AULAS ANTERIORES 04/09/2020

→ Um conjunto V será um EV se, e somente se:

* 1º requisito - operações fundamentais. ✓
* 2º requisito - 8 axiomas → operações. ✓

○ Algebricamente, os elementos se comportam como vetores do $\mathbb{R}^2$ e do $\mathbb{R}^3$

→ Um subconjunto não-vazio S, $S \subset V$, será um SEV se, e somente se:

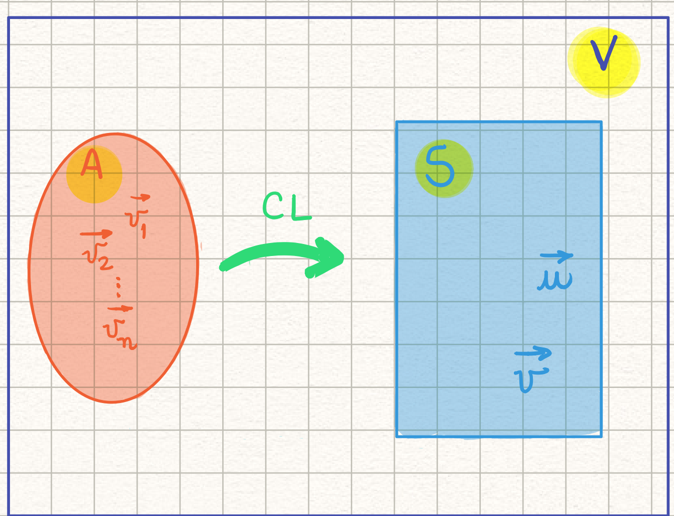
* 1º requisito $\begin{cases} \forall \vec{u}, \vec{v} \in S, & \vec{u} + \vec{v} \in S \\ \forall \alpha \in \mathbb{R}, & \alpha \vec{u} \in S \end{cases}$

→ Qualquer vetor $\vec{v} \in V$ da forma:

$$\vec{v} = a_1 \vec{v_1} + a_2 \vec{v_2} + \dots + a_n \vec{v_n} \quad , \quad a_i \in \mathbb{R}$$

é chamado CL dos vetores $\underbrace{\vec{v_1}, \dots, \vec{v_n}}_{\in V}$.

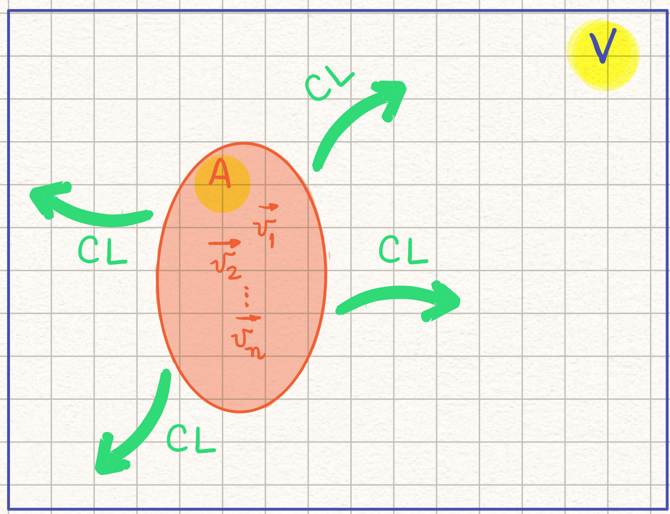
→ A característica de um SEV Gerado é ser CL de um n. finito de vetores de um conhecido conjunto A:



$S = [\vec{v_1}, \dots, \vec{v_n}]$

ou

$S = G(A)$



→ Nesse caso, $V = G(A)$ é dito **EV Finitamente Gerado.**

A... cj finito

Slide 25 - Exemplos

i) $\vec{v_1} = (2,-1,3)$; $\vec{v_2} = (-1,0,-2)$; $\vec{v_3} = (2,-3,1)$, $V = \mathbb{R}^3$

LD ou LI? $a_1\vec{v_1} + a_2\vec{v_2} + a_3\vec{v_3} = \vec{0}$, $\vec{0} = (0,0,0)$

$$a_1(2,-1,3) + a_2(-1,0,-2) + a_3(2,-3,1) = (0,0,0)$$

$$(2a_1 - a_2 + 2a_3 , -a_1 - 3a_3 , 3a_1 - 2a_2 + a_3) = (0,0,0)$$

a_1, a_2 e a_3 são solução do sistema linear:

$$\begin{cases} 2a_1 - a_2 + 2a_3 = 0 & (\mathrm{I}) \\ -a_1 - 3a_3 = 0 & (\mathrm{II}) \\ 3a_1 - 2a_2 + a_3 = 0 & (\mathrm{III}) \end{cases}$$

SPDet ou SPInd

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & -3 \\ 3 & -2 & 1 \end{vmatrix} \begin{cases} = 0 \to \text{SPI} \to \text{LD} \\ \neq 0 \to \text{SPD} \to \text{LI} \end{cases}$$

(II) : $a_1 = -3a_3$

$a_1 \to (\mathrm{I})$: $a_2 = -4a_3$

$a_1, a_2 \to (\mathrm{III})$: $-9a_3 + 8a_3 + a_3 = 0 \xrightarrow{0=0} 0a_3 = 0 \longrightarrow a_3 \in \mathbb{R}$

$\therefore \exists\, a_3 \neq 0$ e o cj é LD

OBS: Se $a_3 = -1$ $\begin{cases} a_1 = 3 \\ a_2 = 4 \end{cases}$ e $3\vec{v_1} + 4\vec{v_2} - \vec{v_3} = \vec{0}$.

ii) $\vec{e_1} = (1,0,0)$; $\vec{e_2} = (0,1,0)$; $\vec{e_3} = (0,0,1)$, $V = \mathbb{R}^3$

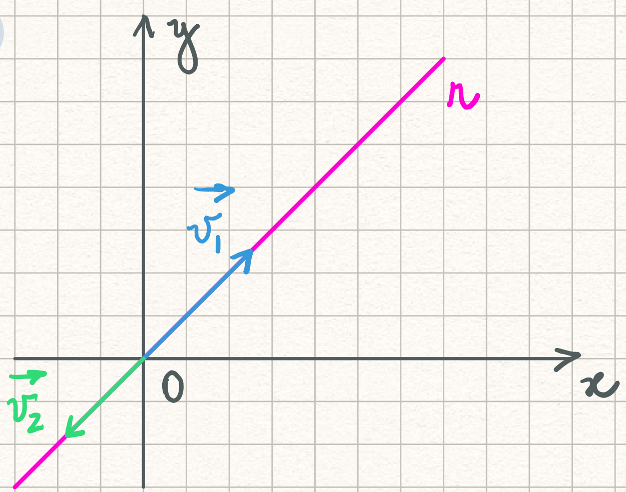
LD ou LI? $a_1 \vec{e_1} + a_2 \vec{e_2} + a_3 \vec{e_3} = \vec{0}$, $\vec{0} = (0,0,0)$

$$a_1 (1,0,0) + a_2 (0,1,0) + a_3 (0,0,1) = (0,0,0)$$

$$(a_1, a_2, a_3) = (0,0,0)$$

$\therefore a_1 = a_2 = a_3 = 0$ e o conjunto é LI

iii)



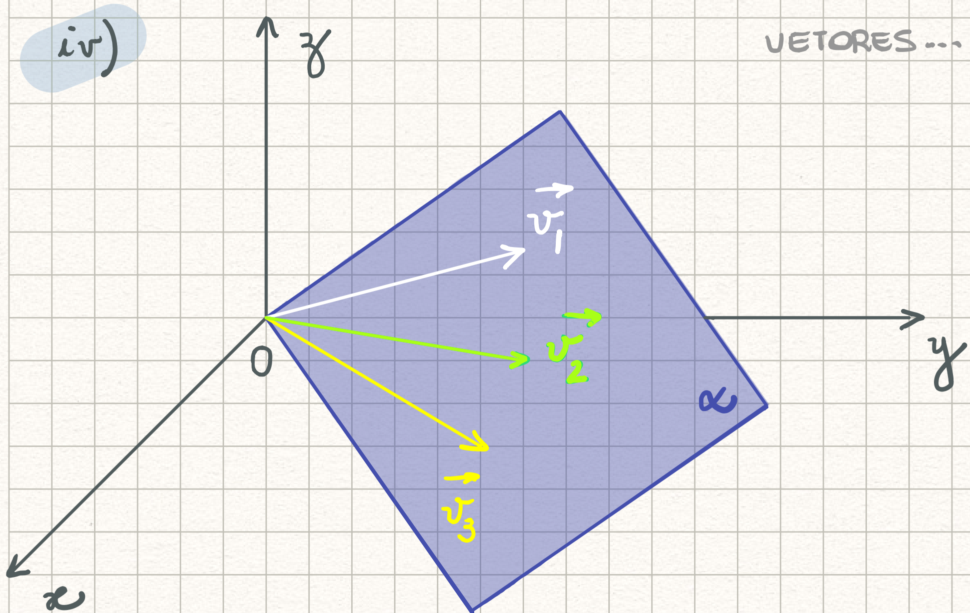
VETORES... medidos a partir da origem

$$\vec{v_1} \,//\, \vec{v_2} \;\therefore\; \underbrace{\vec{v_1} = \alpha \vec{v_2}}_{CL} , \; \alpha \in \mathbb{R}$$

CL $\therefore$ são LD

iv)

VETORES... medidos a partir da origem



Se $\vec{v_1}$, $\vec{v_2}$ e $\vec{v_3}$ são coplanares, então, um dos vetores pode ser escrito em termos dos outros, isto é, um dos vetores será CL dos outros $\therefore$ vetores são LD

v) OBS: 2 vetores $\longrightarrow$ CL $\longrightarrow$ $\vec{v}_1 = K\vec{v}_2$, $K \in \mathbb{R}$

* Se $\exists K \in \mathbb{R} \rightarrow \exists$ CL $\rightarrow$ LD
* Se $\nexists K \in \mathbb{R} \rightarrow \nexists$ CL $\rightarrow$ LI

a) $f_1 = x$, $f_2 = \text{sen}\, x$ } LD ou LI?

$f_1 = \alpha f_2$, $\alpha \in \mathbb{R}$

$x = \alpha\, \text{sen}\, x \longrightarrow \nexists \alpha \therefore$ LI

b) $g_1 = \text{sen}\, 2x$, $g_2 = 2\, \text{sen}\, x \cos x$ } LD ou LI?

$g_1 = \alpha g_2$, $\alpha \in \mathbb{R}$

$\text{sen}\, 2x = \alpha\, (2\, \text{sen}\, x \cos x)$

$(\text{sen}\, 2x = 2\, \text{sen}\, x \cos x)$

$\longrightarrow \exists\, \alpha = 1 \therefore$ LD

Slide 27 - Propriedades

I) Se $\vec{v} \neq \vec{0}$, então $a\vec{v} = \vec{0} \iff a = 0$ e o cj. A é LI.

II) Se $\vec{0} \in A$, então $A = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{0}, \dots, \vec{v}_n\}$

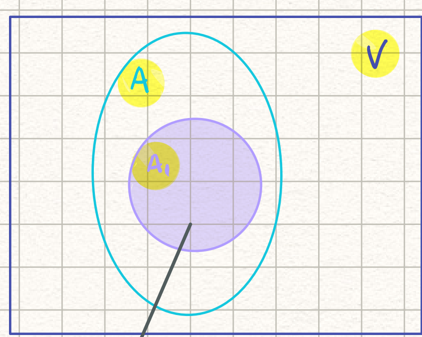
Assim:

$$a_1\vec{v}_1 + a_2\vec{v}_2 + \dots + \underbrace{\alpha\vec{0}}_{} + \dots + a_n\vec{v}_n = \vec{0}$$

$\alpha\vec{0} = \vec{0} \;\; \forall \alpha \in \mathbb{R}$ $(\exists \alpha \neq 0)$

E o cj. A é LD.

III) Sejam $\begin{cases} A = \{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_r, \dots, \vec{v}_n\} \\ A_1 = \{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_r\} \end{cases}$, $A_1 \subset A$



Como A_1 é LD, $\exists\, a_i \neq 0$ tal que:

$$a_1\vec{v}_1 + \dots + a_r\vec{v}_r = \vec{0}$$

Se A_1 é LD $\longrightarrow$ A é LD

(exceção que define a regra)

Analisando se A é LD:

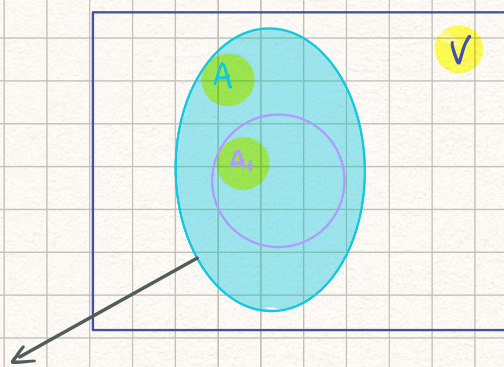
$$A_1 \quad \boxed{a_1\vec{v}_1+\dots+a_r\vec{v}_r}+\dots+a_n\vec{v}_n=\vec{0}$$

$\exists\, a_i \neq 0$ na parcela $a_1\vec{v}_1+\dots+a_r\vec{v}_r=\vec{0}$, referente a A_1.

Como $\exists\, a_i \neq 0$ em A, o cj. A é LD.

IV) Consequência de III:

Se A_1 fosse LD, o conj. A também seria LD; do contrário, a Prop. III seria contradita.



Se A é LI $\longrightarrow$ A_1 é LI

V) Se B é LD, $\exists\, a_i, \alpha \in \mathbb{R}$, não todos nulos, tais que:

$$a_1\vec{v}_1+a_2\vec{v}_2+\dots+a_n\vec{v}_n+\alpha\vec{w}=\vec{0} \qquad (1)$$

* Se $\alpha=0$, então $\alpha\vec{w}=\vec{0}$ e pode-se reescrever (1) como:

$$a_1\vec{v}_1+a_2\vec{v}_2+\dots+a_n\vec{v}_n=\vec{0} \qquad (2)$$

Se $\exists\, a_i \neq 0$ em (2), A seria LD, fato que contradiria a hipótese de que A é LI.

* Então $\alpha \neq 0$ e (1) pode ser reescrita da seguinte forma:

$$\vec{w}=\underbrace{\left(-\frac{a_1}{\alpha}\right)}_{\alpha_1}\vec{v}_1+\underbrace{\left(-\frac{a_2}{\alpha}\right)}_{\alpha_2}\vec{v}_2+\dots+\underbrace{\left(-\frac{a_n}{\alpha}\right)}_{\alpha_n}\vec{v}_n \qquad (3)$$

Ou seja, $\vec{w}$ é CL dos vetores de A quando o conjunto B é LD ($b \neq 0$).

Slide 28 - Exercícios

1) $V = P_2(x)$, $A = \{ \underbrace{2+x-x^2}_{p_1}, \underbrace{-4-x+4x^2}_{p_2}, \underbrace{x+2x^2}_{p_3} \}$ LD ou LI?

Para verificar se A é LD ou LI:

a) Resolver a equação: $a_1p_1 + a_2p_2 + a_3p_3 = p(0)$

$p(0) \downarrow$ $0 + 0x + 0x^2 = 0$

b) Se $a_1 = a_2 = a_3 = 0 \rightarrow$ LI

Se $\exists\, a_i \neq 0 \rightarrow$ LD

a) $a_1(2+x-x^2) + a_2(-4-x+4x^2) + a_3(x+2x^2) = 0$

$(2a_1 - 4a_2) + (a_1 - a_2 + a_3)x + (-a_1 + 4a_2 + 2a_3)x^2 = 0$

De onde se tem o sistema:

$$\begin{cases} 2a_1 - 4a_2 = 0 & (I) \\ a_1 - a_2 + a_3 = 0 & (II) \\ -a_1 + 4a_2 + 2a_3 = 0 & (III) \end{cases}$$

(I): $a_1 = 2a_2$

$a_1 \rightarrow (III)$: $a_3 = -a_2$

$a_1, a_3 \rightarrow (II)$: $2a_2 - a_2 - a_2 = 0$

$0a_2 = 0$, $a_2 \in \mathbb{R}$

b) Como $a_2 \in \mathbb{R}$, $\exists\, a_2 \neq 0$ $\therefore$ o conjunto A é LD //

2) Para verificar se A é LD ou LI, resolver a equação:

$$\alpha f(t) + \beta g(t) + \delta h(t) = 0$$

$\rightarrow$ função zero

$$\alpha \operatorname{sen}(t) + \beta \cos(t) + \delta t = 0 , \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

Atribuindo valores para t:

$t = 0: \quad \alpha \cdot 0 + \beta \cdot 1 + \gamma \cdot 0 = 0$

$t = \frac{\pi}{2}: \quad \alpha \cdot 1 + \beta \cdot 0 + \gamma \cdot \pi/2 = 0$

$t = \pi: \quad \alpha \cdot 0 + \beta \cdot (-1) + \gamma \cdot \pi = 0$

Encontrar α, β e γ implica resolver o sistema:

$$\begin{cases} \beta = 0 & (\mathrm{I}) \longrightarrow \beta = 0 \\ 2\alpha + \pi\gamma = 0 & (\mathrm{II}) \\ -\beta + \pi\gamma = 0 & (\mathrm{III}) \end{cases}$$

$\beta \rightarrow (\mathrm{III}): \quad \gamma = 0$

$\gamma \rightarrow (\mathrm{II}): \quad \alpha = 0$

Como $\alpha = \beta = \gamma = 0$, o conjunto A é LI. //

3) $A = \left\{ \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}}_{M_1}; \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_{M_2}; \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ k & 0 \end{bmatrix}}_{M_3} \right\}$; k para A ser LD?

A será LD se $\exists\, a_i \neq 0$ como solução da equação:

$$a_1 M_1 + a_2 M_2 + a_3 M_3 = 0 \longrightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$a_1 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + a_2 \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + a_3 \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ k & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a_1 & 0 \\ a_1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_2 & a_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2a_3 & -a_3 \\ ka_3 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a_1 + a_2 + 2a_3 & a_2 - a_3 \\ a_1 + ka_3 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

De onde se tem o sistema:

$$\begin{cases} a_1 + a_2 + 2a_3 = 0 & (\mathrm{I}) \\ \quad a_2 - a_3 = 0 & (\mathrm{II}) \longrightarrow a_2 = a_3 \\ a_1 + ka_3 = 0 & (\mathrm{III}) \longrightarrow a_1 = -ka_3 \end{cases}$$

$$a_1, a_2 \rightarrow (\mathrm{I}): \quad -ka_3 + a_3 + 2a_3 = 0$$

$a_3 \in \mathbb{R}$

$$\underbrace{(-k+3)}_{-k+3=0 \;\therefore\; k=3} a_3 = 0 \longrightarrow 0a_3 = 0, \quad \exists a_3 \neq 0$$

Se $k = 3$, então $\exists\, a_3 \neq 0$ e A será LD //