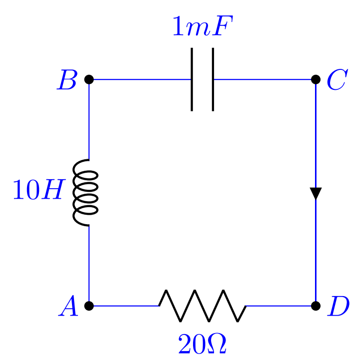
Substituindo os valores de $Q_0 = 2mC$, $I_0 = 1mA$, $\omega_0 = 10rad/s$ e $\tau = 1s$, temos

$$I(t) = 1mAQ_x + Q_y\left(-200\frac{mA}{s} - 1\frac{mA}{s}\right). \tag{21}$$

Fazendo a aproximação $Q_x \approx 1, Q_y \approx t$, a corrente nos primeiros instantes é

$$I(t) \approx 1mA - 201\frac{mA}{s}t. \tag{22}$$

Para tempos inferiores a $1/201s$, a corrente segue no sentido horário, como mostra a figura abaixo.



Questão 3

No circuito da figura 2, a carga inicial no capacitor é $1\mu C$ e a corrente inicial é nula. Quanto tempo decorre até que a carga no capacitor se anule pela primeira vez? Que corrente circula nesse momento? Essa corrente tende a aumentar (tornar positiva) ou diminuir a carga no capacitor?

Precisamos aqui descobrir em que regime de amortecimento estamos. Para isso, calculamos o

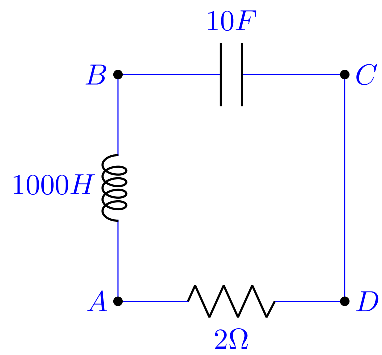


Figura 2: Questão 3.

produto $\omega_0\tau$.

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \tag{23}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{10^3 \cdot 10}} \tag{24}$$
$$= \frac{1}{10^2} \tag{25}$$
$$= 0.01, \tag{26}$$
$$\tau = \frac{2L}{R} \tag{27}$$
$$= \frac{2 \cdot 1000}{2} \tag{28}$$
$$= 1000, \tag{29}$$
$$\omega_0\tau = 0.01 \cdot 1000 \tag{30}$$
$$= 10 > 1. \tag{31}$$

Estamos, então, no regime subamortecido. A solução, utilizando as funções Q_x e Q_y apropriadas (as mesmas do exercício 1), é

$$Q(t) = Q_0 Q_x + \left(I_0 + \frac{Q_0}{\tau}\right) Q_y. \tag{32}$$

A corrente inicial é nula, a carga inicial é de $Q_0 = 1\mu C$. A solução é

$$Q(t) = 1\mu C Q_x + \frac{1\mu C}{\tau} Q_y \tag{33}$$
$$= 1\mu C \left[e^{-t/\tau}\left(\cos(\omega_1 t) + \frac{\sin(\omega_1 t)}{\omega_1 \tau}\right)\right]. \tag{34}$$

Se impusermos que o tempo em que ocorre tal evento é t_0, temos que

$$Q(t_0) = 0 = \cos(\omega_1 t_0) + \frac{\sin(\omega_1 t_0)}{\omega_1 \tau}. \tag{35}$$

Podemos dividir ambos os lados pelo cosseno, obtendo

$$\tan(\omega_1 t_0) + \omega_1 \tau = 0 \tag{36}$$
$$\tan(\omega_1 t_0) = -\omega_1 \tau. \tag{37}$$

Veja que podemos tomar o arcotangente de ambos os lados e obteremos

$$t_0 = -\frac{1}{\omega_1}\arctan(\omega_1 \tau). \tag{38}$$

Tomemos cuidado! Se substituirmos ω_1 e τ pelos valores dados,

```
t=-147.8s
```

O tempo é negativo! Devemos então considerar que $\tan(x + n\pi) = \tan(x), \forall n \in Z$. Assim,

$$\tan(\omega_1 t_0 + n\pi) = -\omega_1 \tau \tag{39}$$

$$\omega_1 t_0 + n\pi = -\arctan(\omega_1 \tau) \tag{40}$$

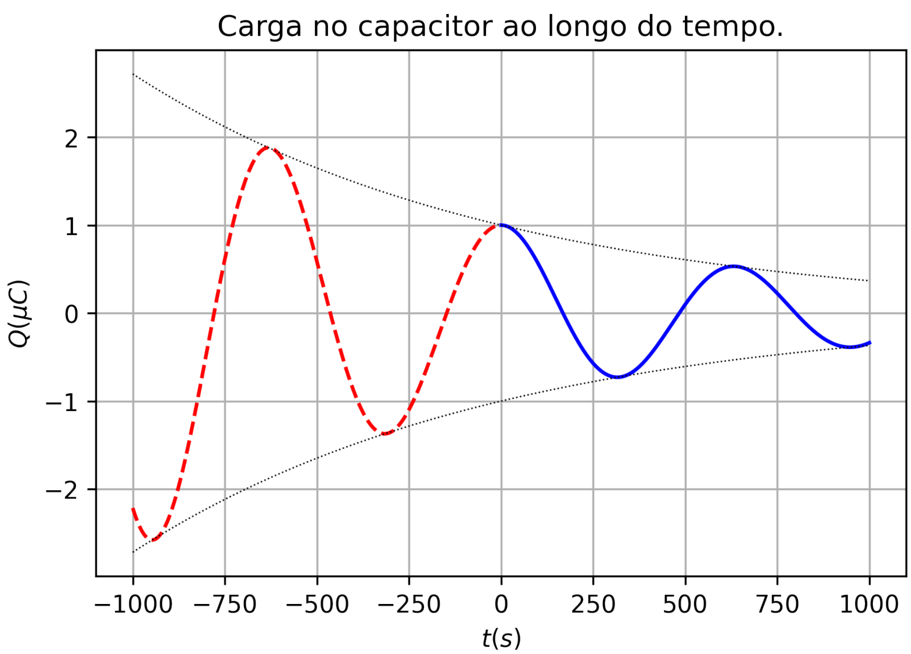
$$t_0 = \frac{-\arctan(\omega_1 \tau) - n\pi}{\omega_1}. \tag{41}$$

Evidentemente, n deve ser negativo, para cancelar o sinal. Para cada n, temos um acréscimo de

```
315.7s.
```

$n = -1$ é suficiente. O primeiro tempo em que a carga do capacitor é nula é

```
t_0=167.9s
```



A corrente no sistema é

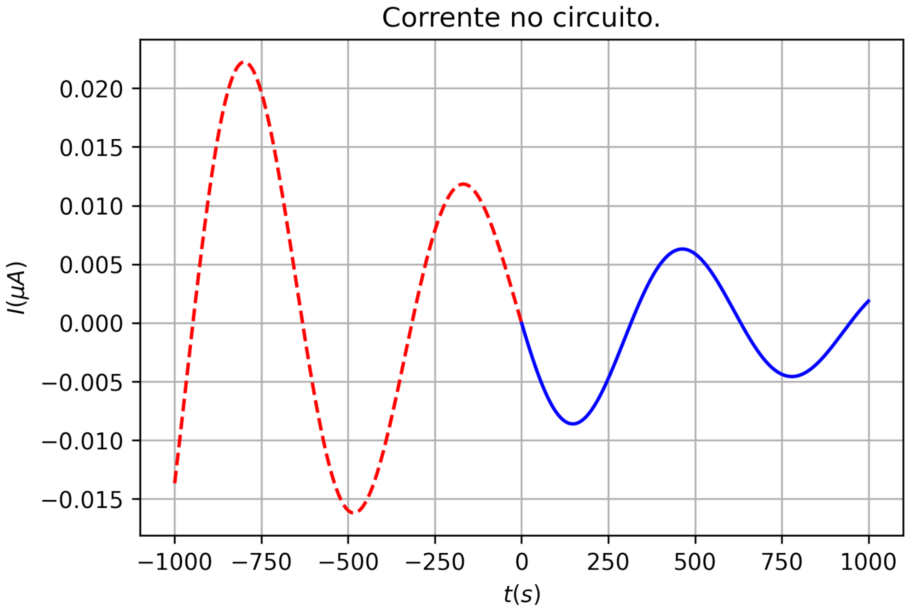
$$I(t) = -\frac{1}{\tau}Q(t) + \omega_1 e^{-t/\tau}\left(-\sin(\omega_1 t) + \frac{\cos(\omega_1 t)}{\omega_1 \tau}\right) \tag{42}$$

$$I(t_0) = \omega_1 e^{-t_0/\tau}\left(-\sin(\omega_1 t_0) + \frac{\cos(\omega_1 t_0)}{\omega_1 \tau}\right). \tag{43}$$

Colocando os valores, temos

```
I(t_0)=-0.0085\mu A
```

Tal corrente, negativa, tende a diminuir a carga do capacitor.



Questão 4

No circuito da figura 3, as condições iniciais são tais que a carga no capacitor é dada pela expressão

$$Q(t) = 2Q_x(t), \tag{44}$$

onde Q_x é a função discutida em classe, para a classe de amortecimento a que pertence o circuito. Calcule a razão $-\dot{Q}/Q(t)$ para $t = 0$ e para $t \gg \tau_1$. Interprete o resultado. *Sugestão: Para valores grandes de seu argumento u, as funções hiperbólicas* $\cosh(u)$ *e* $\sinh(u)$ *tendem a* $\exp(u)/2$. *A razão entre a derivada de uma função e o valor da função no mesmo ponto mede a taxa de crescimento ou decaimento da função.*

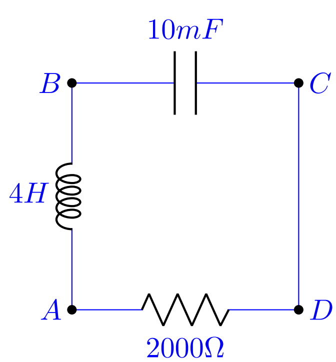


Figura 3: Questões 4 e 5.

A partir dos parâmetros do circuito (e também intuindo a partir da sugestão do professor), podemos verificar que o regime do amortecimento é superamortecido:

$$\begin{aligned}
\omega_0 &= \frac{1}{\sqrt{LC}} && (45)\\
&= \frac{1}{\sqrt{4 \cdot 10 \cdot 10^{-3}}} && (46)\\
&= \frac{1}{\sqrt{4 \cdot 10^{-2}}} && (47)\\
&= \frac{10}{2} && (48)\\
&= 5 && (49)\\
\tau &= \frac{2L}{R} && (50)\\
&= \frac{8}{2000} && (51)\\
&= 8 \cdot 10^{-3} && (52)\\
\omega_0 \tau &= 0.04 < 1. && (53)
\end{aligned}$$

Assim, a solução é

$$Q(t) = 2Q_x, \tag{54}$$

com $Q_x = e^{-t/\tau} \cosh(t/\tau_1)$ e $1/\tau_1 = \sqrt{1/\tau^2 - \omega_0^2}$. Assim,

$$Q(t) = 2e^{-t/\tau} \cosh(t/\tau_1). \tag{55}$$

Tomando a derivada temporal de $Q(t)$, temos

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} &= -\frac{1}{\tau} Q(t) + 2\frac{e^{-t/\tau}}{\tau_1} \sinh(t/\tau_1) && (56)\\
&= -\frac{1}{\tau} Q(t) + \frac{1}{\tau_1} \tanh(t/\tau_1) Q(t) && (57)\\
&= \left[\frac{\tanh(t/\tau_1)}{\tau_1} - \frac{1}{\tau}\right] Q(t) && (58)\\
\frac{1}{Q}\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} &= \frac{\tanh(t/\tau_1)}{\tau_1} - \frac{1}{\tau}. && (59)
\end{aligned}$$

Agora, basta analisarmos os limites desejados. Em $t = 0$,

$$\frac{1}{Q}\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} = -\frac{1}{\tau}. \tag{60}$$

Nesse caso, a corrente começa seguindo o sentido oposto do circuito, sentido definido pelos polos do capacitor. Já para $t \gg \tau_1$, $\tanh(t/\tau_1) \to 1$. Assim,

$$\frac{1}{Q}\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{\tau_1} - \frac{1}{\tau} > 0. \tag{61}$$

Questão 5

No circuito da figura 3, a carga inicial é nula, e a corrente inicial, $I(0) = 1A$. Quanto tempo decorrerá até que a carga no capacitor seja máxima? Qual é a carga máxima?

Como visto no exercício anterior, o sistema está superamortecido. Desta forma, a solução da carga é

$$Q(t) = Q_0 Q_x + \left(\frac{Q_0}{\tau} + I_0\right) Q_y \tag{62}$$

$$Q_x = e^{-t/\tau} \cosh(t/\tau_1) \tag{63}$$

$$Q_y = e^{-t/\tau} \tau_1 \sinh(t/\tau_1). \tag{64}$$

Com as condições iniciais dadas,

$$Q(t) = 1A Q_y(t) \tag{65}$$

$$I(t) = 1A\left(-\frac{1}{\tau} Q_y(t) + Q_x(t)\right). \tag{66}$$

Colocando como condição $I(t_0) = 0$ (afinal, a corrente é a derivada da carga e desejamos a carga máxima), podemos aplicar o mesmo passo a passo que anteriormente.

$$0 = \exp(-t_0/\tau)\left[-\frac{\tau_1}{\tau}\sinh(t_0/\tau_1) + \cosh(t_0/\tau_1)\right] \tag{67}$$

$$= -\frac{\tau_1}{\tau}\sinh(t_0/\tau_1) + \cosh(t_0/\tau_1) \tag{68}$$

$$= -\frac{\tau_1}{\tau}\tanh(t_0/\tau_1) + 1 \tag{69}$$

$$\implies \tanh(t_0/\tau_1) = \frac{\tau}{\tau_1} \tag{70}$$

$$t_0 = \tau_1 \operatorname{arctanh}(\tau/\tau_1). \tag{71}$$

```
t_0 = 0.018420 s
Q(t_0) = 1.998 mC
```

Questão 6

Na figura 4, a frequência da fonte de tensão é $\omega = 1 rad/s$, e a amplitude da força eletromotriz é $\mathcal{E}_0 = 10mV$. Encontre a equação diferencial que determina a carga em função do tempo e encontre a carga estacionária em função do tempo. Para isso, empregue o procedimento descrito em classe para encontrar a função $z(t) = z_0 \exp(i\omega t)$. Como não há resistor no circuito, no final será fácil encontrar a parte real de z para determinar a carga.

A equação diferencial para o circuito é

$$L\frac{\mathrm{d}^2 Q}{\mathrm{d}t^2} + \frac{Q}{C} = \mathcal{E}_0 \cos(\omega t). \tag{72}$$

A equação não-homogênea é resolvida lançando mão da função $z(t) = z_0 e^{i\omega t}$ e tomando a parte

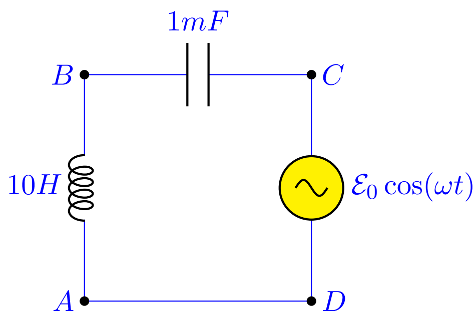


Figura 4: Questões 6 e 7.

real na equação

$$L\frac{\mathrm{d}^2 z}{\mathrm{d}t^2}+\frac{z}{C}=\mathcal{E}_0 e^{i\omega t} \tag{73}$$

$$-\omega^2 L z_0 e^{i\omega t}+\frac{z_0}{C}e^{i\omega t}=\mathcal{E}_0 e^{i\omega t} \tag{74}$$

$$z_0\left(-\omega^2+\omega_0^2\right)=\frac{\mathcal{E}_0}{L} \tag{75}$$

$$z_0=\frac{\mathcal{E}_0/L}{\omega_0^2-\omega^2} \tag{76}$$

$$z(t)=\frac{\mathcal{E}_0/L}{\omega_0^2-\omega^2}e^{i\omega t} \tag{77}$$

$$\Re z(t)=\frac{\mathcal{E}_0/L}{\omega_0^2-\omega^2}\cos(\omega t) \tag{78}$$

$$Q_E(t)=\frac{\mathcal{E}_0/L}{\omega_0^2-\omega^2}\cos(\omega t). \tag{79}$$

A carga estacionária vem apenas da parte não-homogênea. Para $\omega = 1/s$, $\mathcal{E}_0 = 10mV$ e $\omega_0 = 10/s$, temos

$$Q_E(t)=\frac{(1\cdot 10^{-2}V/10H)}{\frac{100-1}{s^2}}\cos(t) \tag{80}$$

$$\approx -\frac{10^{-3}}{99}\cos(t)C \tag{81}$$

$$= -\frac{1}{99}\cos(t)mC. \tag{82}$$

Questão 7

Na ausência de resistor, a carga estacionária no circuito da figura 4 pode ser encontrada de forma alternativa, igualmente simples. Procure uma solução da forma $Q(t) = A\cos(\omega t)$, onde A é uma constante que você deverá determinar. Compare o resultado com o da questão 6.

Uma vez que não temos o resistor, não temos um termo proporcional à primeira derivada da carga, o que quer dizer que não precisamos de algo que inclua senos e cossenos. Assim, para o circuito da figura 4,

$$L\frac{\mathrm{d}^2Q}{\mathrm{d}t^2} + \frac{Q}{C} = \mathcal{E}_0\cos(\omega t) \tag{83}$$

$$-\omega^2 A\cos(\omega t) + \omega_0^2 A\cos(\omega t) = \frac{\mathcal{E}_0}{L}\cos(\omega t), \tag{84}$$

o que leva a

$$A = \frac{\mathcal{E}_0}{L(\omega_0^2-\omega^2)} \tag{85}$$

$$Q(t) = \frac{\mathcal{E}_0}{L(\omega_0^2-\omega^2)}\cos(\omega t), \tag{86}$$

que é o mesmo resultado encontrado para o exercício 6.

Questão 8

Encontre a equação que determina a corrente estacionária no circuito da figura 5, onde $\omega = 1rad/s$. Como a equação é algébrica (não é diferencial), pode ser resolvida imediatamente. Resolva-a, também, pelo procedimento discutido em classe. Para isso, faça $L = 0$, $C \to \infty$ na equação diferencial $L\frac{\mathrm{d}^2Q}{\mathrm{d}t^2} + R\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} + Q/C = \mathcal{E}\cos(\omega t)$, escreva a equação correspondente no plano complexo e encontre a variável $z = z_0\exp(i\omega t)$. Aqui, também, é fácil tomar a parte real de z para determinar a carga em função do tempo. Em seguida, calcule a corrente. Compare com o resultado que você obteve inicialmente.

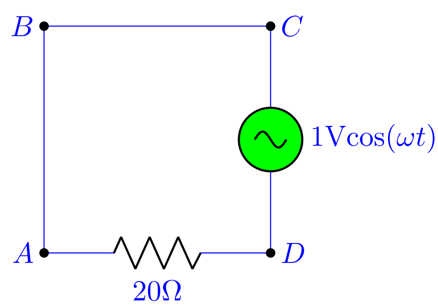


Figura 5: Questão 8.

Imediatamente, utilizamos a lei de Ohm e obtemos

$$\cos(\omega t) = RI \tag{87}$$

$$I = \frac{1}{20}\cos(t)A. \tag{88}$$

Para resolver pelo outro procedimento, considere

$$L\frac{\mathrm{d}^2Q}{\mathrm{d}t^2} + R\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} + Q/C = \mathcal{E}\cos(\omega t). \tag{89}$$

Utilizando a expressão para números complexos, a equação se torna

$$L\frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}t^2} + R\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} + \frac{z}{C} = \mathcal{E}e^{i\omega t}, \tag{90}$$

com $Q = \Re z(t)$. A solução que adotamos é o *ansatz* $z = z_0 e^{i\omega t}$. Colocando o *ansatz* na equação,

$$-\omega^2 L z_0 e^{i\omega t} + i\omega R z_0 e^{i\omega t} + \frac{z_0}{C} e^{i\omega t} = \mathcal{E} e^{i\omega t} \tag{91}$$

$$z_0(-\omega^2 L + i\omega R + \frac{1}{C}) = \mathcal{E}. \tag{92}$$

Podemos isolar z_0 e multiplicar em cima e embaixo pelo denominador conjugado, ficando com

$$\begin{aligned} z_0 &= \frac{\mathcal{E}}{-\omega^2 L + i\omega R + 1/C} \cdot \frac{-\omega^2 L - i\omega R + 1/C}{-\omega^2 L - i\omega R + 1/C} && (93) \\ &= \frac{\mathcal{E}(-\omega^2 L - i\omega R + 1/C)}{(1/C - \omega^2 L)^2 + \omega^2 R^2}. && (94) \end{aligned}$$

No limite $L \to 0, C \to \infty$,

$$\begin{aligned} z_0 &= -\frac{i\omega R \mathcal{E}}{\omega^2 R^2} && (95) \\ &= -i\frac{\mathcal{E}}{\omega R} && (96) \\ z(t) &= z_0 e^{i\omega t} && (97) \\ &= -i\frac{\mathcal{E}}{\omega R} e^{i\omega t} && (98) \\ &= -i\frac{\mathcal{E}}{\omega R}(\cos(\omega t) + i\sin(\omega t)) && (99) \\ &= \frac{\mathcal{E}}{\omega R}(-i\cos(\omega t) + \sin(\omega t)) && (100) \\ Q(t) &= \frac{\mathcal{E}}{\omega R}\sin(\omega t). && (101) \end{aligned}$$

Agora que temos a carga, derivamo-la no tempo e obtemos

$$\begin{aligned} I(t) &= \frac{\mathcal{E}}{R}\cos(\omega t) && (102) \\ &= \frac{1}{20}\cos(t) A. && (103) \end{aligned}$$

Questão 9

Reproduza o procedimento adotado em classe para o circuito da figura 6 até encontrar a função $z(t)$. Considere, agora, a frequência $\omega = \omega_0$. Nesse caso, será fácil tomar a parte real da função $z(t)$ e encontrar a carga em função do tempo. Compare com o resultado da questão 8. *Sugestão: lembre-se de que $\tau = 2L/R$ para expressar a resposta somente em termos de R.*

Seguindo o procedimento, resolvemos a equação

$$\frac{\mathrm{d}^2 Q}{\mathrm{d}t^2} + \frac{2}{\tau}\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2 Q = \frac{\mathcal{E}_0}{L}\cos(\omega t) \tag{104}$$

com $Q = \Re z$ e $z = z_0 e^{i\omega t}$.

$$-\omega^2 z_0 e^{i\omega t} + i\omega z_0 \frac{2}{\tau} e^{i\omega t} + \omega_0^2 e^{i\omega t} = \frac{\mathcal{E}_0}{L} e^{i\omega t} \tag{105}$$

$$z_0\left(\omega_0^2 - \omega^2 + i\frac{2\omega}{\tau}\right) = \frac{\mathcal{E}_0}{L}. \tag{106}$$

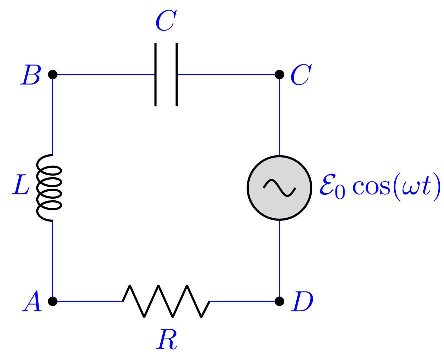


Figura 6: Questão 9.

Isolando z_0,

$$z_0 = \frac{\mathcal{E}_0/L}{\omega_0^2 - \omega^2 + i2\omega/\tau} \frac{\omega_0^2 - \omega^2 - i2\omega/\tau}{\omega_0^2 - \omega^2 - i2\omega/\tau} \tag{107}$$

$$= \frac{1}{L} \frac{\mathcal{E}_0(\omega_0^2 - \omega^2 - i2\omega/\tau)}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\omega^2/\tau^2}. \tag{108}$$

Fazendo $\omega = \omega_0$ (ressonância), a expressão para z_0 se simplifica para

$$z_0 = -i\frac{2\omega}{\tau} \frac{\mathcal{E}_0/L}{4\omega^2/\tau^2} \tag{109}$$

$$= -i\frac{\mathcal{E}_0/L}{2\omega/\tau} \tag{110}$$

$$z(t) = -i\frac{\mathcal{E}_0/L}{2\omega/\tau} e^{i\omega t}. \tag{111}$$

Por um procedimento igual ao realizado no exercício 8, temos que

$$Q(t) = \frac{\mathcal{E}_0/L}{2\omega/\tau} \sin(\omega t) \tag{112}$$

$$I(t) = \frac{\mathcal{E}_0/L}{2/\tau} \cos(\omega t). \tag{113}$$

Substituindo $2/\tau = R/L$,

$$I(t) = \frac{\mathcal{E}_0}{R} \cos(\omega t), \tag{114}$$

que é o mesmo resultado de ter um circuito com apenas o resistor! Isso nos intui de que a ressonância tira efeitos capacitivos e indutivos de circuitos.

Questão 10

Repita a questão 9, mas considere agora o limite $\omega \to 0$. Aqui, também, será fácil tomar a parte real de $z(t)$ para calcular a carga como função do tempo. Interprete o resultado. *Sugestão: nesse limite, a fonte de tensão funciona como se fosse uma bateria. Como estamos calculando a carga estacionária, tudo se passa como se o circuito estivesse ligado há muito tempo.*

Partindo da solução de z_0:

$$z_0 = \frac{1}{L}\frac{\mathcal{E}_0(\omega_0^2 - \omega^2 - i2\omega/\tau)}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\omega^2/\tau^2} \tag{115}$$

$$z(t) = \frac{1}{L}\frac{\mathcal{E}_0(\omega_0^2 - \omega^2 - i2\omega/\tau)}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\omega^2/\tau^2} e^{i\omega t} \tag{116}$$

$$\lim_{\omega \to 0} z(t) = \frac{\mathcal{E}_0 \omega_0^2}{L\omega_0^4} \tag{117}$$

$$= C\mathcal{E}_0 = Q. \tag{118}$$

Nesse caso, com baixas frequências, o circuito se encontra em uma situação parecida com corrente contínua, e a carga do capacitor, evidentemente, é a carga para tempos muito longos, $Q = CV$.